I polinomi di Taylor

25 October 2022 08:26

Def. Date $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$, si dice che f è "O grande" di g per $x \to x_0$ ($f(x) = O(g(x))$) se $\exists \delta > 0\ \exists m > 0 \mid$
$| \ |x - x_0| \leq \delta \wedge x \in X \setminus \{x_0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| \leq m |g(x)|$.

Analogamente si definisce $f(x) = O(g(x))$ per $x \to \pm\infty$ (e.g. per $x \to +\infty$ $\exists M > 0\ \exists m > 0 \mid$
$| \ \forall x \geq M,\ |f(x)| \leq m |g(x)|$).

Oss. Se $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = O(g(x))$

Oss 2. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) = O(g(x))_{x \to x_0}$

es.
- $-3x^2 + \log(x) = O(x^2)$ per $x \to +\infty$
- $3\log(x) + \log(\log(x)) = O(\log(x))$ per $x \to +\infty$
- $\sin(x) = O(x)$ per $x \to 0$
- $3\sin(x) = O(1)$ per $x \to +\infty$ (infatti $\forall x,\ |3\sin(x)| \leq 3$).

Teorema se esiste $L := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$,

$$\underset{(1)}{f(x) = O(g(x))} \Longleftrightarrow \underset{(2)}{L \text{ è finito}}$$

Dimostrazione

$(1) \Rightarrow (2)$

$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow \exists \delta, m > 0 \mid |f(x)| \leq$
$\leq m|g(x)| \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq m \Rightarrow$

$$\Rightarrow -m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq m \xrightarrow[\text{per il confronto}]{\text{se esiste,}} L \text{ è finito.}$$

$(1) \Rightarrow (2)$

$$f(x) = O(g(x)) \Longrightarrow \exists \delta, m > 0 \mid |f(x)| \leq m|g(x)| \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq m \rightarrow$$

$$\Longrightarrow -m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq m \xRightarrow[\text{per il confronto}]{\text{se esiste,}} L \text{ è finito.}$$

$(2) \Rightarrow (1)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ finito} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - L \leq \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -|L| - \varepsilon \leq L - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \leq |L| + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq |L| + \varepsilon \Longrightarrow |f(x)| \leq (|L| + \varepsilon)|g(x)|.$$

Quindi $f(x) = O(g(x))$.

Def. Data $f: X \to \mathbb{R}$ e data $k \in \mathbb{N}^+$,

$$D^k f(x) = f^{(k)}(x) = \underbrace{D(D(D(\cdots}_{k \text{ volte}} f(x)))) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

$$D^0 f(x) := f(x)$$

Def. II Il polinomio di Taylor su $f(x)$ e x_0

$$p(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \text{; in particolare}$$

Se $x_0 = 0$:

$$p(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

(se $f^{(i)}(0)$ esiste $\forall i \in \mathbb{N}$)

Serie di MacLaurin

Def. III Se f è derivabile d volte, ($f^0(x)$ esclusa)

$$P_d(x) := \sum_{i=0}^{d} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Def. IV Si definisce resto di Taylor

$$R_d(x) := f(x) - P_d(x)$$

TEOREMA

(i) se esiste $\delta > 0 \mid f$ derivabile d volte in $[-\delta, \delta]$, allora $R_d(x) = o(x^d)$ per $x \to 0$

es. $P_3 [e^x]_{x_0=0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + \dots}_{o(x^3)}$ $(*)$

(ii) se derivabile $d+1$, $R_d(x) = O(x^{d+1})$ per $x \to 0$, $\frac{R_d(x)}{x^{d+1}} \to \frac{D^{d+1} f(0)}{(d+1)!}$

es. $(*) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + \dots}_{O(x^4)}$

Prop. Dato P polinomio di grado $\leq d$ t.c.

$$R(x) = f(x) - P(x) = o(x^d) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow P = P_d$$

Dimostrazione

<u>Lemma</u> $D^k P_d(0) = D^k f(0)$ per $k \in \mathbb{N}$

<u>Dim.</u> $\underbrace{D^0 P_d(0)}_{f(0)} = \underbrace{D^0 f(0)}_{f(0)}$ ✓ [passo base]

- ipotizzandola vera $\forall\, i \leq k-1$, e

che $D^{k-1} f(x) = f^{(k-1)}(0) + f^{(k)}(0)x + \dots$

$$D^k f(x) = f^{(k)}(x) + \dots$$

$$D^k f(0) = f^{(k)}(0) \checkmark$$

$\square$

(i) $R_d(x) = o(x^d)$ <u>TESI</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_d(x)}{x^d} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_d(x)}{x^d} = (\text{de l'Hôpital})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - P_d'(x)}{d\, x^{d-1}} = \dots\dots = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(d)}(x) - P_d^{(d)}(x)}{d!} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(d)}(x) - P_d^{(d)}(x)}{d!} \underbrace{=}_{*} \frac{f^{(d)}(0) - f^{(d)}(0)}{d!} =$$

$$= 0$$

$*$ per il <u>Lemma</u>

L'Hôpital applicabile perché $x^h \to 0$, così come $f^{(h)}(x) - P_d^{(h)}(x) \to 0$ (per il <u>Lemma</u>). $\square$

(ii) $R_d(x) = O(x^{d+1})$ <u>TESI</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_d(x)}{x^{d+1}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f^{(d)}(x) - P_d^{(d)}(x)}{d!\, x} =$$

$$\lim \quad f^{(d+1)}(x) \qquad f^{(d+1)}(0)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(d+1)}(x)}{(d+1)!} = \frac{f^{(d+1)}(0)}{(d+1)!} \qquad \square$$

Lemma Sia Q polinomio di grado $\le d$.
Se $Q(x) = o(x^d)$ per $x\to 0$, allora $Q(x) \equiv 0$

Dim. Sia $Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$
Sia k il più piccolo intero $k \mid a_k \neq 0$,
allora $\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{x^d} = \frac{a_k x^k}{d} = a_k \frac{1}{x^{d-k}} =$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } (a_k > 0 \wedge d-k \text{ dispari}) \vee (d-k \text{ pari}) \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \wedge d-k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } a_k = 0 \end{cases}$$

Ma $Q(x) = o(x^d) \implies a_k = 0$; assurdo. $\square$

$P(x) - P_d(x) = (f(x) - P_d(x)) - (P($

Calcolo degli sviluppi

(i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^d}{d!} + O(x^{d+1})$

Dim. $[e^x]^{(n)}(0) = 1 \implies a_n = \frac{1}{n!}$ ✓

(ii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^d \frac{x^{2d+1}}{(2d+1)!} + O(x^{2d+3})$ gli elementi sono del tipo αx^{2n+1}

(iii) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^d \frac{x^{2d}}{(2d)!} + o(x^{2d+2})$ } gli elem. sono del tipo αx^{2n}

(iv) $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \dots =$

$(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) =$

$(iv)\quad e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} \dots$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) =$$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

<u>Dim. (2)</u>

$$\begin{tikzcd} \sin(x) \arrow[r, "D"] & \cos(x) \arrow[d, "D"] \\ -\cos(x) \arrow[u, "D"] & -\sin(x) \arrow[l, "D"] \end{tikzcd}$$

per x^{4k}: $a_{4k} = \frac{\sin(0)}{(4k)!} = 0$

per x^{4k+1}: $a_{4k+1} = \frac{\cos(0)}{(4k+1)!} = \frac{1}{(4k+1)!}$

per x^{4k+2}: $a_{4k+2} = \dots = 0$

per x^{4k+3}: $a_{4k+3} = \frac{-\cos(0)}{(4k+3)!} = -\frac{1}{(4k+3)!}$

Quindi per x^{2d}, $a_{2d} = 0$, e per x^{2d+1}, $a_{2d+1} =$

$= (-1)^d \frac{1}{(2d+1)!}$.

(V) $[P_d(f)]' = P_{d-1}(f')$

(vi) • Ogni funzione pari ha derivata dispari e viceversa

• f dispari $\Rightarrow f(0) = 0$ $\quad (f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0)$

• Quindi una funzione pari ha funzioni dispari in derivate di ordine dispari (i.e. $f^{(2n+1)}(0) = 0$)

• Una funzione dispari ha funzioni dispari in derivate di ordine pari (i.e. $f^{(2n)}(0) = 0$)

$\Downarrow$

quindi • f pari $\rightarrow a_{2n+1} = 0$ (in Taylor) <u>es.</u> $\cos(x)$

• f dispari $\Rightarrow a_{2n} = 0$ (in Taylor) <u>es.</u> $\sin(x)$

(vii) $e^x = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}_{\text{SOMMA INFINITA}} \rightarrow e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

definisce anche le potenze di complessi

$(viii)\quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 \dots$

(viii) $[a \in \mathbb{R}]$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-d+1)}{d!}x^d + O(x^{d+1})$$

$$\binom{\overbrace{a}^{a \in \mathbb{R}}}{\underbrace{d}_{d \in \mathbb{N}}} := \frac{a(a-1)\cdots(a-d+1)}{d!} \quad \Big\} \text{ coeff. binomiale esteso}$$

<u>Dim.</u>

$$\left[(1+x)^a\right]' = a(1+x)^{a-1}$$

$$\left[(1+x)^a\right]^{(n)} = \binom{a}{n}(1+x)^{a-n}$$

(ix) $\displaystyle \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + O(x^{d+1}) \quad |x|<1$

$$\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{(1+x)^{-1}} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots = 1 - x + x^2 - \dots + O(x^{d+1})$$

(x) $\displaystyle \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \underbrace{O(x^{d+1})}_{\Leftarrow\, o(x^d)} \quad |x|<1$

è il polinomio di Taylor

(xi) $\displaystyle \ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + O(x^{d+1})$

Tuttavia shiftato a destra rispetto a $\dfrac{1}{1+x}$

(xii) la serie di Taylor di un polinomio è il polinomio stesso