Classificazione di funzioni

Def. Data $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f è CRESCENTE se $x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$.

Def. Data $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f è STRET. CRESC. se $x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.

Def. Data $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f è DECRESCENTE se $x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$.

Def. Data $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f è STRET. DECR. se $x_1 < x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema Data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, allora:

(i) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow$ crescente

(ii) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow$ strett. crescente (NON $\Leftarrow$, vd x^3)

(iii) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow$ decrescente

(iv) $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow$ strett. decrescente (NON $\Leftarrow$, vd. $-x^3$)

Oss. f è strett. crescente $\iff f' \geq 0 \wedge \{x \mid f'(x) = 0\}$ non contiene intervalli.

Oss. f è strett. decrescente $\iff f' \leq 0 \wedge \{x \mid f'(x) = 0\}$ non contiene intervalli.

Oss. E' essenziale che f sia definita su un intervallo (vd. altrimenti $-\frac{1}{x}$).

Dimostrazione

- f crescente $\Rightarrow f' \geq 0$

$\forall x_1 < x_2 \in I, \quad f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x_2 - x_1 \to 0^+} \frac{f(x_2) - f(x_1) \geq 0}{x_2 - x_1 > 0}}_{f'(x_1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'_+(x_1) \geq 0$ (se esiste)

Analogamente $f'_-(x_1) \geq 0$ (se esiste).

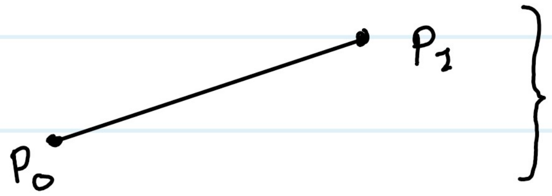
Pertanto $f'(x_1) \geq 0$.

- f decrescente $\iff -f$ crescente
  - $\forall\, x_1 < x_2 \in I,\ f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow$
    $\Rightarrow -f(x_1) \leq -f(x_2)$ ($-f$ crescente)
  - f decrescente $\iff -f$ crescente $\Rightarrow$
    $\Rightarrow -f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ $\boxtimes$

Funzioni convesse e concave

Def. $C \subset \mathbb{R}^d$ è **CONVESSO** se $\forall\, P_0, P_1 \in C$, il segmento $[P_0, P_1]$ di estremi P_0, P_1 è contenuto in C.

$$[P_0, P_1] = \{ (1-\lambda) P_0 + \lambda P_1 \mid \lambda \in [0,1] \}$$



$[P_0, P_1]$

OSS. $\lambda = \frac{1}{2}$ restituisce il punto medio

Def. $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) si dice **CONVESSA** se il sopragrafico $C = \{ (x,y) \mid y \geq f(x) \land x \in I \}$ è convesso.

Def. $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) si dice **CONCAVA** se il soltografico $C = \{(x,y) \mid y \leq f(x) \wedge x \in I\}$ è convesso.

Oss. l'unica classe di funzioni sia concave che convesse è quella delle rette ($f''(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = ax + b$).

Oss Sono fatti equivalenti, data $f : I \to \mathbb{R}$:

(i) f convessa.

(ii) dati $P_0, P_1 \in Gr(f)$, $[P_0, P_1]$ sta sopra il grafico.

(iii) $\forall x_0, x_1 \in I$, $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq$
$\leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$ (disuguagl. di Jensen)

Oss Sono fatti equivalenti, data $f : I \to \mathbb{R}$:

(i) f concava

(ii) dati $P_0, P_1 \in Gr(f)$, $[P_0, P_1]$ sta sotto il grafico.

(iii) $\forall x_0, x_1 \in I$, $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \geq$
$\geq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$ (disuguagl. di Jensen)

Dimostrazione

(i) $\Rightarrow$ (ii): $P_0, P_1 \in Gr(f) \subset C \Rightarrow [P_0, P_1] \subset C$ (per def. di C convesso) $\boxtimes$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): presi $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1) \subset C$, allora le loro proiezioni $P_0' = (x_0, f(x_0))$, $P_1' = (x_1, f(x_1)) \in Gr(f)$. Dunque $[P_0', P_1'] \subset \subset C$. Preso $P_\lambda' = (1-\lambda) P_0' + \lambda P_1'$, basta verificare che $P_\lambda = (1-\lambda) P_0 + \lambda P_1$ ($\lambda \in [0,1]$) sia nel sopragrafico, ossia verificare che $P_{\lambda_y} \geq P_{\lambda_{y'}}$. $\underbrace{(1-\lambda) y_0 + \lambda y_1}_{P_{\lambda_y}} \geq [(1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)]_{P'_{\lambda_y}} \Longrightarrow P_{\lambda_y} \geq P_{\lambda_y}'$. $\boxtimes$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): $\forall x_0, x_1 \in I$, $[x_0, x_1] \subset C \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq$

$\leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$ (sono una la trascrizione dell'altra). $\boxtimes$

Teorema Data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte, allora:

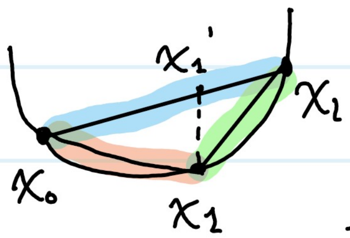
(i) $f'' \geq 0 \iff f'$ crescente $\iff f$ convessa.

(ii) $f'' \leq 0 \iff f'$ decrescente $\iff f$ concava

Si dice che una funzione è strettamente convessa se $\forall x_0, x_1 \in I$, $\lambda \in (0,1)$, $f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) < (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$.

Lemma Data $f: I \to \mathbb{R}$ convessa, dati $x_0 < x_1 < x_2$ allora

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



$\exists \lambda \in [0,1] \mid x_1 = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_2 \Rightarrow x_1 - x_0 = \lambda(x_2 - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$$

$f(x_1) = f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \leq \lambda (f(x_2) - f(x_0)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_0} \geq \frac{(1-\lambda)(f(x_2) - f(x_0))}{x_2 - x_0} \geq$$

$$\geq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$\boxtimes$

Dimostrazione (wlog f convessa)

Siamo $x_0 < x_2 \in I$ e dimostro $f'(x_0) \leq f'(x_2)$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2-h)}{h}$$

$$\Updownarrow \; h \to 0$$

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq f'(x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$f' \text{ crescente} \longleftrightarrow f'' \geq 0 \qquad \boxtimes$$