Ranghi e sistemi lineari

Si ha in particolare che:

$$\dim \ker f_A = n - rg(A)$$

Inoltre, data una base T di $\ker f_A$ e una sol. particolare $\underline{v}$ di $A\underline{x} = \underline{b}$, ogni sol. è della forma $\underline{v} + \alpha_1 \underline{t_1} + \dots + \alpha_n \underline{t_n}$.

Metodo di eliminazione di Gauss

Si prova a ridurre un sistema a un sistema più facile da risolvere. Si impiegano le seguenti operazioni:

(i) scambio di righe $\tilde{A}_i \leftrightarrow \tilde{A}_j$

(ii) moltiplicazione di una riga per uno scalare non nulla: $\tilde{A}_i \longrightarrow \alpha \tilde{A}_i$, $\alpha \neq 0$

(iii) somma a una riga il multiplo di un'altra:
$\tilde{A}_i \longrightarrow \tilde{A}_i + \alpha \tilde{A}_j$

Prop. Le tre operazioni lasciano invariate le soluzioni.

(i) equivale a scambiare due eq. del sistema

(ii) equivale a moltiplicare per uno scalare un eq. del sistema

(iii)
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + \dots) = b_i + \lambda b_j \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases}$$

$\boxtimes$

Prop. 2 Le tre operazioni lasciano invariato lo Span delle righe.

(i) equivale a commutare due righe

(ii) $\mathrm{Span}(A_1, \dots, A_i, \dots, A_m) = \mathrm{Span}(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_m)$

(iii) $\mathrm{Span}(A_1, \dots, A_i, A_j, \dots) = \mathrm{Span}(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, A_j, \dots)$

$\boxtimes$

Algoritmo

$$A = \begin{bmatrix} a_{21} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

se $a_{11} \neq 0$: $\quad \frac{1}{k} = k^{-1}$

- $A_2 \to A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} A_1$
- $A_3 \to A_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} A_1$

...

Subito dopo otterrò una matrice del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & a_{22}' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

se $a_{22}' \neq 0$, ripeto l'algoritmo con la colonna successiva.

Se $a = 0$, scambio la riga con una riga con primo termine non nullo; qualora non esistesse, passo alla porzione successiva della matrice.

Infine otterrò una matrice del tipo:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & p_i & \cdots \\ & & & & & & 0 & \end{bmatrix}$$

la matrice è detta "a scala", e gli scalari colorati sono detti PIVOT.

OSS. le colonne contenenti pivot sono lin. ind.

Corollario Detto k il numero di pivot di S, si ha che $rg(S) = k$.

Infatti le colonne dei pivot sono lin. ind. e sono base per le colonne con $m-k$ zeri finali.

Corollario $rg(A) = rg(S)$

Sia Π l'insieme delle soluzioni:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \dim \Pi = n - rg(A) \\ \bullet\ \dim \Pi = n - rg(S) \end{array}\right\} \Longrightarrow rg(A) = rg(S)$$

$\boxtimes$

Teorema Detto $\widetilde{rg}(A)$ il rango delle righe (ossia $rg(A^T)$), allora $rg(A) = \widetilde{rg}(A) = rg(A^T)$.

Equivalentemente $\widetilde{rg}(S)$ è pari a quanti pivot ci sono, quindi $rg(S) = \widetilde{rg}(S)$.
Poiché $\mathrm{Span}(A_1, \dots, A_m) = \mathrm{Span}(S_1, \dots, S_m)$, si ottiene che $\widetilde{rg}(A) = rg(S) = rg(A)$.

$\boxtimes$

Corollario Per una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, il suo rango e' sempre compreso tra 0 (matrice nulla) e $\min\{m, n\}$.

es. Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad \tilde{A} = [A \,\vdots\, \underline{b}]$

- Si riduce a scala $\tilde{A} \rightsquigarrow \tilde{S} = [S \,\vdots\, \underline{C}]$

$$\tilde{S} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \cdots & p_0 & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_1 & & & \vdots \\ \cdots & & & p_2 & & \vdots \\ \cdots & & & \cdots & p_k & c_k \\ \cdots & & & & \cdots & c_{k+1} \\ & & & & & \vdots \end{array}\right]$$

- per Rouché-Capelli, e' risolubile $\Longleftrightarrow c_{k+1} = 0$ (ossia se i ranghi sono uguali).