

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

28 aprile 2023

Indipendenza e applicazioni affini

Fissato un origine O dello spazio affine, si possono sempre considerare due bigezioni:

- La bigezione $i_O : E \rightarrow V$ tale che $i(P) = P - O \in V$,
- La bigezione $j_O : V \rightarrow E$ tale che $j(\underline{v}) = O + \underline{v} \in E$.

Si osserva inoltre che i_O e j_O sono l'una la funzione inversa dell'altra. Dato uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} di dimensione n , si può considerare V stesso come uno spazio affine, denotato con le usuali operazioni:

- (a) $\underline{v} + \underline{w}$, dove $\underline{v} \in V$ è inteso come *punto* di V e $\underline{w} \in W$ come il vettore che viene applicato su \underline{w} , coincide con la somma tra \underline{v} e \underline{w} (e analogamente $\underline{w} - \underline{v}$ è esattamente $\underline{w} - \underline{v}$).
- (b) Le bigezioni considerate inizialmente sono in particolare due mappe tali che $i_{\underline{v}_0}(\underline{v}) = \underline{v} - \underline{v}_0$ e che $j_{\underline{v}_0}(\underline{v}) = \underline{v}_0 + \underline{v}$.

Definizione (spazio affine standard). Si denota con $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ lo **spazio affine standard** costruito sullo spazio vettoriale \mathbb{K}^n . Analogamente si indica con A_V lo spazio affine costruito su uno spazio vettoriale V .

Osservazione.

► Una combinazione affine di A_V è in particolare una combinazione lineare di V . Infatti, se $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora, fissato $\underline{v}_0 \in V$, $\underline{v} = \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i - v_0) = \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i - \underline{v}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

► Come vi è una bigezione data dal passaggio alle coordinate da V a \mathbb{K}^n , scelta una base \mathcal{B} di V e un punto O di E , vi è anche una bigezione $\varphi_{O,\mathcal{B}}$ da E a $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ data dalla seguente costruzione:

$$\varphi_{O,\mathcal{B}}(P) = [P - O]_{\mathcal{B}}.$$

Proposizione. Sia $D \subseteq E$. Allora D è un sottospazio affine di $E \iff$ fissato $P_0 \in D$, l'insieme $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in D_0$. Allora, per definizione, esistono $P_1, \dots, P_k \in D$ tali che $\underline{v}_i = P_i - P_0 \forall 1 \leq i \leq k$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Sia inoltre $P = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i \in E$. Sia infine $O \in D$. Allora $P = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O + O - P_0) = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_0 - O) = O + (1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i)(P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O)$. In particolare P è una combinazione affine di $P_1, \dots, P_k \in D$, e quindi, per ipotesi, appartiene a D . Allora $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i \in D_0$. Poiché allora D_0 è chiuso per combinazioni lineari, D_0 è un sottospazio vettoriale di V .

(\impliedby) Sia $P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, con $P_1, \dots, P_k \in D$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Allora $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) \in D_0$ per ipotesi, essendo combinazione lineare di elementi di D_0 . Pertanto, poiché esiste un solo punto P' tale che $P' = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$, affinché $\sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$ appartenga a D_0 , deve valere anche che $P \in D$. Si conclude quindi che D è un sottospazio affine, essendo chiuso per combinazioni affini. \square

Osservazione. Sia D un sottospazio affine di E .

► Vale la seguente identità $D_0 = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$. Sia infatti $A = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$. Chiaramente $D_0 \subseteq A$. Inoltre, se $P - Q \in A$, $P - Q = (P - P_0) - (Q - P_0)$. Pertanto, essendo $P - Q$ combinazione lineare di elementi di D_0 , ed essendo D_0 spazio vettoriale per la proposizione precedente, $P - Q \in D_0 \implies A \subseteq D_0$, da cui si conclude che $D_0 = A$.

► Pertanto D_0 è unico, a prescindere dalla scelta di $P_0 \in D$.

► Vale che $D = P_0 + D_0$, ossia D è il traslato di D_0 mediante il punto P_0 .

Definizione (direzione di un sottospazio affine). Si definisce D_0 come la **direzione** del sottospazio affine D .

Definizione (dimensione un sottospazio affine). Dato D sottospazio affine di E , si dice **dimensione** di D , indicata con $\dim D$, la dimensione della sua direzione D_0 , ossia $\dim D_0$. In particolare $\dim E = \dim V$.

Definizione (sottospazi affini paralleli). Due sottospazi affini si dicono **paralleli** se condividono la stessa direzione.

Osservazione.

- ▶ I sottospazi affini di dimensione zero sono tutti i punti di E .
- ▶ I sottospazi affini di dimensione uno sono le *rette affini*, mentre quelli di dimensione due sono i *piani affini*.
- ▶ Si dice *iperpiano affine* un sottospazio affine di codimensione 1, ossia di dimensione $n - 1$.

Definizione (punti affinementemente indipendenti). I punti $P_1, \dots, P_n \in E$ si dicono affinementemente indipendenti se l'espressione $P = \sum \lambda_i P_i$ con $\sum \lambda_i = 1$ è unica $\forall P \in \text{Aff}(P_1, \dots, P_n)$. Analogamente un sottoinsieme $S \subseteq E$ si dice affinementemente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.

Proposizione. P_1, \dots, P_n sono affinementemente indipendenti $\iff \forall i = 1, \dots, k$ i vettori $P_j - P_i$ con $j \neq i$ sono linearmente indipendenti $\iff \exists i = 1, \dots, k$ i vettori $P_j - P_i$ con $j \neq i$ sono linearmente indipendenti $\forall i P_i \notin \text{Aff}\{P_1, \dots, P_n\}$ con P_i escluso.

Dimostrazione. □

Osservazione.

- ▶ Il numero massimo di punti affinementemente indipendenti in E è $\dim E + 1$.

- ▶ Se $E = A_n(\mathbb{K})$ e $V = \mathbb{K}^n$. Allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in E$ sono aff. indep. \iff i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ immersi in \mathbb{K}^{n+1} aggiungendo una coordinata 1 in fondo sono linearmente indipendenti.

Osservazione. Sia E spazio affine con V di dimensione n . Si scelgano $n + 1$ punti affinementemente indipendenti P_0, \dots, P_n . Allora $\text{Aff}(P_0, \dots, P_n) = E$. Quindi $P \in E$ si scrive in modo unico come $P = \sum \lambda_i P_i$ con $\sum \lambda_i = 1$. Le λ_i si diranno allora le coordinate affini di P nel riferimento P_0, \dots, P_n .

Se si impone $\lambda_i \geq 0$, si definisce che la combinazione è una combinazione convessa. Si definisce baricentro il punto con $\lambda_i = \frac{1}{n}$.

Definizione (involuppo convesso). Si dice $\text{IC}(S)$ di un insieme $S \subseteq E$ l'insieme delle combinazioni convesse di S (finite).

Definizione. Sia E uno spazio affine su V , E' spazio affine su V' (sullo stesso \mathbb{K}) un'applicazione $f : E \rightarrow E'$ si dice app. affine se conserva le combinazioni affini ($f(\sum \lambda_i P_i) = \sum \lambda_i f(P_i)$, $\sum \lambda_i = 1$).

Teorema. Sia $f : E \rightarrow E'$ affine. Allora \exists unica app. lineare $g : V \rightarrow V'$ lineare tale che valga $f(O + \underline{v}) = f(O) + g(\underline{v})$, per ogni scelta di $O \in E$.

Dimostrazione. Sia $O \in E$. L'applicazione $g_O : V \rightarrow V'$ data da $g_O(\underline{v}) = f(O + \underline{v}) - f(O)$. Si dimostra che g_O è lineare. □