Rapporto tra matrici e app. lineari

03 November 2022 13:48

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è un ANELLO con identità molt.:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ & & 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo pensare alla moltiplicazione di $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ con un vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ come vettore di $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

Questo dà un' APPLICAZIONE LINEARE $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$: $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$

- $f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
- $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$

OSS. Notiamo che $A\underline{x}$ lo si può scrivere come $A\underline{x} = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n =$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

ossia $A\underline{x}$ è comb. lin. di $A_1, A_2, \dots, A_n$.

OSS. 2 Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots = b_1 \\ \cdots\cdots = \cdots \\ \cdots\cdots = \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots = b_m \end{cases} \longleftrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}^{B}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\underline{x} = B$$

es. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ } ossia tutti i vettori colonna sono lin. dip.

OSS. 3 un sistema lineare omogeneo ha sempre sol. $(x_1 = \cdots = 0)$

Def. Data $f: V \to W$ lineare, si definisce **NUCLEO** di f come
$$\operatorname{Ker} f = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0} \}$$ e
IMMAGINE di f come
$$\operatorname{Imm} f = \{ \underline{w} \in W \mid \exists \, \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{w} \}$$

Prop. $\operatorname{Ker} f$ e' un sottospazio di V e
$\operatorname{Imm} f$ e' un sottospazio di W.

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ ha
$$\operatorname{Ker} f = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \}.$$

OSS. Le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$ sono quindi gli elementi di $\operatorname{Ker} A$, e sono dunque sottospazio di $\mathbb{K}^n$ (n num. di righe di $\underline{x}$).

OSS. 2 $\operatorname{Imm} f = \{ y \in \mathbb{K}^n \mid \exists \, x \in \mathbb{K}^n \text{ con } y =$
$= A\underline{x} = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \} =$
$= \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n).$

Quindi il sistema $A\underline{x} = B$ e' risolubile $\iff$
$\iff B \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n).$

OSS. 3 $f^{-1}(\underline{0}) = \operatorname{Ker} f$
$f^{-1}(\underline{w})$ potrebbe anche essere vuoto.
In generale, pero', $f^{-1}(\underline{w}) = \operatorname{Ker} f + \underline{v} \mid$
$f(\underline{v}) = \underline{w}$.

Dimostrazione

Dati $\underline{v}, \underline{v}' \mid f(\underline{v}) = f(\underline{v}') = w$,
allora $f(\underline{v} - \underline{v}') = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \underline{v}' \in \operatorname{Ker} f \to$
$\Rightarrow \underline{v}' = \underline{v} + \underline{u} \mid \underline{u} \in \operatorname{Ker} f$.
Inoltre $f(\underline{v} + \underline{u}) = f(\underline{v}) + \underbrace{f(\underline{u})}_{\underline{0}} = \underline{w}$.

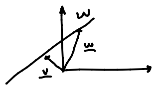
$\Rightarrow \underline{v}' = \underline{v} + \underline{u} \mid \underline{u} \in \ker f$.

Inoltre $f(\underline{v} + \underline{u}) = f(\underline{v}) + \underbrace{f(\underline{u})}_{\underline{0}} = \underline{w}$.

Def. L'insieme $\underline{v} + W$ si dice SOTTOSPAZIO AFFINE.

OSS. Dato $\underline{w} \in \underline{v} + W$, $\underline{w} + W = \underline{v} + W$

Infatti $\underline{w} + \underbrace{\underline{u}}_{\in W} = \underline{v} + k\underline{u} \in \underline{v} + W$ e viceversa.



Def. Si definisce RANGO come:

$rg(A) = rk(A) = rank(A) :$

$= \dim \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) =$

$= \dim \operatorname{Imm} f_A$.

Teorema (formula delle dimensione)

Data $f : V \to W$ lineare, allora

$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Imm} f)$.

Dimostrazione

Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ base di $\ker f$, lo estendiamo a base di V: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$.

Siano $\underline{w}_{k+1} = f(\underline{v}_{k+1}), \dots, \underline{w}_n = f(\underline{v}_n)$.

Si dimostra che $\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n$ è base di $\operatorname{Imm} f$.

Sono lin. ind.:

- $\alpha_1 \underline{w}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{w}_n = \underline{0}$

$$\Updownarrow$$

$$f(\alpha_1 \underline{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = \underline{0}$$

$$\Updownarrow$$

$\alpha_1 \underline{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in \ker f$,

ma se $\alpha_i \neq 0$ $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ sarebbe lin. dip. e quindi non base. Allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Generano:

Generano:

- $\underline{w} = f(\underline{v}) \quad \forall\, \underline{w} \in \operatorname{Im} f \longrightarrow$

$\longrightarrow \underline{w} = f(\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}) =$

$= \alpha_1 \underline{w_{k+1}} + \alpha_2 \underline{w_{k+2}} + \dots + \alpha_n \underline{w_n}$

Quindi $\underline{w_{k+1}}, \dots, \underline{w_n}$ è base. Allora

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$ $\boxtimes$

Corollario

$rg(A) = \dim V - \dim \ker f.$

Teorema di Rouché-Capelli

$A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\longleftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A})$

dove $\tilde{A} = [A \mid \underline{b}]$, detta matrice completa

(analogamente A è detta matrice incompleta).

Dimostrazione

Segue dal fatto che $A\underline{x} = \underline{b}$ è

risolubile $\longleftrightarrow \underline{b} \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b}) = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \dim \operatorname{Span}(A^1, \dots, \underline{b}) = \dim \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow rg(\tilde{A}) = rg(A).$

$\boxtimes$