Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

3 aprile 2023

Esercitazione: forma canonica di Jordan reale

Esercizio 1. Sia $M \in M(n, \mathbb{R})$ tale che $\exists\, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ distinti tale che:

$$(M^2 + a_1^2 I) \cdots (M^2 + a_k^2 I) = 0.$$

Dimostrare allora che esistono S, $A \in M(n, \mathbb{R})$ tale che $M = SA$ con S simmetrica e A antisimmetrica.

Soluzione. Per ipotesi, $p(x) = (x^2 + a_1^2) \cdots (x^2 + a_k^2) \in \operatorname{Ker} \sigma_M$. Dal momento che $p(x)$ si scompone in fattori lineari distinti in $\mathbb{C}$, $p(x)$ è anche il polinomio minimo di M. Si deduce allora che M è diagonalizzabile, e che i suoi autovalori sono esattamente $\pm a_1 i$, ..., $\pm a_k i$.