

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17, 19 e 26 aprile 2023

Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

- (i) φ è \mathbb{C} -lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,
- (ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in \mathbb{C}^n) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di \mathbb{C}^n il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.

- ▶ $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
- ▶ $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{a}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
- ▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
- ▶ Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v}_i$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$.
- ▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ .

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \cdot \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2 \Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2 \Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. \square

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A , ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^*A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, se A è invertibile.

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$. Allora $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^i \right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^j = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) \right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. \square

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia \mathcal{B} una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))^1$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$. Allora, poiché $\underline{v} \in V^\perp$, $0 = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) = a_1 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) + \dots + a_n \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. \square

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

- ▶ $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{0\} \iff \varphi$ è degenere,
- ▶ Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di \mathbb{R} , il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.
- ▶ Come mostrato nei momenti finali del documento (vd. *Esercizio 3*), vale la formula delle dimensioni anche nel caso del prodotto hermitiano.

Definizione. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} con base \mathcal{B} . Si definisce allora lo spazio $V_{\mathbb{R}}$, detto **spazio di restrizione su \mathbb{R}** di V , come uno spazio su \mathbb{R} generato da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

¹Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \rightarrow V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \bar{a}f(\underline{v})$.

Esempio. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di \mathbb{C}^3 è chiaramente $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Allora $V_{\mathbb{R}}$ sarà uno spazio vettoriale su \mathbb{R} generato dai vettori $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, i\underline{e}_1, i\underline{e}_2, i\underline{e}_3\}$.

Osservazione. Si osserva che lo spazio di restrizione su \mathbb{R} e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$, se $\dim V \in \mathbb{N}$.

Definizione. (complettizzazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su \mathbb{C} con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di \mathbb{C} come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $V \times \{\underline{0}\}$ come V , mentre $\{\underline{0}\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari iV di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{\underline{0}\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V . Allora, come accade per \mathbb{C} , si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su \mathbb{C} .

Infatti, se $(a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$, allora $(a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n) = (\underline{0}, \underline{0})$. Poiché però \mathcal{B} è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, \quad \underline{w} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n,$$

allora $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0})$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

²Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema delle torri algebriche: $[V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}] = [V : \mathbb{C}][\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[V : \mathbb{C}]$.

Definizione. Sia f un'applicazione \mathbb{C} -lineare di V spazio vettoriale su \mathbb{C} . Allora si definisce la **restrizione su \mathbb{R}** di f , detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V su \mathbb{C} . Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con $A', A'' \in M(n, \mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array} \right).$$

Infatti, se $f(\underline{v}_i) = (a_1 + b_1 i)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + b_n i)\underline{v}_n$, vale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n + b_1(i\underline{v}_1) + \dots + b_n(i\underline{v}_n)$, mentre $f_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = -b_1 \underline{v}_1 + \dots - b_n \underline{v}_n + a_1(i\underline{v}_1) + \dots + a_n(i\underline{v}_n)$.

Definizione. Sia f un'applicazione \mathbb{R} -lineare di V spazio vettoriale su \mathbb{R} . Allora si definisce la **complettizzazione** di f , detta $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w})$.

Osservazione. Si verifica infatti che $f_{\mathbb{C}}$ è \mathbb{C} -lineare.

- $f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + i(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + if(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (f(\underline{v}_1) + if(\underline{w}_1)) + (f(\underline{v}_2) + if(\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$.
- $f_{\mathbb{C}}((a + bi)(\underline{v} + i\underline{w})) = f_{\mathbb{C}}(a\underline{v} - b\underline{w} + i(a\underline{w} + b\underline{v})) = f(a\underline{v} - b\underline{w}) + if(a\underline{w} + b\underline{v}) = af(\underline{v}) - bf(\underline{w}) + i(af(\underline{w}) + bf(\underline{v})) = (a + bi)(f(\underline{v}) + if(\underline{w})) = (a + bi)f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w})$.

Proposizione. Sia $f_{\mathbb{C}}$ la completizzazione di $f \in \text{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Valgono allora i seguenti risultati:

- (i) $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_V$ assume gli stessi valori di f ,
- (ii) $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$,
- (iii) $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}}(f) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right)$.

Dimostrazione. Si dimostrano i risultati separatamente.

- (i) Si osserva che $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$. Dal momento che $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ è \mathbb{R} -lineare, si conclude che $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ assume gli stessi valori di f .

- (ii) Dal momento che \mathcal{B} , nell'identificazione di $(\underline{v}, \underline{0})$ come \underline{v} , è sempre una base di $V_{\mathbb{C}}$, e $f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$, chiaramente $[f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}} = [f(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$, dove si osserva anche che $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, essendo V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .
- (iii) Sia $f(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$ con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Come osservato in (i), $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}} = (f)_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}}$, e quindi la prima metà di $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})$ è formata da due blocchi: uno verticale coincidente con $M_{\mathcal{B}}(f)$ e un altro completamente nullo, dal momento che non compare alcun termine di $i\mathcal{B}$ nella scrittura di $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i)$. Al contrario, per $i\mathcal{B}$, $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = a_1(i\underline{v}_1) + \dots + a_n(i\underline{v}_n)$; pertanto la seconda metà della matrice avrà i due blocchi della prima metà, benché scambiati.

□

Osservazione. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$, $f_{\mathbb{C}}$ e f condividono lo stesso polinomio caratteristico e vale che $\text{sp}(f) \subseteq \text{sp}(f_{\mathbb{C}})$, dove vale l'uguaglianza se e solo se tale polinomio caratteristico è completamente riducibile in \mathbb{R} . Inoltre, se V_{λ} è l'autospazio su V dell'autovalore λ , l'autospazio su $V_{\mathbb{C}}$, rispetto a $f_{\mathbb{C}}$, è invece $V_{\mathbb{C}\lambda} = V_{\lambda} + iV_{\lambda}$, la cui dimensione rimane invariata rispetto a V_{λ} , ossia $\dim V_{\lambda} = \dim V_{\mathbb{C}\lambda}$ (infatti, analogamente a prima, una base di V_{λ} può essere identificata come base anche per $V_{\mathbb{C}\lambda}$).

Proposizione. Sia $f_{\mathbb{C}}$ la complessificazione di $f \in \text{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Allora un endomorfismo $\tilde{g} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ complessifica un endomorfismo $g \in \text{End}(V) \iff M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Se \tilde{g} complessifica $g \in \text{End}(V)$, allora, per la proposizione precedente, $M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) = M_{\mathcal{B}}(g) \in M(n, \mathbb{R})$. Se invece $A = M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$, si considera $g = M_{\mathcal{B}}^{-1}(A) \in \text{End}(V)$. Si verifica facilmente che \tilde{g} non è altro che il complessificato di tale g :

- $\tilde{g}(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i)$, dove l'uguaglianza è data dal confronto delle matrici associate, e quindi $\tilde{g}|_V = g$;
- $\tilde{g}(\underline{v} + i\underline{w}) = \tilde{g}(\underline{v}) + i\tilde{g}(\underline{w}) = g(\underline{v}) + ig(\underline{w})$, da cui la tesi.

□

Proposizione. Sia φ un prodotto scalare di V spazio vettoriale su \mathbb{R} . Allora esiste un unico prodotto hermitiano $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ che estende φ (ossia tale che $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$), il quale assume la stessa segnatura di φ .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} una base di Sylvester per φ . Si consideri allora il prodotto $\varphi_{\mathbb{C}}$ tale che:

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)).$$

Chiaramente $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$. Si verifica allora che $\varphi_{\mathbb{C}}$ è hermitiano:

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))] + [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_2))] = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$ (additività nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (a + bi)(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1)) = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1 + i(b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1)) = \varphi(\underline{v}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1) + \varphi(\underline{w}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1)) = a\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) - b\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(b\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - a\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) = a(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) - b(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + i(a(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + b(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1))) = (a + bi)(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))) = (a + bi)\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1)$ (omogeneità nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)) = \overline{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2))} = \overline{\varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}_2, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_2, \underline{v}_1))} = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \underline{v}_1 + \underline{w}_1)$ (coniugio nello scambio degli argomenti).

Ogni prodotto hermitiano τ che estende il prodotto scalare φ ha la stessa matrice associata nella base \mathcal{B} , essendo $\tau(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$ vero per ipotesi. Pertanto τ è unico, e vale che $\tau = \varphi_{\mathbb{C}}$. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è una matrice di Sylvester, $\varphi_{\mathbb{C}}$ mantiene anche la stessa segnatura di φ . \square

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_{φ} . Poiché φ non è degenere, $\text{Ker } a_{\varphi} = V^{\perp} = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che a_{φ} è un isomorfismo. Quindi $\forall f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_{\varphi}(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_{\varphi}(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. \square

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di V per φ . Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . In particolare $f = f(v_1)v_1^* + \dots + f(v_n)v_n^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(v_1)}{\varphi(v_1, v_1)}v_1 + \dots + \frac{f(v_n)}{\varphi(v_n, v_n)}v_n$. Detto $\underline{w} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(v_1) + \dots + a_nf(v_n) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di \underline{v} , $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di \underline{v} . \square

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di V per φ . Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . In particolare $f = f(v_1)v_1^* + \dots + f(v_n)v_n^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(v_1)}{\varphi(v_1, v_1)}v_1 + \dots + \frac{f(v_n)}{\varphi(v_n, v_n)}v_n$. Detto $\underline{w} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(v_1) + \dots + a_nf(v_n) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di \underline{v} , $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di \underline{v} . \square

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenere. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$, detto il **trasposto di f** e indicato con f^\top in assenza di ambiguità³, tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico \underline{v}' tale che

³Si tenga infatti in conto della differenza tra $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \rightarrow V^*$ che invece è tale che $f^\top \circ p(g) = g \circ f$.

$(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$ che associa a \underline{v} tale \underline{v}' . Si dimostra che f_φ^\top è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

- (i) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2)$, ossia che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) \forall \underline{w} \in V$.

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) &= \varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v}_2, f(\underline{w})) = (*), \\ \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) &= \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1), \underline{w}) + \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = (*), \end{aligned}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

- (ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, ossia che $\varphi(af_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \forall a \in \mathbb{K}, \underline{w} \in V$. È sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, essendo $f_\varphi^\top(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Infine si dimostra che f_φ^\top è unico. Sia infatti g un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di f_φ^\top . Allora $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{0\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f_\varphi^\top(\underline{v}) = g(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$, ossia $g = f_\varphi^\top$. \square

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa⁴ $f^* : V \rightarrow V$, detta **aggiunto di f** , tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si

⁴Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

costruisce allora una mappa f^* che associa \underline{v} a tale \underline{v}' .

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \rightarrow V$ che condivide la stessa proprietà di f^* . Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{0\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$, ossia $\mu = f^*$. \square

Osservazione. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenere, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenere. Valgono infatti le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

Definizione. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ tale che $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$.

Proposizione. Sia φ un prodotto scalare non degenere di V . Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove \mathcal{B} è una base di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B}^* la base relativa a \mathcal{B} in V^* . Per la proposizione precedente vale la seguente identità:

$$a_\varphi \circ f_\varphi^\top = f^\top \circ a_\varphi.$$

Pertanto, passando alle matrici associate, si ricava che:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi)M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}^*}(f^\top)M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi).$$

Dal momento che valgono le seguenti due identità:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top,$$

e a_φ è invertibile (per cui anche $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ lo è), si conclude che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

da cui la tesi. \square

Corollario. Sia φ un prodotto scalare di V . Se \mathcal{B} è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$.

Dimostrazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top.$$

\square

Proposizione. Sia φ un prodotto hermitiano non degenere di V . Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove \mathcal{B} è una base di V .

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Dal momento che φ è non degenere, $\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi) = V^\perp = \{\underline{0}\}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è invertibile.

Dacché allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, vale la seguente identità:

$$[f^*(\underline{v})]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [f(\underline{w})]_{\mathcal{B}},$$

ossia si deduce che:

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Sostituendo allora a \underline{v} e \underline{w} i vettori della base \mathcal{B} , si ottiene che:

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} &= [v_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [v_j]_{\mathcal{B}} = \\ &= [v_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [v_j]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f))_{ij}, \end{aligned}$$

e quindi che $M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)$. Moltiplicando a destra per l'inversa di $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e prendendo l'aggiunta di ambo i membri (ricordando che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, essendo φ un prodotto hermitiano), si ricava l'identità desiderata. \square

Corollario. Sia φ un prodotto hermitiano di V spazio vettoriale su \mathbb{C} . Se \mathcal{B} è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$.

Dimostrazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^*.$$

\square

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di V .

Definizione. (operatori simmetrici) Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** (o *autoaggiunto*) se $f = f^{\top}$.

Definizione. (applicazioni e matrici ortogonali) Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, ossia se è un'isometria in V . Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dice dunque che A è **ortogonale** se $A^{\top} A = A A^{\top} = I_n$.

Definizione. Le matrici ortogonali di $M(n, \mathbb{K})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $GL(n, \mathbb{K})$, detto **gruppo ortogonale**, e indicato con O_n . Il sottogruppo di O_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con SO_n .

Osservazione. Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- ▶ $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^{\top}) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.
- ▶ $A = (a) \in O_1 \iff A^{\top} A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$, da cui si ricava che l'unica matrice di SO_1 è (1). Si osserva inoltre che O_1 è abeliano

di ordine 2, e quindi che $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2.$$

Pertanto deve essere soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Si ricava dunque che si può identificare A con le funzioni trigonometriche $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = -1).$$

Definizione. (applicazioni e matrici hermitiane) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ . Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **hermitiana** se $A = A^*$.

Definizione. (applicazioni e matrici unitarie) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ . Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **unitaria** se $A^*A = AA^* = I_n$.

Definizione. Le matrici unitarie di $M(n, \mathbb{C})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $GL(n, \mathbb{C})$, detto **gruppo unitario**, e indicato con U_n . Il sottogruppo di U_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con SU_n .

Osservazione.

Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi unitari.

$$\blacktriangleright A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\det(\overline{A}) = |\det(A)|^2 = 1.$$

$$\blacktriangleright A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi),$$

ossia il numero complesso a appartiene alla circonferenza di raggio unitario.

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2 \iff AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = I_2,$$

$\det(A) = 1$, ossia se il seguente sistema di equazioni è soddisfatto:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \\ a\bar{c} + b\bar{d} = 0, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni riassumono il gruppo SU_2 nel seguente modo:

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \mid |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}.$$

Definizione. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} dotato del prodotto hermitiano standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è simmetrico $\iff f = f^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è ortogonale $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è ortogonale, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è ortogonale. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è hermitiano $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{*} \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è hermitiana $\iff f = f^{*} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^{*}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{*}$. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è unitario $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è unitario, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è unitario. \square

Osservazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale di (V, φ) , ricordando che $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ e che $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$, sono equivalenti allora i seguenti fatti:

- ▶ $f \circ f^{\top} = f^{\top} \circ f = \text{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale $\iff f$ è ortogonale,
- ▶ $f \circ f^* = f^* \circ f = \text{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria $\iff f$ è unitario (se V è uno spazio vettoriale su \mathbb{C}).

Proposizione. Sia $V = \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard φ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) $A \in O_n$,
- (ii) f_A è un operatore ortogonale,
- (iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la base canonica di V . Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore ortogonale, $A \in O_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in O_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

(\implies) Se $A \in O_n$, in particolare $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V , essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in O_n$, $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a

due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(Ae_i, Ae_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V .

Si osserva che anche $A^\top \in O_n$. Allora le righe di A , che non sono altro che le colonne di A^\top , formano anch'esse una base ortonormale di V .

(\Leftarrow) Nel moltiplicare A^\top con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare φ tra ogni riga di A^\top e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^\top A = AA^\top = I_n$, da cui si deduce che $A \in O_n$. \square

Proposizione. Sia $V = \mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard φ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) $A \in U_n$,
- (ii) f_A è un operatore unitario,
- (iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la base canonica di V . Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore unitario, $A \in U_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in U_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

(\implies) Se $A \in U_n$, in particolare $A \in GL(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V , essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in U_n$, $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(Ae_i, Ae_j)$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(Ae_i, Ae_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V .

Si osserva che anche $A^\top \in U_n$. Allora le righe di A , che non sono altro che le colonne di A^\top , formano anch'esse una base ortonormale di V .

(\Leftarrow) Nel moltiplicare A^* con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano φ tra ogni riga coniugata di A^* e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^*A = AA^* = I_n$, da cui si deduce che $A \in U_n$. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti tre risultati:

- (i) $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$ è uno spazio euclideo complesso.
- (ii) Se $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico, allora $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$ è hermitiano.
- (iii) Se $f \in \text{End}(V)$ è ortogonale, allora $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$ è unitario.

Dimostrazione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V , esiste una base ortonormale di V . Sia allora \mathcal{B} una base ortonormale di V . Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- È sufficiente dimostrare che $\varphi_{\mathbb{C}}$ altro non è che il prodotto hermitiano standard. Come si è già osservato precedentemente, $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi, dacché $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$, essendo \mathcal{B} ortonormale, vale anche che $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = I_n$, ossia $\varphi_{\mathbb{C}}$ è proprio il prodotto hermitiano standard.
- Poiché f è simmetrico, $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$, e quindi anche $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top}$. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, $M_{\mathcal{B}}(f) = \overline{M_{\mathcal{B}}(f)} \implies M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$. Quindi $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$, ossia $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$ è hermitiana, e pertanto anche $f_{\mathbb{C}}$ è hermitiano.
- Poiché f è ortogonale, $M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$, e quindi anche $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n$. Allora, come prima, si deduce che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$, essendo $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, da cui si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n$, ossia che $f_{\mathbb{C}}$ è unitario. □

Esercizio 1. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti risultati:

- Se $f, g \in \text{End}(V)$ commutano, allora anche $f_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ commutano.
- Se $f \in \text{End}(V)$, $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$.
- Se $f \in \text{End}(V)$, f diagonalizzabile $\iff f^{\top}$ diagonalizzabile.

Soluzione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V , esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V . Si dimostrano allora separatamente i tre risultati.

- Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$, e quindi che $f_{\mathbb{C}} \circ g_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$.
- Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R}) \implies M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^*$, e quindi che $M_{\mathcal{B}}((f^{\top})_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})^*)$. Allora $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$.
- Poiché \mathcal{B} è ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$. Allora, se f è diagonalizzabile, anche $M_{\mathcal{B}}(f)$ lo è, e quindi $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}), D \in M(n, \mathbb{K})$ diagonale tale che $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1}$. Allora $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = (P^{\top})^{-1}D^{\top}P^{\top}$ è simile ad una matrice diagonale, e pertanto $M_{\mathcal{B}}(f^{\top})$ è diagonalizzabile. Allora anche f^{\top} è diagonalizzabile. Vale anche il viceversa considerando l'identità $f = (f^{\top})^{\top}$ e l'implicazione appena dimostrata.

Nota. D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che V sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

Definizione. (norma euclidea) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$.

Definizione. (distanza euclidea tra due vettori) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Osservazione.

- ▶ Si osserva che in effetti $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \forall \underline{v} \in V$. Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso, φ è definito positivo.
- ▶ Vale che $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$. Infatti, se $\underline{v} = \underline{0}$, chiaramente $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$; se invece $\|\underline{v}\| = 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, e quindi $\underline{v} = \underline{0}$, dacché $V^{\perp} = \{\underline{0}\}$, essendo φ definito positivo.
- ▶ Inoltre, vale chiaramente che $\|\alpha\underline{v}\| = |\alpha| \|\underline{v}\|$.
- ▶ Se f è un operatore ortogonale (o unitario), allora f mantiene sia le norme che le distanze tra vettori. Infatti $\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|^2$, da cui segue che $\|\underline{v} - \underline{w}\| = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|$.

Proposizione. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Vale che $\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se \underline{v} e \underline{w} sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e quindi il caso in cui φ è il prodotto scalare standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$. Si consideri la disuguaglianza $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V . Allora $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$. L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, e quindi se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Vale in particolare l'equivalenza se e solo se $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$, ossia se $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$, da cui la tesi.

Si consideri ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e dunque il caso in cui φ è il prodotto hermitiano standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideri allora la disuguaglianza $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V . Allora $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 = \|\alpha\underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha\underline{v}, \beta\underline{w}) + \varphi(\beta\underline{w}, \alpha\underline{v}) + \|\beta\underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \bar{\alpha}\beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \alpha\bar{\beta} \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$. Ponendo allora $\alpha = \|\underline{w}\|^2$ e $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = -\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se $\underline{w} = \underline{0}$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per $\|\underline{w}\|^2$ (dal momento che $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$) per ottenere la tesi. Come prima, si osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se \underline{v} e \underline{w} sono linearmente dipendenti. \square

Proposizione. (disuguaglianza triangolare) $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$.

Dimostrazione. Si osserva che $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$. Se φ è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza desiderata.

Se invece φ è il prodotto hermitiano standard, $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$. Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata. \square

Osservazione. Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

- ▶ Se $\underline{v} \perp \underline{w}$, allora $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ (teorema di Pitagora),
- ▶ Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ e φ è un prodotto scalare, allora $\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$, e quindi $\underline{v} + \underline{w} \perp \underline{v} - \underline{w}$ (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base ortogonale di V per φ .

- ▶ Se $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$, con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = a_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$. Quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i$. In particolare, $\frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$ è detto **coefficiente di Fourier** di \underline{v} rispetto a \underline{v}_i , e si indica con $C(\underline{v}, \underline{v}_i)$. Se \mathcal{B} è ortonormale, $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$.
- ▶ Quindi $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$. In particolare, se \mathcal{B} è ortonormale, $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$. In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel: $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$ per $k \leq n$.

Osservazione. (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se φ è non degenere (o in generale, se $\text{CI}(\varphi) = \{0\}$) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ per V (dove si ricorda che deve valere $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da \mathcal{B} una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n\}$ con le seguenti proprietà:

- (i) \mathcal{B}' è una base ortogonale,
- (ii) \mathcal{B}' mantiene la stessa bandiera di \mathcal{B} (ossia $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_i)$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione \underline{v}_1 e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \underline{v}_1 = \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con \underline{v}_1 . Pertanto si applica la mappa $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_i^{(1)}$. Si verifica infatti che \underline{v}_1 e $\underline{v}_i^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i^{(1)}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi\left(\underline{v}_1, \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1\right) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) = 0.$$

Poiché \underline{v}_1 non è isotropo, si deduce la decomposizione $V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$. In particolare $\dim \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n - 1$: essendo allora i vettori $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da \mathcal{B}' normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

Osservazione. Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

Esempio. Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ossia \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1 = \underline{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_2 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_2,$
- $\underline{v}_3^{(1)} = \underline{v}_3 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_3)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Si considera ora $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

$$\bullet \underline{v}_3^{(2)} = \underline{v}_3^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})}{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_2^{(1)})} \underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_3^{(1)} - \underline{v}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3.$$

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, ossia la base canonica di \mathbb{R}^3 , già ortonormale.

Osservazione. Si osserva adesso che se (V, φ) è uno spazio euclideo (e quindi $\varphi > 0$), e W è un sottospazio di V , vale la seguente decomposizione:

$$V = W \oplus^\perp W^\perp.$$

Pertanto ogni vettore $\underline{v} \in V$ può scriversi come $\underline{w} + \underline{w}'$ dove $\underline{w} \in W$ e $\underline{w}' \in W^\perp$, dove $\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$.

Definizione. (proiezione ortogonale) Si definisce l'applicazione $\text{pr}_W : V \rightarrow V$, detta **proiezione ortogonale** su W , in modo tale che $\text{pr}_W(\underline{v}) = \underline{w}$, dove $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$, con $\underline{w} \in W$ e $\underline{w}' \in W^\perp$.

Osservazione.

► Dacché la proiezione ortogonale è un caso particolare della classica applicazione lineare di proiezione su un sottospazio di una somma diretta, pr_W è un'applicazione lineare.

► Vale chiaramente che $\text{pr}_W^2 = \text{pr}_W$, da cui si ricava, se $W^\perp \neq \{0\}$, che $\varphi_{\text{pr}_W}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$, ossia che $\text{sp}(\text{pr}_W) = \{0, 1\}$. Infatti $\text{pr}_W(\underline{v})$ appartiene già a W , ed essendo la scrittura in somma di due elementi, uno di W e uno di W' , unica, $\text{pr}_W(\text{pr}_W(\underline{v})) = \text{pr}_W(\underline{v})$, da cui l'identità $\text{pr}_W^2 = \text{pr}_W$.

► Seguendo il ragionamento di prima, vale anche che $\text{pr}_W|_W = \text{Id}_W$ e che $\text{pr}_W|_{W^\perp} = 0$.

► Inoltre, vale la seguente riscrittura di $\underline{v} \in V$: $\underline{v} = \text{pr}_W(\underline{v}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{v})$.

► Se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base ortogonale di W , allora $\text{pr}_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$. Infatti $\underline{v} - \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i \in W^\perp$.

► pr_W è un operatore simmetrico (o hermitiano se lo spazio è complesso). Infatti $\varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{w})) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \text{pr}_W(\underline{w}))$.

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo. Allora valgono i seguenti risultati:

- (i) Siano $U, W \subseteq V$ sono sottospazi di V , allora $U \perp W$, ossia⁵ $U \subseteq W^\perp$,
 $\iff \text{pr}_U \circ \text{pr}_W = \text{pr}_W \circ \text{pr}_U = 0$.
- (ii) Sia $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. Allora $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v}) \iff W_i \perp W_j$
 $\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$.

Dimostrazione. Si dimostrano i due risultati separatamente.

- (i) Sia $\underline{v} \in V$. Allora $\text{pr}_W(\underline{v}) \in W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Pertanto
 $\text{pr}_U(\text{pr}_W(\underline{v})) = \underline{0}$. Analogamente $\text{pr}_W(\text{pr}_U(\underline{v})) = \underline{0}$, da cui la tesi.
- (ii) Sia vero che $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$. Sia $\underline{w} \in W_j$. Allora
 $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{w} + \sum_{i \neq j} \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) \implies \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{0} \forall i \neq j$.
 Quindi $\underline{w} \in W_i^\perp \forall i \neq j$, e si conclude che $W_i \subseteq W_j^\perp \implies W_i \perp W_j$.
 Se invece $W_i \perp W_j \forall i \neq j$, sia $\mathcal{B}_i = \{\underline{w}_i^{(1)}, \dots, \underline{w}_i^{(k_i)}\}$ una base
 ortogonale di W_i . Allora $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ è anch'essa una base ortogonale
 di V , essendo $\varphi(\underline{w}_i^{(t_i)}, \underline{w}_j^{(t_j)}) = 0$ per ipotesi. Pertanto
 $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} C(\underline{v}, \underline{w}_i^{(j)}) \underline{w}_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v})$, da cui la tesi. \square

Definizione. (inversione ortogonale) Si definisce l'applicazione $\rho_W : V \rightarrow V$, detta **inversione ortogonale**, in modo tale che, detto $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}' \in V$ con $\underline{w} \in W, \underline{w}' \in W^\perp$, $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w} - \underline{w}'$. Se $\dim W = \dim V - 1$, si dice che ρ_W è una **riflessione**.

Osservazione.

- Si osserva che ρ_W è un'applicazione lineare.
- Vale l'identità $\rho_W^2 = \text{Id}_V$, da cui si ricava che $\varphi_{\rho_W}(\lambda) \mid (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. In particolare, se $W^\perp \neq \{0\}$, vale proprio che $\text{sp}(\rho_W) = \{\pm 1\}$, dove $V_1 = W$ e $V_{-1} = W^\perp$.
- ρ_W è ortogonale (o unitaria, se V è uno spazio euclideo complesso). Infatti se $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{w}_1'$ e $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{w}_2'$, con $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ e $\underline{w}_1', \underline{w}_2' \in W^\perp$, $\varphi(\rho_W(\underline{v}_1), \rho_W(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{w}_1 - \underline{w}_1', \underline{w}_2 - \underline{w}_2') = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2') + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2') = \varphi(\underline{w}_1 - \underline{w}_1', \underline{w}_2 - \underline{w}_2')$.
 $\underbrace{\phantom{\varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2') + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2')}}_{=0}$

Quindi $\varphi(\rho_W(\underline{v}_1), \rho_W(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2') + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2') = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$.

⁵È sufficiente che valga $U \subseteq W^\perp$ affinché valga anche $W \subseteq U^\perp$. Infatti $U \subseteq W^\perp \implies W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$. Si osserva che in generale vale che $W \subseteq W^{\perp\perp}$, dove vale l'uguaglianza nel caso di un prodotto φ non degenerare, com'è nel caso di uno spazio euclideo, essendo $\varphi > 0$ per ipotesi.

Lemma 1. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Siano $\underline{u}, \underline{w} \in V$. Se $\|\underline{u}\| = \|\underline{w}\|$, allora esiste un sottospazio W di dimensione $n - 1$ per cui la riflessione ρ_W relativa a φ è tale che $\rho_W(\underline{u}) = \underline{w}$.

Dimostrazione. Se \underline{v} e \underline{w} sono linearmente dipendenti, dal momento che $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$, deve valere anche che $\underline{v} = \underline{w}$. Sia $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{u} \in \text{Span}(\underline{v})^\perp$. Si consideri $U = \text{Span}(\underline{u})$: si osserva che $\dim U = 1$ e che, essendo φ non degenere, $\dim U^\perp = n - 1$. Posto allora $W = U^\perp$, si ricava, sempre perché φ è non degenere, che $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$. Si conclude pertanto che $\rho_W(\underline{v}) = \underline{v} = \underline{w}$.

Siano adesso \underline{v} e \underline{w} linearmente indipendenti e sia $U = \text{Span}(\underline{v} - \underline{w})$. Dal momento che $\dim U = 1$ e φ è non degenere, $\dim U^\perp = n - 1$. Sia allora $W = U^\perp$. Allora, come prima, $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$. Si consideri dunque la riflessione ρ_W : dacché $\underline{v} = \frac{\underline{v} + \underline{w}}{2} + \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2}$, e $\varphi(\frac{\underline{v} + \underline{w}}{2}, \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2}) = \frac{\|\underline{v}\| - \|\underline{w}\|}{4} = 0$, \underline{v} è già decomposto in un elemento di W e in uno di W^\perp , per cui si conclude che $\rho_W(\underline{v}) = \frac{\underline{v} + \underline{w}}{2} - \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2} = \underline{w}$, ottenendo la tesi. □

Teorema (di Cartan–Dieudonné). Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Ogni isometria di V è allora prodotto di al più n riflessioni.

Dimostrazione. Si dimostra la tesi applicando il principio di induzione sulla dimensione n di V .

(*passo base*) Sia $n = 1$ e sia inoltre f un'isometria di V . Sia \underline{v}_1 l'unico elemento di una base ortonormale \mathcal{B} di V . Allora $\|f(\underline{v}_1)\| = \|\underline{v}_1\| = 1$, da cui si ricava che⁶ $f(\underline{v}_1) = \pm \underline{v}_1$, ossia che $f = \pm \text{Id}_V$. Se $f = \text{Id}_V$, f è un prodotto vuoto, e già verifica la tesi; altrimenti $f = \rho_{\{0\}}$, dove si considera $V = V \oplus^\perp \{0\}$. Pertanto f è prodotto di al più una riflessione.

(*passo induttivo*) Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Sia f un'isometria di V . Si assuma inizialmente l'esistenza di \underline{v}_i tale per cui $f(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$. Allora, detto $W = \text{Span}(\underline{v}_i)$, si può decomporre V come $W \oplus^\perp W^\perp$. Si osserva che W^\perp è f -invariante: infatti, se $\underline{u} \in W^\perp$, $\varphi(\underline{v}_i, f(\underline{u})) = \varphi(f(\underline{v}_i), f(\underline{u})) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{u}) = 0 \implies f(\underline{u}) \in W^\perp$. Pertanto si può considerare l'isometria $f|_{W^\perp}$. Dacché $\dim W^\perp = n - 1$, per il passo induttivo esistono W_1, \dots, W_k sottospazi di W^\perp con $k \leq n - 1$ per cui $\rho_{W_1}, \dots, \rho_{W_k} \in \text{End}(W^\perp)$ sono tali che $f|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \dots \circ \rho_{W_k}$.

⁶Infatti, detto $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(\underline{v}_1) = \lambda \underline{v}_1$, $\|\underline{v}_1\| = \|f(\underline{v}_1)\| = \lambda^2 \|\underline{v}_1\| \implies \lambda = \pm 1$, ossia $f = \pm \text{Id}$, come volevasi dimostrare.

Si considerino allora le riflessioni $\rho_{W_1 \oplus^\perp W}, \dots, \rho_{W_k \oplus^\perp W}$. Si mostra che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_W = \text{Id}_W = f|_W$. Affinché si faccia ciò è sufficiente mostrare che $(\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W})(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$. Si osserva che $\underline{v}_i \in W_i \oplus^\perp W \forall 1 \leq i \leq k$, e quindi che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$. Reiterando l'applicazione di questa identità nel prodotto, si ottiene infine il risultato desiderato. Infine, si dimostra che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \dots \circ \rho_{W_k} = f|_{W^\perp}$. Analogamente a prima, è sufficiente mostrare che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u}) \forall \underline{u} \in W^\perp$. Sia $\underline{u} = \rho_{W_k}(\underline{u}) + \underline{u}'$ con $\underline{u}' \in W_k^\perp \cap W^\perp \subseteq (W_k \oplus^\perp W)^\perp$, ricordando che $W^\perp = W_k \oplus^\perp (W^\perp \cap W_k^\perp)$. Allora, poiché $\rho_{W_k}(\underline{u}) \in W_k \subseteq (W_k \oplus^\perp W)$, si conclude che $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u})$. Pertanto, dacché vale che $V = W \oplus^\perp W^\perp$ e che $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}$ e f , ristretti su W o su W^\perp , sono le stesse identiche mappe, allora in particolare vale l'uguaglianza più generale:

$$f = \rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W},$$

e quindi f è prodotto di $k \leq n - 1$ riflessioni.

Se invece non esiste alcun \underline{v}_i tale per cui $f(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$, per il *Lemma 1* esiste una riflessione τ tale per cui $\tau(f(\underline{v}_i)) = \underline{v}_i$. In particolare $\tau \circ f$ è anch'essa un'isometria, essendo composizione di due isometrie. Allora, da prima, esistono U_1, \dots, U_k sottospazi di V con $k \leq n - 1$ tali per cui $\tau \circ f = \rho_{U_1} \circ \dots \circ \rho_{U_k}$, da cui $f = \tau \circ \rho_{U_1} \circ \dots \circ \rho_{U_k}$, ossia f è prodotto di al più n riflessioni, concludendo il passo induttivo. \square

Lemma 1. Sia $f \in \text{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora f ha solo autovalori reali⁷.

Dimostrazione. Si assuma che V è uno spazio euclideo complesso, e quindi che φ è un prodotto hermitiano. Allora, se f è hermitiano, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore⁸ e sia $\underline{v} \in V_\lambda$. Allora $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))} \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) \in \mathbb{R}$. Inoltre vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{v}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{v}),$$

da cui, ricordando che φ è non degenera e che $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, si ricava che:

⁷Nel caso di f simmetrico, si intende in particolare che tutte le radici del suo polinomio caratteristico sono reali.

⁸Tale autovalore esiste sicuramente dal momento che $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso.

$$\lambda = \frac{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))}{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \in \mathbb{R}.$$

Sia ora invece V è uno spazio euclideo reale e φ è un prodotto scalare. Allora, $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$ è uno spazio euclideo complesso, e $f_{\mathbb{C}}$ è hermitiano. Sia \mathcal{B} una base di V . Allora, come visto all'inizio di questa dimostrazione, $f_{\mathbb{C}}$ ha solo autovalori reali, da cui si ricava che il polinomio caratteristico di $f_{\mathbb{C}}$ è completamente riducibile in \mathbb{R} . Si osserva inoltre che $p_f(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = \det(M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) - \lambda I_n) = p_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda)$. Si conclude dunque che anche p_f è completamente riducibile in \mathbb{R} . \square

Osservazione. Dal lemma precedente consegue immediatamente che se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è simmetrica (o se appartiene a $M(n, \mathbb{C})$ ed è hermitiana), considerando l'operatore simmetrico f_A indotto da A in \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n), f_A ha tutti autovalori reali, e dunque così anche A .

Lemma 2. Sia $f \in \text{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora se λ, μ sono due autovalori distinti di f , $V_{\lambda} \perp V_{\mu}$.

Dimostrazione. Siano $\underline{v} \in V_{\lambda}$ e $\underline{w} \in V_{\mu}$. Allora⁹ $\lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto vale la seguente identità:

$$(\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0.$$

In particolare, valendo $\lambda - \mu \neq 0$ per ipotesi, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies V_{\lambda} \perp V_{\mu}$, da cui la tesi. \square

Lemma 3. Sia $f \in \text{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Se $W \subseteq V$ è f -invariante, allora anche W^{\perp} lo è.

Dimostrazione. Siano $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in W^{\perp}$. Allora $\varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = \varphi(\underbrace{f(\underline{w})}_{\in W}, \underline{v}) =$

0, da cui si ricava che $f(\underline{v}) \in W^{\perp}$, ossia la tesi. \square

Teorema (spettrale reale). Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale (o complesso) e sia $f \in \text{End}(V)$ simmetrico (o hermitiano). Allora esiste una base ortogonale \mathcal{B} di V composta di autovettori per f .

⁹Si osserva che non è stato coniugato λ nei passaggi algebrici, valendo $\lambda \in \mathbb{R}$ dallo scorso lemma.

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti gli autovalori reali di f . Sia inoltre $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$. Per i lemmi precedenti, vale che:

$$W = V_{\lambda_1} \oplus^\perp \dots \oplus^\perp V_{\lambda_k}.$$

Sicuramente $W \subset V$. Si assuma però che $W \subsetneq V$. Allora $V = W \oplus^\perp W^\perp$. In particolare, per il lemma precedente, W^\perp è f -invariante. Quindi $f|_{W^\perp}$ è un endomorfismo di uno spazio di dimensione non nulla. Si osserva che $f|_{W^\perp}$ è chiaramente simmetrico (o hermitiano), essendo solo una restrizione di f . Allora $f|_{W^\perp}$ ammette autovalori reali per i lemmi precedenti; tuttavia questo è un assurdo, dal momento che ogni autovalore di $f|_{W^\perp}$ è anche autovalore di f e si era supposto che¹⁰ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ fossero tutti gli autovalori di f , \neq . Quindi $W = V$. Pertanto, detta \mathcal{B}_i una base ortonormale di V_{λ_i} , $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ è una base ortonormale di V , da cui la tesi. \square

Corollario (teorema spettrale per le matrici). Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica (o appartenente a $M(n, \mathbb{C})$ ed hermitiana). Allora $\exists P \in O_n$ (o $P \in U_n$) tale che $P^{-1}AP = P^\top AP$ (o $P^{-1}AP = P^*AP$ nel caso hermitiano) sia una matrice diagonale reale.

Dimostrazione. Si consideri f_A , l'operatore indotto dalla matrice A in \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n). Allora f_A è un operatore simmetrico (o hermitiano) sul prodotto scalare (o hermitiano) standard. Pertanto, per il teorema spettrale reale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ composta di autovettori di f_A . In particolare, detta \mathcal{B}' la base canonica di \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n), vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id})^{-1} M_{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}),$$

dove $M_{\mathcal{B}'}(f) = A$, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, essendo \mathcal{B} composta di autovettori, e $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ si configura nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = (\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n).$$

Dacché \mathcal{B} è ortogonale, P è anch'essa ortogonale, da cui la tesi. \square

Osservazione.

► Un importante risultato che consegue direttamente dal teorema spettrale per le matrici riguarda la segnatura di un prodotto scalare (o hermitiano). Infatti, detta $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $D = P^\top AP$, e dunque $D \cong A$. Allora, essendo

¹⁰Infatti tale autovalore λ non può già comparire tra questi autovalori, altrimenti, detto $i \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda = \lambda_i$, $V_{\lambda_i} \cap W^\perp \neq \{0\}$, violando la somma diretta supposta.

D diagonale, l'indice di positività è esattamente il numero di valori positivi sulla diagonale, ossia il numero di autovalori positivi di A . Analogamente l'indice di negatività è il numero di autovalori negativi, e quello di nullità è la molteplicità algebrica di 0 come autovalore (ossia esattamente la dimensione di $V_\varphi^\perp = \text{Ker } a_\varphi$).

Teorema (di triangolazione con base ortonormale). Sia $f \in \text{End}(V)$, dove (V, φ) è uno spazio euclideo su \mathbb{K} . Allora, se p_f è completamente riducibile in \mathbb{K} , esiste una base ortonormale \mathcal{B} tale per cui $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore (ossia esiste una base ortonormale a bandiera per f).

Dimostrazione. Per il teorema di triangolazione, esiste una base \mathcal{B} a bandiera per f . Allora, applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, si può ottenere da \mathcal{B} una nuova base \mathcal{B}' ortonormale e che mantenga le stesse bandiere. Allora, se $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è ordinata, dacché $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$ è f -invariante, $f(\underline{v}_i) \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$, e quindi $M_{\mathcal{B}'}(f)$ è triangolare superiore, da cui la tesi. \square

Corollario. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o $M(n, \mathbb{C})$) tale per cui p_A è completamente riducibile. Allora $\exists P \in O_n$ (o U_n) tale per cui $P^{-1}AP = P^\top AP$ (o $P^{-1}AP = P^*AP$) è triangolare superiore.

Dimostrazione. Si consideri l'operatore f_A indotto da A in \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n). Sia \mathcal{B} la base canonica di \mathbb{R}^n (o di \mathbb{C}^n). Allora, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di \mathbb{R}^n (o di \mathbb{C}^n) tale per cui $T = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$ è triangolare superiore. Si osserva inoltre che $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ e che $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = (\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n)$ è ortogonale (o unitaria), dacché le sue colonne formano una base ortonormale. Allora, dalla formula del cambiamento di base per la applicazioni lineari, si ricava che:

$$A = PTP^{-1} \implies T = P^{-1}TP,$$

da cui, osservando che $P^{-1} = P^\top$ (o $P^{-1} = P^*$), si ricava la tesi. \square

Definizione (operatore normale). Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora $f \in \text{End}(V)$ si dice **normale** se commuta con il suo trasposto (i.e. se $ff^\top = f^\top f$). Analogamente, se (V, φ) è uno spazio euclideo complesso, allora f si dice normale se commuta con il suo aggiunto (i.e. se $ff^* = f^*f$).

Definizione (matrice normale). Una matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o $M(n, \mathbb{C})$) si dice **normale** se $AA^\top = A^\top A$ (o $AA^* = A^*A$).

Osservazione.

- ▶ Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ e A è simmetrica ($A = A^\top$), antisimmetrica ($A = -A^\top$) o ortogonale ($AA^\top = A^\top A = I_n$), sicuramente A è normale.
- ▶ Se $A \in M(n, \mathbb{C})$ e A è hermitiana ($A = A^*$), antihermitiana ($A = -A^*$) o unitaria ($AA^* = A^*A = I_n$), sicuramente A è normale.
- ▶ f è normale $\iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è normale, con \mathcal{B} ortonormale di V .
- ▶ A è normale $\iff f_A$ è normale, considerando che la base canonica di \mathbb{C}^n è già ortonormale rispetto al prodotto hermitiano standard.
- ▶ Se V è euclideo reale, f è normale $\iff f_{\mathbb{C}}$ è normale. Infatti, se f è normale, f e f^\top commutano. Allora anche $f_{\mathbb{C}}$ e $(f^\top)_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$ commutano, e quindi $f_{\mathbb{C}}$ è normale. Ripercorrendo i passaggi al contrario, si osserva infine che vale anche il viceversa.

Lemma 1. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ triangolare superiore e normale (i.e. $AA^* = A^*A$). Allora A è diagonale.

Dimostrazione. Se A è normale, allora $(A^*)_i A^i = \bar{A}^i A^i$ deve essere uguale a $A_i (A^*)^i = A_i \bar{A}_i \forall 1 \leq i \leq n$. Si dimostra per induzione su i da 1 a n che tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe A_1, \dots, A_i sono nulli.

(*passo base*) Si osserva che valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\bar{A}^1 A^1 &= |a_{11}|^2, \\ A_1 \bar{A}_1 &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2.\end{aligned}$$

Dovendo vale l'uguaglianza, si ricava che $|a_{12}|^2 \dots + |a_{1n}|^2 = 0$, e quindi che $|a_{1i}|^2 = 0 \implies a_{1i} = 0 \quad \forall 2 \leq i \leq n$, dimostrando il passo base¹¹.

(*passo induttivo*) Analogamente a prima, si considerano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\bar{A}^i A^i &= |a_{1i}|^2 + \dots + |a_{ii}|^2 = |a_{ii}|^2, \\ A_i \bar{A}_i &= |a_{ii}|^2 + |a_{i(i+1)}|^2 + \dots + |a_{in}|^2,\end{aligned}$$

dove si è usato che, per il passo induttivo, tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe A_1, \dots, A_{i-1} sono nulli. Allora, analogamente a prima, si ricava che $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \leq n$, dimostrando il passo induttivo, e quindi la tesi. \square

¹¹Gli altri elementi sono infatti già nulli per ipotesi, essendo A triangolare superiore

Osservazione.

► Chiaramente vale anche il viceversa del precedente lemma: se infatti $A \in M(n, \mathbb{C})$ è diagonale, A è anche normale, dal momento che commuta con A^* .

► Reiterando la stessa dimostrazione del precedente lemma per $A \in M(n, \mathbb{R})$ triangolare superiore e normale reale (i.e. $AA^\top = A^\top A$) si può ottenere una tesi analoga.

Teorema. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso. Allora f è un operatore normale \iff esiste una base ortonormale \mathcal{B} di autovettori per f .

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Poiché \mathbb{C} è algebricamente chiuso, p_f è sicuramente riducibile. Pertanto, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale \mathcal{B} a bandiera per f . In particolare, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è sia normale che triangolare superiore. Allora, per il *Lemma 1*, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, e dunque \mathcal{B} è anche una base di autovettori per f .

(\impliedby) Se esiste una base ortonormale \mathcal{B} di autovettori per f , $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, e dunque anche normale. Allora, poiché \mathcal{B} è ortonormale, anche f è normale. \square

Corollario. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Allora A è normale $\iff \exists U \in U_n$ tale che $U^{-1}AU = U^*AU$ è diagonale.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Sia \mathcal{B} la base canonica di \mathbb{C}^n . Si consideri l'applicazione lineare f_A indotta da A su \mathbb{C}^n . Se A è normale, allora anche f_A lo è. Pertanto, per il precedente teorema, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di autovettori per f_A . In particolare, $U = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}) = (\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n)$ è unitaria ($U \in U_n$), dacché le colonne di U sono ortonormali. Si osserva inoltre che $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ e che $D = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$ è diagonale. Allora, per la formula del cambiamento di base per le applicazioni lineari, si conclude che:

$$A = UDU^{-1} \implies D = U^{-1}AU = U^*AU,$$

ossia che U^*AU è diagonale.

(\impliedby) Sia $D = U^*AU$. Dacché D è diagonale, D è anche normale. Pertanto $DD^* = D^*D$. Sostituendo, si ottiene che $U^*AUU^*A^*U = U^*A^*UU^*AU$.

Ricordando che $U^*U = I_n$ e che $U \in U_n$ è sempre invertibile, si conclude che $AA^* = A^*A$, ossia che A è normale a sua volta, da cui la tesi. \square

Osservazione.

► Si può osservare mediante l'applicazione dell'ultimo corollario che, se A è hermitiana (ed è dunque anche normale), $\exists U \in U_n \mid U^*AU = D$, dove $D \in M(n, \mathbb{R})$, ossia tale corollario implica il teorema spettrale in forma complessa. Infatti $\overline{D} = D^* = U^*A^*U = U^*AU = D \implies D \in M(n, \mathbb{R})$.

► Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è una matrice normale reale (i.e. $AA^\top = A^\top A$) con p_A completamente riducibile in \mathbb{R} , allora è possibile reiterare la dimostrazione del precedente teorema per concludere che $\exists O \in O_n \mid O^\top AO = D$ con $D \in M(n, \mathbb{R})$, ossia che $A = ODO^\top$. Tuttavia questo implica che $A^\top = (ODO^\top) = OD^\top O^\top = ODO^\top = A$, ossia che A è simmetrica. In particolare, per il teorema spettrale reale, vale anche il viceversa. Pertanto, se $A \in M(n, \mathbb{R})$, A è una matrice normale reale con p_A completamente riducibile in $\mathbb{R} \iff A = A^\top$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio dotato del prodotto φ . Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V . Sia $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ una base di W e sia $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si dimostrino allora i seguenti risultati.

- (i) $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$,
- (ii) $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid A_{1, \dots, k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\} = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } A_{1, \dots, k})$,
- (iii) $\dim W^\perp = \dim V - \text{rg}(A_{1, \dots, k})$,
- (iv) Se φ è non degenere, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Soluzione. Chiaramente vale l'inclusione $W^\perp \subseteq \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$. Sia allora $\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \forall 1 \leq i \leq k$ e sia $\underline{w} \in W$. Allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tali che $\underline{w} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k$. Pertanto si conclude che $\varphi(\underline{v}, \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k) = \alpha_1 \varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + \dots + \alpha_k \varphi(\underline{v}, \underline{w}_k) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$. Pertanto $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$, dimostrando (i).

Si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \iff \varphi(\underline{w}_i, \underline{v}) = 0$. Se φ è scalare, allora $\varphi(\underline{w}_i, \underline{v}) = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = (\underline{e}_i)^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$. Pertanto $\underline{v} \in W^\perp \iff A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0 \forall 1 \leq i \leq k$, ossia se $A_{1, \dots, k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$ e $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } A_{1, \dots, k}$, dimostrando (ii). Analogamente si ottiene la tesi se φ è hermitiano. Applicando la formula delle dimensioni, si ricava dunque che

$\dim W^\top = \dim \text{Ker } A_{1,\dots,k} = \dim V - \text{rg } A_{1,\dots,k}$, dimostrando (iii).

Se φ è non degenere, A è invertibile, dacché $\dim V^\perp = \dim \text{Ker } A = 0$. Allora ogni minore di taglia k di A ha determinante diverso da zero. Dacché ogni minore di taglia k di $A_{1,\dots,k}$ è anche un minore di taglia k di A , si ricava che anche ogni minore di taglia k di $A_{1,\dots,k}$ ha determinante diverso da zero, e quindi che $\text{rg}(A_{1,\dots,k}) \geq k$. Dacché deve anche valere $\text{rg}(A_{1,\dots,k}) \leq \min\{k, n\} = k$, si conclude che $\text{rg}(A_{1,\dots,k})$ vale esattamente $k = \dim W$. Allora, dal punto (iii), vale che $\dim W^\perp + \dim W = \dim W^\perp + \text{rg}(A_{1,\dots,k}) = \dim V$, dimostrando il punto (iv). \square

Esercizio 3. Sia V uno spazio dotato del prodotto φ . Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di V . Si dimostrino allora i seguenti due risultati.

- (i) Il prodotto φ induce un prodotto $\tilde{\varphi} : V/U \times V/U \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}')$ se e soltanto se $U \subseteq V^\perp$, ossia se e solo se $U \perp V$.
- (ii) Se $U = V^\perp$, allora il prodotto $\tilde{\varphi}$ è non degenere.
- (iii) Sia $\pi : V \rightarrow V/V^\perp$ l'applicazione lineare di proiezione al quoziente. Allora $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0 \ \forall \underline{u} \in U\} = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$.
- (iv) Vale la formula delle dimensioni per il prodotto φ : $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$.

Soluzione. Sia $\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}_1 \in \underline{v} + U$, con $\underline{u}_1 \in U$. Se $\tilde{\varphi}$ è ben definito, allora deve valere l'uguaglianza $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{w}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u}_1, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}')$, ossia $\varphi(\underline{u}_1, \underline{v}') = 0 \ \forall \underline{v}' \in V \implies \underline{u}_1 \in V^\perp \implies U \subseteq V^\perp$. Viceversa, se $U \subseteq V^\perp$, sia $\underline{w}' = \underline{v}' + \underline{u}_2 \in \underline{v}' + U$, con $\underline{u}_2 \in U$. Allora vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u}_1, \underline{v}' + \underline{u}_2) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{u}_2) + \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2)}_{=0}.$$

Pertanto $\tilde{\varphi}$ è ben definito, dimostrando (i).

Sia ora $U = V/V^\perp$. Sia $\underline{v} + U \in (V/U)^\perp = \text{Rad}(\tilde{\varphi})$. Allora, $\forall \underline{v}' + U \in V/U$, $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') = 0$, ossia $\underline{v} \in V^\perp = U$. Pertanto $\underline{v} + U = U \implies \text{Rad}(\tilde{\varphi}) = \{V^\perp\}$, e quindi $\tilde{\varphi}$ è non degenere, dimostrando (ii).

Si dimostra adesso l'uguaglianza $U^\perp = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$. Sia $\underline{v} \in U^\perp$. Allora $\tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \forall \underline{u} \in U$, da cui si ricava che vale l'inclusione $U^\perp \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$. Sia ora $\underline{v} \in \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$, e sia $\underline{u} \in U$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0$, da cui vale la doppia inclusione, e dunque l'uguaglianza desiderata, dimostrando (iii).

Dall'uguaglianza del punto (iii), l'applicazione della formula delle dimensioni e l'identità ottenuta dal punto (iv) dell'*Esercizio 2* rispetto al prodotto $\tilde{\varphi}$ non degenerare, si ricavano le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim \pi(U) = \dim U - \dim(U \cap \text{Ker } \pi) = \dim U - \dim(U \cap V^\perp), \\ \dim \pi(U)^\perp = \dim V/V^\perp - \dim \pi(U) = \dim V - \dim V^\perp - \dim \pi(U), \\ \dim U^\perp = \dim \pi(U)^\perp + \dim \text{Ker } \pi = \dim \pi(U)^\perp + \dim V^\perp, \end{cases}$$

dalle quali si ricava la seguente identità:

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim V^\perp - (\dim U - \dim(U \cap V^\perp)) + \dim V^\perp,$$

da cui si ricava che $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$, dimostrando (iv). \square

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale dotato del prodotto φ . Si dimostri allora che $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$.

Soluzione. Sia $\underline{v} = \underline{w}' + \underline{v}' \in W + V^\perp$, con $\underline{w}' \in W$ e $\underline{v}' \in V^\perp$. Sia inoltre $\underline{w} \in W^\perp$. Allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}' + \underline{v}', \underline{w}) = \varphi(\underline{w}', \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w}) = 0$, dove si è usato che $\underline{w}' \perp \underline{w}$ dacché $\underline{w} \in W^\perp$ e $\underline{w}' \in W$ e che $\underline{v}' \in V^\perp$. Allora vale l'inclusione $W + V^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Applicando le rispettive formule delle dimensioni a W^\perp , $(W^\perp)^\perp$ e $W + V^\perp$ si ottengono le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp) - \dim W, \\ \dim (W^\perp)^\perp = \dim V + \dim(W^\perp \cap V^\perp) - \dim W^\perp, \\ \dim(W + V^\perp) = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp), \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$\dim (W^\perp)^\perp = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp) = \dim(W + V^\perp).$$

Dal momento che vale un'inclusione e l'uguaglianza dimensionale, si conclude che $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$, da cui la tesi. \square

Esercizio 5. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ anti-hermitiana (i.e. $A = -A^*$). Si dimostri allora che A è normale e che ammette solo autovalori immaginari.

Soluzione. Si mostra facilmente che A è normale. Infatti $AA^* = A(-A) = -A^2 = (-A)A = A^*A$. Sia allora $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A e sia $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in V_\lambda$. Si consideri il prodotto hermitiano standard φ su \mathbb{C}^n . Allora vale la seguente identità:

$$\begin{aligned}\lambda \varphi(\underline{v}, \underline{v}) &= \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, A\underline{v}) = \varphi(A^* \underline{v}, \underline{v}) = \\ &= \varphi(-A\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(-\lambda \underline{v}, \underline{v}) = -\bar{\lambda} \varphi(\underline{v}, \underline{v}).\end{aligned}$$

Dacché φ è definito positivo, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0 \implies \lambda = -\bar{\lambda}$. Allora $\Re(\lambda) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = 0$, e quindi λ è immaginario, da cui la tesi. \square