Punti notevoli e serie di Taylor in punti generici

31 October 2022 14:09

Data $f: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ t.c. f derivabile d volte in $\bar{x}$,

$$P_d(f)_{\bar{x}} = \sum_{i=0}^{d} \frac{f^{(i)}(\bar{x})}{i!}(x-\bar{x})^i$$

Teorema di Taylor

$h = x - \bar{x}$

(i) Se f è derivabile d volte in $[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$, allora $R_d(h) = o(h^d)$

(ii) Se derivabile $d+1$ volte in (idem), allora $R_d(h) = O(h^{d+1})$

Massimo/minimo di un insieme $E \subset \mathbb{R}$

$\max E = e \iff \forall h \in E,\ e \geq h \wedge e \in E$

$\min E = e \iff \forall h \in E,\ e \leq h \wedge e \in E$

Estremo superiore/inferiore di $E \subset \mathbb{R}$

Dato E unione finita di intervalli disgiunti,
$E = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots$

$\sup E = \max \underbrace{B}_{\text{insieme dei } b_i}$ (se $\sup E \in E$, $\sup E = \max E$)

$\inf E = \min \underbrace{A}_{\text{insieme degli } a_i}$ (se $\inf E \in E$, $\inf E = \min E$)

Valore massimo/minimo di f

- $\max f := \max \mathrm{Imm}(f)$
- $\min f := \min \mathrm{Imm}(f)$

- $\sup f := \sup \mathrm{Imm}(f)$
- $\inf f := \inf \mathrm{Imm}(f)$

} su unione finita di intervalli

Punti di massimo/minimo

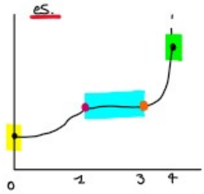
- x punto di massimo $\iff f(x) = \max f$
- y punto di minimo $\iff f(x) = \min f$

} globale o assoluti

- x punto di massimo locale $\iff$
$\iff \exists\, \delta > 0 \mid f(x) = \max f([x-\delta, x+\delta])$ } locale

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x \text{ punto di massimo locale } \Longleftrightarrow \\ \quad \Longleftrightarrow \exists\, \delta>0 \mid f(x)=\max f([x-\delta, x+\delta]) \\ \cdot\ \text{(idem) per il minimo locale} \end{array}\right\} \ \underline{\text{locale}}$$

es.



- 4 punto di massimo assoluto
- 0 punto di minimo assoluto
- 4 e $[1,3)$ massimi locali
- 0 e $(1,3]$ minimi locali

Ricerca dei valori massimi e minimi

Teorema di Weierstrass

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, essa ammette massimo e minimo.

Lemma

Data $f: X\to\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di massimo o di minimo locale interno a X (i.e. $\exists\,\delta>0 \mid [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]\in X$) tale che $f'(\bar{x})$ esista. Allora $f'(\bar{x})=0$.

Dimostrazione wlog $\bar{x}$ massimo

- $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})\,\}-}{h\,\}-} \geq 0$
- $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})\,\}-}{h\,\}+} \leq 0$

Poiché $L=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$ esiste,

$L\geq 0 \wedge L\leq 0 \Rightarrow L=0.$ ▨

Corollario

Data $f: X\to\mathbb{R}$, i punti di massimo e minimo sono contenuti in:

$$E=\{x\in X \mid f(x)=0\}\cup\{x\in X\mid f'(x) \text{ non esiste}\}\cup$$
$$\cup\ \{x\in X \mid x \text{ estremo di intervallo}\}$$

Procedura per la ricerca di massimi e minimi

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \max f = \max f(E) \\ \cdot\ \min f = \min f(E) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{sempre ritenendo} \\ f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continua}\end{array}$$

Considerando $\bar{E}$ con anche gli estremi non appartenenti ad X, $\sup f = \max \mathring{f}(\bar{E})$ e $\inf f = \min \mathring{f}(\bar{E})$; dove

Considerando E con anche gli estremi non appartenenti ad X, $\sup f = \max \mathring{f}(\overline{E})$ e $\inf f = \min \mathring{f}(\overline{E})$; dove

$$\mathring{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se definita in } x \\ \lim_{w \to x^+} f(w) & \text{se } x \text{ estremo inf. d'intervallo} \\ \lim_{w \to x^-} f(w) & \text{se } x \text{ estremo sup. d'intervallo} \end{cases}$$

es.

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad \text{su} \quad (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\overline{E} = \{2\} \cup \{0^-, 0^+, \pm\infty\} \cup$$
$$\cup \ (\text{idem})$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = 2x \land x \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2$$

quindi:

$$\sup f = +\infty \quad \inf f = -\infty$$

es. 2

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad \text{in} \quad (0,3]$$

$$\overline{E} = \{0^+, 2, 3\} \qquad \mathring{f}(0^+) = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$$

$$\mathring{f}(2) < \mathring{f}(3) \Rightarrow \inf f = \min f = f(2) = \frac{e^2}{4}$$

Lemma $f'(\overline{x}) = 0$

(i) $f''(\overline{x}) > 0 \Rightarrow x$ min. locale

(ii) $f''(\overline{x}) < 0 \Rightarrow x$ mass. locale

Dimostrazione

(i) $$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \frac{f'(\overline{x})}{2} h^2 + o(h^2) =$$

$$= f(\overline{x}) + h^2 \underbrace{\left(\frac{f'(\overline{x})}{2} + o(1) \right)}_{w(h)}$$

$$w(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{f''(\overline{x})}{2} = L > 0 \quad \text{per ipotesi}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, \delta > 0 \quad |h| \le \delta \Rightarrow w(h) \ge \frac{L}{2}$$

quindi:

$$f(\overline{x}+h) > f(\overline{x}) \quad (\text{i.e. è minimo ristretto})$$

$\square$