

# Il teorema di corrispondenza e catene di sottogruppi normali

di Gabriel Antonio Videtta

Si illustra adesso un teorema che mette in corrispondenza i sottogruppi di  $G/H$  con i sottogruppi di  $G$  che contengono  $H$ . Benché questo teorema possa sembrare a prima vista di poca utilità, in realtà svela alcune proprietà che hanno portato allo sviluppo della celebre teoria di Galois. Non solo, guardando anche nelle piccole applicazioni, il teorema di corrispondenza permette di contare molto facilmente i sottogruppi di  $G/H$ , nonché di dimostrare l'esistenza di una catena di  $p$ -sottogruppi normali contenente tutti gli ordini possibili per un  $p$ -gruppo.

**Teorema** (di corrispondenza). Sia  $H$  un sottogruppo normale di  $G$ . Allora la proiezione al quoziente  $\pi_H : G \rightarrow G/H$  induce una biezione tra l'insieme

$$X = \{K \leq G \mid H \subseteq K\}$$

dei sottogruppi di  $G$  che contengono  $H$  e l'insieme

$$Y = \{K' \leq G/H\}$$

dei sottogruppi di  $G/H$ . Tale biezione preserva la normalità di un gruppo e il suo indice, ossia:

- $K \trianglelefteq G \iff K' \trianglelefteq G/H$ ,
- $[G : K] = [G/H : K']$ ,

dove  $K \in X$  e  $K' \in Y$  sono in corrispondenza biunivoca mediante  $\pi_H$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha : X \rightarrow Y$  definita nel seguente modo:

$$K \xrightarrow{\alpha} \pi_H(K),$$

dove si osserva che  $\pi_H(K) = \{kH \mid k \in K\} = K/H \leq G/H$ . Si definisce analogamente  $\beta : Y \rightarrow X$  in modo tale che:

$$K' \xrightarrow{\beta} \pi_H^{-1}(K').$$

Le due mappe sono entrambe ben definite (infatti  $\pi_H^{-1}(K')$  è sempre un sottogruppo di  $G$  e contiene sempre  $H$ , dacché  $H \in K'$ , essendo l'identità di  $G/H$ ). È dunque sufficiente mostrare che vale  $\beta \circ \alpha = \text{Id}_X$  e che  $\alpha \circ \beta = \text{Id}_Y$ .

Siano quindi  $K \in X$  e  $K' \in Y$ . Chiaramente  $\pi_H(\pi_H^{-1}(K')) = K'$ , dal momento che  $\pi_H$  è surgettiva; dunque  $\alpha \circ \beta = \text{Id}_Y$ . Inoltre  $\pi_H^{-1}(\pi_H(K)) = \pi_H^{-1}(K/H) = \{g \in G \mid gH \in K/H\} = K^1$ , da cui  $\beta \circ \alpha = \text{Id}_X$ . Quindi  $X$  e  $Y$  sono in corrispondenza biunivoca tramite  $\alpha$  e  $\beta$ .

Rimane da dimostrare che  $\alpha$  e  $\beta$  preservano la normalità e l'indice di sottogruppo. Se  $K \trianglelefteq G$ , allora chiaramente  $K' = K/H \trianglelefteq G/H$  (infatti  $gHkHg^{-1}H = (gkg^{-1})H$ , dove  $gkg^{-1} \in K$  per ipotesi di normalità). Sia ora  $K' \trianglelefteq G/H$ . Allora, se  $k \in K$ ,  $gHkHg^{-1}H = (gkg^{-1})H$ , e per ipotesi di normalità deve esistere  $k' \in K$  tale per cui  $(gkg^{-1})H = k'H$ , e quindi deve esistere  $h \in H$  tale per cui  $gkg^{-1} = k'h$ . Dal momento che  $H \subseteq K$ ,  $gkg^{-1} \in K$ , e quindi  $K \trianglelefteq G$ .

Per mostrare che l'indice di sottogruppo si preserva si dimostra che esiste lo stesso numero di classi laterali in  $G/K$  e  $(G/H)/(K/H)$ . Pertanto è sufficiente mostrare che:

$$xK = yK \iff xH(K/H) = yH(K/H), \quad x, y \in G.$$

Infatti, in tal caso vi sarebbero esattamente  $[G : K]$  classi laterali in  $(G/H)/(K/H)$ . Si consideri ora la classe laterale  $xH(K/H)$ :

$$xH(K/H) = \{xHkH \mid k \in K\} = \{(xk)H \mid k \in K\},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è impiegata la normalità di  $H$  in  $G$  (altrimenti il prodotto non sarebbe ben definito). Analogamente  $yH(K/H) = \{(yk)H \mid k \in K\}$ . Quindi, se  $xH(K/H) = yH(K/H)$ , allora  $xH = (yk)H$ , con  $k \in K$ . Allora  $x = ykh$  con  $h \in H$ . Poiché  $H \subseteq K$ , si deduce quindi che  $xK = yK$ . Infine, se  $xK = yK$ , esiste  $k \in K$  tale per cui  $x = yk$ . Allora:

$$xH(K/H) = yHkH(K/H) = yH(K/H),$$

da cui la tesi. □

---

<sup>1</sup>Infatti se  $gH = kH$  con  $k \in K$ , esiste un  $h \in H$  tale per cui  $g = kh$ . Dal momento che  $H \subseteq K$ ,  $g$  è dunque un elemento di  $K$ .