Somma diretta

24 October 2022 21:56

Si dice che due sottospazi V e W sono in somma diretta se

$V \cap W = \{\underline{0}\}$.

In tal caso si dice che $Z = V + W$ è $Z = V \oplus W$

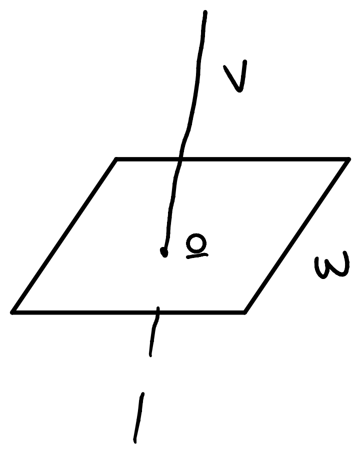

Fig. 1: W piano e V retta sono in somma diretta (in particolare $V \oplus W = \mathbb{R}^3$). Infatti $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \underbrace{\dim(W)}_{2} + \underbrace{\dim(V)}_{1}$

Dimensione della somma diretta

$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$

Dimostrazione:

Prendo una base per V e W:

- $B_V = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$, dove $n = \dim(V)$
- $B_W = \{\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}\}$, dove $m = \dim(W)$

E' necessario verificare che $B_V \cup B_W$ è una base di $V \oplus W$.

- $\forall\, \underline{u} \in V \oplus W$, $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w} =$
  $= (\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots) +$
  $+ (\beta_1 \underline{w_1} + \beta_2 \underline{w_2} + \dots)$, quindi
  $B_V \cup B_W$ è generatore.

- $\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots + \beta_1 \underline{w_1} + \beta_2 \underline{w_2} = \underline{0} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots = -\beta_1 \underline{w_1} - \beta_2 \underline{w_2} - \dots$
  Quindi $\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots \in W$, ma appartenendo pure a V, appartiene anche a $V \cap W$.
  Poiché $V \cap W = \{\underline{0}\}$, $\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots = \underline{0}$; e poiché B_V è base (i.e. lin. ind.), $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$.
  Allora anche $\beta_1 \underline{w_1} + \beta_2 \underline{w_2} + \dots = \underline{0}$, analogamente $\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$.

Quindi, dovendo essere tutti i coefficienti nulli, $B_V \cup B_W$ è lin. ind.

Poiché $B_V \cup B_W$ è base, $\dim(V \oplus W) =$
$= \text{card}(B_V \cup B_W) = n + m = \dim V +$
$+ \dim W$. $\blacksquare$

Formula di Grassmann

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

Dimostrazione:

Si prendono delle basi di $V \cap W$, V e W:

- $B = \{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \dots, \underline{u_n}\}$, con $n = \dim(V \cap W)$
- (per l'algoritmo dello scambio) $B_V = \{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \dots, \underline{u_n}, \underline{v_{n+1}}, \dots, \underline{v_m}\}$, con $m = \dim(V)$
- (idem) $B_W = \{\underline{u_1}, \dots, \underline{w_{n+1}}, \dots, \underline{w_p}\}$, con $p = \dim W$

Si osservi che $\text{card}(B_V \cup B_W) =$
$= m + p - n$.

E' sufficiente dimostrare che $B_V \cup B_W$ è base di $V+W$:

- $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w} = (\alpha_1 \underline{u_1} + \dots + \alpha_m \underline{v_m}) +$
  $+ (\beta_1 \underline{u_1} + \dots + \beta_p \underline{w_p})$,
  $\forall \underline{u} \in V+W$; quindi $B_V \cup B_W$ è generatore.
- $\alpha_1 \underline{u_1} + \dots + \alpha_m \underline{v_m} + \dots + \alpha_{m+p-n} \underline{w_p} = \underline{0} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha_1 \underline{u_1} + \dots + \alpha_m \underline{v_m} = -\alpha_m \underline{w_1} - \dots$.

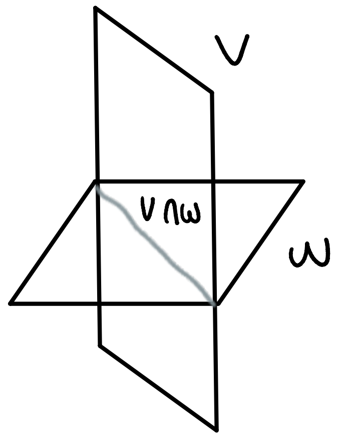

Fig. 2 $V + W = \mathbb{R}^3$, ma non sono in somma diretta (infatti $V \cap W$ è un'intera retta).
Tuttavia $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 =$
$= \underbrace{\dim(V)}_{2} + \underbrace{\dim(W)}_{2} - \underbrace{\dim(V \cap W)}_{1}$

$\ldots \alpha_2 \underline{v_2} \ldots \alpha_m \underline{v_m} \ldots \alpha_{m+p-n} \ldots$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 \underline{u_1} + \cdots + \alpha_m \underline{v_m}}_{\in V} = \underbrace{-\alpha_m \underline{w_1} - \cdots}_{\in W}.$$

Quindi: $\alpha_1 \underline{u_1} + \cdots + \alpha_m \underline{v_m} \in V \cap W$, pertanto i coefficienti di $\underline{v_i}$ sono nulli (infatti nessun $\underline{v_i}$ è generato da B, altrimenti B_V, che è base, NON sarebbe lin. ind.).

Pertanto rimane $\alpha_1 \underline{u_1} + \cdots + \alpha_{m+p-n} \underline{w_p} = \underline{0}$, con coeff. in soli $\underline{u_i}$ e $\underline{w_i}$: dal momento che B_W è base (i.e. è lin. ind.), ogni $\alpha_i = 0$. Perciò $B_V \cup B_W$ è lin. ind.

Dunque $B_V \cup B_W$ è base. Allora $\dim(V+W) =$

$= \text{card}(B_V \cup B_W) = m+p-n =$

$= \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.

$\boxtimes$