Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2022/2023 - Geometria 1
Foglio esercizi 2

S. Manfredini

Nel seguito, $\mathbb{K}$ è un campo, n e m due interi positivi.

Esercizio 1.
Data la matrice quadrata $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in M(n, \mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definiamo la matrice quadrata $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in M(n, \mathbb{C})$ tramite $b_{ij} = \alpha^{i-j} a_{ij}$.

a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ A e B hanno lo stesso rango?

b) Per $n = \alpha = 2$, per quali A il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ ha le stesse soluzioni del sistema lineare $B\underline{x} = \underline{0}$?

Esercizio 2.
Dati $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ consideriamo la seguente matrice di taglia $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ dove $a_{ij} = a_i - b_j$.

a) Determinare i possibili valori di $\mathrm{rnk}(A)$.

b) Rispondere alla stessa domanda nel caso $n = m$, $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2.

Esercizio 3.
Determinare il rango della matrice quadrata reale di ordine n

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ -2 & -1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.
Fissata $M \in M(2, \mathbb{R})$, consideriamo l'applicazione $C_M : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ data da $C_M(A) = MA - AM$, per ogni $A \in M(2, \mathbb{R})$.

a) Mostrare che C_M è lineare e non è mai surgettiva.

b) Calcolare la matrice di C_M nella base standard di $M(2, \mathbb{R})$ e dare condizioni necessarie e sufficienti per cui $\mathrm{rnk}\, C_M = 0$.

c) Mostrare che I_2, M, M^2, M^4 non possono essere linearmente indipendenti.

d) I risultati precedenti (con le dovute modifiche) sono veri per matrici quadrate di ordine arbitrario n su un campo arbitratio $\mathbb{K}$?

Esercizio 5.
Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Per ognuno dei punti seguenti, costruire se esiste, o dimostrare che non esiste, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfi le richieste date. Le richieste sono cumulative, se possibili: ad esempio, nel punto d), sono incluse le richieste dei punti a), b) e c), ma solo quelle per cui una tale f esiste.

a) $f(\underline{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v}_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $f(\underline{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v}_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$.

d) $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$.

e) $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(f^2)$.

g) $\dim \operatorname{Im}(f^2) = 1$.

h) $\dim \operatorname{Im}(f^2) = 2$.

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(f^2)$.

j) $f(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

k) $f(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6.
Siano $X, Y \in M(3, \mathbb{K})$ tali che $YX - X^2Y^2 = XY - Y^2X^2 = I_2$. Consideriamo le applicazioni lineari $f_X, f_Y : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ date dalle matrici X e Y.

a) Supponiamo esista $\underline{v} \in \mathbb{K}^3$, $\underline{v} \neq 0$, tale che $\underline{v} \in \operatorname{Ker}(f_Y)$. Mostrare che allora $\mathcal{B} = \{\underline{v}, f_X(\underline{v}), f_X^2(\underline{v})\}$ è una base di $\mathbb{K}^3$ e descrivere le matrici associate a f_X e f_Y in tale base: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_X)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_Y)$.

b) Mostrare che se $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2, un $\underline{v}$ come al punto a) non esiste. Dedurne che in tal caso X e Y sono invertibili.

c) Mostrare che b) rimane vero se rimpiaziamo 3 con n. Inoltre mostrare che (con le stesse notazioni di sopra) $\operatorname{Span}(\underline{v}, f_X(\underline{v}), \ldots, f_X^n(\underline{v}))$ è f_Y-invariante.

Esercizio 7.
Data $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, una inversa generalizzata di A è una $X \in M(n, m, \mathbb{K})$ tale che $AXA = A$.

a) Mostrare che se A è invertibile, A ammette un'unica inversa generalizzata.

b) Determinare tutte le inverse generalizzate della matrice a blocchi $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Mostrare che ogni $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ ammette un'inversa generalizzata (in generale non unica).

d) Se X è un'inversa generalizzata di A, poniamo $W = f_X(\mathrm{Im}(f_A))$. Mostrare che W è un supplementare di $\mathrm{Ker}(f_A)$.

Esercizio 8.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Per $i = 1, \ldots, n$, sia $X_i = \mathcal{B} \setminus \{\underline{v}_i\}$ e $W_i = \mathrm{Span}(X_i)$.

a) Calcolare la dimensione di $W_1 \cap \cdots \cap W_k$ per $k = 2, \ldots, n$.

b) Fissata $B \in M(1, n, \mathbb{K})$, $B \neq 0$, sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ tale che per ogni $i = 1, \ldots, n$, la matrice ottenuta da A rimpiazzando la i-ma riga con B non è invertibile. Mostrare che anche A non è invertibile.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale e $f : V \to V$ una applicazione lineare. Mostrare che le seguenti sono equivalenti.

a) $f_{|\mathrm{Im}\, f} : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ è un isomorfismo.

b) L'applicazione lineare indotta da f sullo spazio quoziente ${}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}\, f}$, $\hat{f} : {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}\, f} \to {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}\, f}$ data da $\hat{f}([\underline{v}]) = [f(\underline{v})]$, per ogni $[\underline{v}] \in {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}\, f}$, è un isomorfismo.

c) $V = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

d) Esiste $W \subset V$ sottospazio f-invariante supplemetare di $\mathrm{Ker}\, f$ tale che $f_{|W} : W \to W$ è un isomorfismo.

Esercizio 10.
Per ognuna delle affermazioni seguenti, dimostrare che è vera o produrre un controesempio.

a) Dati W_1, W_2, W_3 sottospazi dello spazio vettoriale V, allora
$(W_1 + W_2) \cap (W_2 + W_3) \cap (W_3 + W_1) = (W_1 + (W_2 \cap W_3)) \cap (W_2 + (W_3 \cap W_1))$

b) Se $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ sono simili, allora $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(AB)$.

c) Fissato un isomorfismo $h : V \to V$ di uno spazio vettoriale V, il sottoinsieme di $\mathcal{L}(V, V)$ dato da $E = \{f : V \to V \mid f \text{ è lineare e } h + f \text{ è un isomorfismo}\}$ è un sottospazio.

es. 1

a. Per $\alpha=0$ l'inversione non esiste. Sia dunque $\alpha\neq 0$. Si applica l'algoritmo di Gauss:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^{-1}a_{12} & \alpha^{-2}a_{13} & \cdots & \alpha^{-n+1}a_{1n} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \alpha^{-n+2}a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdots]{\substack{\alpha^{n-1}R_1 \to R_1 \\ \alpha^{n-2}R_2 \to R_2}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^{n-1}a_{11} & \alpha^{n-2}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdots]{\substack{\alpha^{1-n}C_1 \to C_1 \\ \alpha^{2-n}C_2 \to C_2}}$$

$\longrightarrow A$. Quindi A e B hanno lo stesso rango $\forall \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

b. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{C}$.

$$(A\underline{x} = \underline{0} \iff B\underline{x} = \underline{0}) \iff \left(\exists\, \lambda, k \in \mathbb{C} \,/\, B = \begin{pmatrix} \lambda A_1 \\ k A_2 \end{pmatrix}\right) \iff$$

$$\iff \begin{cases} (a \ \ \tfrac{1}{2}b) = \lambda(a \ \ b) \xRightarrow{\lambda=1} \tfrac{1}{2}b = \lambda b \Rightarrow \lambda = \tfrac{1}{2}, \lightning \ \vee \ b = 0 \\ (2c \ \ d) = k(c \ \ d) \xRightarrow{k=1} 2c = kc \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 2, \lightning \ \vee \ c = 0.$$

Quindi: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

es. 2

a. Si applica l'algoritmo di Gauss su A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdots]{\substack{R_2-R_1\to R_2 \\ R_3-R_1\to R_3}} \begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\cdots]{\substack{C_2-C_1\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}} \overbrace{\begin{pmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & b_1-b_3 & \cdots \\ a_2-a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots \\ & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}}^{T}$$

. Tale matrice T può avere al più rango 2, e così anche A. Ponendo allora $a_i = b_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n$, $A = \underline{0} \Rightarrow rg(A) = 0$; se $a_2 \neq a_1$ e $b_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n$, $rg(A) = 1$; infine se $a_2 \neq a_1$ e $a_1 \neq b_2$, $rg(A) = 2$.

b. Poiché char $K \neq 2$, T, essendo antisimmetrica, può avere soltanto rango pari, quindi o 0 (se $a_i = b_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq n$) o 2 (se $a_2 \neq a_1$).

es. 3

Si applica l'algoritmo di Gauss:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & n-2 \\ -2 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ -n+1 & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow[\cdots]{\substack{R_2-R_1\to R_2 \\ R_3-R_1\to R_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \\ -n-1 & \cdots & \cdots & \cdots & -n-1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\cdots]{\substack{C_2-C_1\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ -1 & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ -n-1 & & & & \end{pmatrix} = T.$$

Poiché T ha rango 2, $rg(A) = 2$.

es. 4

a. Si verifica innanzitutto che C_M e' lineare:

(i) $C_M(A+B) = M(A+B) - (A+B)M = MA + MB - AM - BM =$

$= MA - AM + MB - BM = C_M(A) + C_M(B),\ \forall A, B \in M(2,\mathbb{R}).$

(ii) $C_M(\alpha A) = M(\alpha A) - (\alpha A)M = \alpha MA - \alpha AM = \alpha(MA - AM) = \alpha C_M(A),$

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ A \in M(2,\mathbb{R}).$

Poiché C_M e' un endomorfismo, C_M e' surgettiva e solo se e' iniettiva. Poiché $MI = IM \ \forall M \in M(2,\mathbb{R})$, $I \in \operatorname{Ker} C_M$, e quindi $\operatorname{Ker} C_M \neq \{\underline{0}\}$. Dunque C_M non è iniettiva, e quindi neanche surgettiva.

b. Si computa C_M nella base $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ data $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$:

(i) $$C_M(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $$C_M(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

(iii) $$C_M(E_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$$

(iv) $$C_M(E_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(C_M) = \left([C_M(E_{11})]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [C_M(E_{12})]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [C_M(E_{21})]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [C_M(E_{22})]_{\mathcal{B}} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(C_M)$ ha rango nullo se e solo se tutti i suoi elementi sono nulli, ossia se $b = c = 0$ e $a = d$. Quindi le uniche matrici che commutano con ogni altra matrice in $M(2, \mathbb{R})$ sono della forma $a I_2$ con $a \in \mathbb{R}$.

C. Se M è un multiplo di I_2, chiaramente I_2 e M non sono linearmente indipendenti, e così neanche il complesso di I_2, M, M^2 e M^4. Sia dunque M non multiplo di I_2.

Se I_2, M, M^2 e M^4 fossero linearmente indipendenti, poiché sono esattamente $\dim M(2, \mathbb{R}) = 4$ elementi, sarebbero anche una base di $M(2, \mathbb{R})$. Sia dunque $A \in M(2, \mathbb{R})$, $\exists\, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tali che $A = a_1 I_2 + a_2 M + a_3 M^2 + a_4 M^4$. Allora $C_M(A) = a_1 \underbrace{C_M(I_2)}_{=\underline{0}} + a_2 \underbrace{C_M(M)}_{=\underline{0}} + a_3 \underbrace{C_M(M^2)}_{=\underline{0}} + a_4 \underbrace{C_M(M^4)}_{=\underline{0}} = \underline{0}$, ossia $\operatorname{rg} C_M = 0$.

Dal punto b. questo è possibile solo se M è un multiplo di I_2, $\lightning$.

d. Sia $n \in \mathbb{N}^+$. Si dimostra che data la mappa lineare:

$$C_M : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K}),$$
$$A \mapsto MA - AM,$$

$\mathrm{rg}\, C_M = 0$ se e solo se $M = \alpha I_n$ con $\alpha \in \mathbb{K}$.

Tale proposizione è equivalente ad asserire che:

$$Z = \{ M \in M(n, \mathbb{K}) \mid MA = AM \ \forall A \in M(n, \mathbb{K}) \} = \mathrm{Span}(I_n).$$

Sia dunque $M = (m_{ij})_{\substack{i=1-n \\ j=1-n}} \in Z$. Si computano ME_{ij} e $E_{ij}M$:

$$(i) \quad ME_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & m_{1i} & 0 \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & m_{ii} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(ii) \quad E_{ij} M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{j1} & \cdots & m_{jj} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ ]\, i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Affinché queste due matrici siano uguali, $m_{ij} = \alpha \delta_{ij}$, con $\alpha \in \mathbb{K}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i, j \leq n$. Quindi $M = \alpha I_n$. Viceversa $\forall A \in M(n, \mathbb{K})$, $MA = (\alpha I_n) A = \alpha A = \alpha (A I_n) = A (\alpha I_n) = AM$. Così la tesi è dimostrata.

Siano dunque $\underbrace{I_n, M, M^2, \dots, M^{2^{n^2-2}}}_{n^2 \text{ elementi}} \in M(n, \mathbb{K})$. Se $M = \alpha I_n$

con $\alpha \in \mathbb{K}$, M e I_n sono linearmente dipendenti, e così l'intero complesso di elementi. Sia allora M non multiplo di I_n.

Se tali matrici fossero linearmente indipendenti, poiché sono esattamente $\dim M(n, \mathbb{R}) = n^2$ elementi, sarebbero anche una base di $M(n, \mathbb{K})$. Sia dunque $A \in M(n, \mathbb{K})$, $\exists\, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ tali che $A = a_1 I_n + \sum_{i=2}^{n^2} a_i M^{2^{i-2}}$. Allora $C_M(A) = a_1 \underbrace{C_M(I_n)}_{=\underline{0}} +$
$+ \sum_{i=2}^{n^2} a_i \underbrace{C_M(M^{2^{i-2}})}_{=\underline{0}} = \underline{0}$, ossia $\operatorname{rg} C_M = 0$.

Da prima, questo equivale a dire che M è multiplo di I_n, $\lightning$. Dunque $I_n, M, M^2, \dots, M^{2^{n^2-2}}$ sono sempre linearmente dipendenti.

es. 5

a. $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ e $\underline{v_4}$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice delle loro rappresentazioni,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

ha rango 4. Si applica l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = T.$$

Poiché T ha una riga nulla, $\overbrace{\operatorname{rg} T}^{= \operatorname{rg} M} \leq 3 < 4$. Quindi i vettori non sono linearmente indipendenti.

Se esistesse l'applicazione desiderata, le immagini dovrebbero essere linearmente dipendenti; quindi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dovrebbe avere rango minore di 4. Si applica l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = S.$$

Poiché $\text{rg}\, S = 4$, anche $\text{rg}\, A = 4$. Pertanto tale applicazione lineare non può esistere.

b. Si osserva che $\underline{v_4} = \underline{v_1} + \underline{v_2} + 2\underline{v_3}$. Si considera matrice

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underbrace{v_1} & \underbrace{v_2} & \underbrace{v_3} & \underbrace{e_1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Si applica l'algoritmo di Gauss su M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1 \to R_4]{R_2-R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T.$$

Poiché $\mathrm{rg}\, T = 4$, $\mathrm{rg}\, M = 4$. Quindi $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ ed $\underline{e_1}$ sono linearmente indipendenti. Dacché $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, tali vettori formano anche una base. Dunque le loro immagini determinano in modo unico un'applicazione lineare.

Siano dunque $f(\underline{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\underline{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f(\underline{e_1}) = \underline{0}$.

$$f(\underline{v_4}) = f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2}) + 2 f(\underline{v_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si è quindi costruita un'applicazione lineare che soddisfa le condizioni desiderate.

C. Se $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, f = 2$, allora la matrice

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\underline{v_1}) & f(\underline{v_2}) & f(\underline{v_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

deve essere tale che $\operatorname{rg} M \leq 2$. Tuttavia $\operatorname{rg} M = 3$, $\lightning$.

Quindi tale applicazione non esiste.

d. Dal punto c., $\operatorname{rg} M = 3$. Ponendo $f(\underline{e}_1) = \underline{0}$, la matrice associata di f, ossia $(M \mid \underline{0})$, non varia il rango di M. Quindi $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} (M \mid \underline{0}) = 3$.

e. Si ponga $\operatorname{rg} f = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$. Allora si osserva che:

(i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \frac{1}{2}\underline{v}_1 - \frac{1}{2}\underline{v}_2$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \frac{1}{4}\underline{v}_4 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \frac{1}{4}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3) =$

$$= \frac{3}{4}\underline{v}_1 + \frac{3}{4}\underline{v}_2 - \frac{1}{2}\underline{v}_3$$

Dunque ogni elemento $\underline{x} \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ è della forma:

$$\underline{x} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\right)\underline{v}_1 + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\right)\underline{v}_2 - \frac{\beta}{2}\underline{v}_3, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$f(\underline{x}) = \underline{0} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\right) f(\underline{v}_1) + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\right) f(\underline{v}_2) - \frac{\beta}{2} f(\underline{v}_3) = \underline{0}.$$

Dal punto c. $f(\underline{v}_1)$, $f(\underline{v}_2)$ e $f(\underline{v}_3)$ sono linearmente indipendenti, quindi:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta = 0 \\ -\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta = 0 \quad \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \\ -\frac{\beta}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

Pertanto nessun elemento non nullo di $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ appartiene a $\ker f$. Tuttavia $\dim \ker f = 1 \Rightarrow \exists\, \underline{a} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^4 \mid \ker f = \text{Span}(\underline{a})$. Quindi $\ker f \not\subset \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

L'unico altro caso è $\text{rg} f = 4 \Rightarrow \dim \ker f = 0 \Rightarrow$

$\ker f = \{\underline{0}\} \subset \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

d. Se $\underline{e_1} \in \text{Im} f$, allora la matrice

$$M = \begin{array}{cccc} \overbrace{}^{f(\underline{v_1})} & \overbrace{}^{f(\underline{v_2})} & \overbrace{}^{f(\underline{v_3})} & \\ \end{array}$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

deve avere rango minore di 4, dacché $f(\underline{v_1})$, $f(\underline{v_2})$ e $f(\underline{v_3})$ — dal momento che $\text{rg} f = 3$ — formano una base. Si applica l'algoritmo di Gauss su M:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4 \rightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

Poiché $\mathrm{rg}\, T = 4$, $\mathrm{rg}\, M = 4$, $\lightning$. Quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}\, f \supset$
$\supset \mathrm{Im}\, f^2$.

g. Si consideri $\mathrm{Im}\, f^2$. Tale sottospazio non e' altro che $\mathrm{Im}\, f(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}\, f|_{\mathrm{Im}\, f}$. In particolare:

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \underbrace{\dim \ker f|_{\mathrm{Im}\, f}}_{\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\, f)} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}\, f|_{\mathrm{Im}\, f}}_{\dim \mathrm{Im}\, f^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f^2 = \dim \mathrm{Im}\, f - \dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\, f).$$

Dal momento che $\dim \ker f = 1$, $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\, f) \leq 1$, quindi $\dim \mathrm{Im}\, f^2 \geq \dim \mathrm{Im}\, f - 1 = 2$. Quindi $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$ e' impossibile.

h. $\dim \operatorname{Im} f^2 = 2 \implies \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 1 \implies$

$\implies \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$.

Poiché $\underline{e_1} \in \operatorname{Ker} f$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, $\operatorname{Ker} f =$
$= \operatorname{Span}(\underline{e_1})$. Tuttavia $\underline{e_1} \notin \operatorname{Im} f$ dal punto f, $\lightning$.

Si estende allora $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ a un'altra base, completata da un vettore $\underline{v} \in \operatorname{Span}(f(\underline{v_1}), f(\underline{v_2}), f(\underline{v_3})) \subseteq \operatorname{Im} f$.

Sia per esempio $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\underline{v} \in \operatorname{Span}(f(\underline{v_1}), f(\underline{v_2}), f(\underline{v_3}))$ se e solo se la matrice:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\underline{v_1}) & f(\underline{v_2}) & f(\underline{v_3}) & \underline{v} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ha rango 3. Si applica l'algoritmo di Gauss su M:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} M = 3$, $\underline{v} \in \operatorname{Span}(f(\underline{v_1}), f(\underline{v_2}), f(\underline{v_3})) \subseteq \operatorname{Im} f$.
Si verifica inoltre che $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_3} & \underline{v} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ha rango 4.

Si applica l'algoritmo di Gauss su T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1 \to R_4]{R_2-R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_3 \to R_4}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S.$$

Poiché $\operatorname{rg} S = 4$, $\operatorname{rg} T = 4$. Dunque $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v}\}$ è linearmente indipendente, ed è quindi base. Ponendo $f(\underline{v})$ si determina f in modo tale che:

(i) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 3$ (poiché $f(\underline{v_1})$, $f(\underline{v_2})$ ed $f(\underline{v_3})$ sono linearmente indipendenti e $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$);

(ii) $\dim \operatorname{Ker} f = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(\underline{v})$;

(iii) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Infine $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) =$

$= 3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2.$

i $[f(\underline{v_1})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[f(\underline{v_2})]_{\mathcal{B}'} =$

es. 6

a. $a\underline{v} + b f_X(\underline{v}) + c f_X^2(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow a\underline{v} + bX\underline{v} + cX^2\underline{v} = 0 \Rightarrow$

$\xRightarrow{Y^2\cdot} \underbrace{aY^2\underline{v}}_{=\underline{0}} + bY(YX)\underline{v} + cY^2X^2\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{bY(I_3 + X^2Y^2)\underline{v}}_{=\underline{0}} + c(XY - I_3)\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow -c\underline{v} = \underline{0} \xRightarrow{\underline{v} \neq \underline{0}} c = 0.$

$a\underline{v} + b f_X(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow a\underline{v} + bX\underline{v} = \underline{0} \xRightarrow{Y\cdot} \underbrace{aY\underline{v}}_{=\underline{0}} + bYX\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow b(X^2Y^2 + I_3)\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\underline{v} = \underline{0} \xRightarrow{\underline{v} \neq \underline{0}} b = 0.$

$a\underline{v} = \underline{0} \xRightarrow{\underline{v} \neq \underline{0}} a = 0.$

Quindi $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, e dunque è base.

Si calcola adesso la rappresentazione di $X^3\underline{v}$ in $\mathcal{B}$.

$$X^3\underline{v} = a\underline{v} + bX\underline{v} + cX^2\underline{v} \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{K}.$$

(i) $$Y^2X^3\underline{v} = \underbrace{aY\underline{v}}_{=\underline{0}} + bY^2X\underline{v} + cY^2X^2\underline{v} =$$

$$= \underbrace{bY(X^2Y^2 + I_3)\underline{v}}_{=\underline{0}} + c(XY - I_3)\underline{v} =$$

$$= -c\underline{v}$$

(ii) $$Y^2X^3\underline{v} = (XY - I_3)X\underline{v} = XYX\underline{v} - X\underline{v} = X(X^2Y^2 + I_3)\underline{v} - X\underline{v} =$$
$$= X\underline{v} - X\underline{v} = \underline{0}$$

Quindi $-c\underline{v} = \underline{0} \overset{\underline{v}\neq 0}{\Longrightarrow} c = 0.$

(iii) $$X^3\underline{v} = a\underline{v} + bX\underline{v} \overset{\cdot Y}{\Longrightarrow} YX^3\underline{v} = \underbrace{aY\underline{v}}_{=\underline{0}} + bYX\underline{v} =$$
$$= b(X^2Y^2 + I_3)\underline{v} = b\underline{v}$$

(iv) $$YX^3\underline{v} = (X^2Y^2 + I_3)X^2\underline{v} = X^2Y^2X^2\underline{v} + X^2\underline{v} =$$
$$= X^2(XY - I_3)\underline{v} + X^2\underline{v} = -X^2\underline{v} + X^2\underline{v} = \underline{0}$$

Quindi: $b\underline{v} = \underline{0} \xRightarrow{\underline{v} \neq \underline{0}} b = 0$. Dunque $[X^3 \underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_X) = \left([f_X(\underline{v})]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [f_X(f_X(\underline{v}))]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [f_X(f_X^2(\underline{v}))]_{\mathcal{B}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verificano inoltre le seguenti tre identità:

(i) $Y\underline{v} = \underline{0}$, dacché $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f_Y$;

(ii) $YX\underline{v} = (X^2Y^2 + I_3)\underline{v} = \underline{v}$;

(iii) $YX^2\underline{v} = (X^2Y^2 + I_3)X\underline{v} = X^2Y^2X\underline{v} + X\underline{v} = X^2Y\underline{v} + X\underline{v} =$

$= X\underline{v}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_Y) = \left([f_Y(\underline{v})]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [f_Y(f_X(\underline{v}))]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [f_Y(f_X^2(\underline{v}))]_{\mathcal{B}} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Sia $n \in \mathbb{N}$. $XY - Y^2X^2 = I_n \Rightarrow \underbrace{XY\underline{v}}_{=\underline{0}} - Y^2X^2\underline{v} = \underline{v}$.

Quindi: $-YX\underline{v} = \underline{v} \Rightarrow -\underline{v} = \underline{v} \Rightarrow 2\underline{v} = \underline{0} \xRightarrow{\underline{v} \neq \underline{0}} 2 = 0$,

assurdo se char $\mathbb{K} \neq 2$.

Dunque $\ker Y = \{0\} \Rightarrow f_Y$ è un isomorfismo $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y$ è invertibile.

Per simmetria anche f_X lo è, e dunque X è invertibile.

C. Si dimostra per induzione su $k \geq 3$ che $f_Y(f_X^k(\underline{v})) \in$
$\in \mathrm{Span}(\underline{v}, f_X(\underline{v}), \dots, f_X^{k-1}(\underline{v}))$, dacché per $k < 3$ la tesi è già dimostrata al punto a.

(passo base) $f_Y(f_X^3(\underline{v})) = YX^3\underline{v} = (X^2Y^2 + I_n)X^2\underline{v} =$
$= X^2(XY - I_n)\underline{v} + X^2\underline{v} = -X^2\underline{v} + X^2\underline{v} \in \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^2(\underline{v}))$. ✓

(passo induttivo) $f_Y(f_X^k(\underline{v})) = YX^k\underline{v} = (X^2Y^2 + I_n)X^{k-1}\underline{v} =$
$= X^2Y^2X^{k-1}\underline{v} + X^{k-1}\underline{v}$. Per il passo induttivo, $YX^{k-1}\underline{v} \in$
$\in \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^{k-2}(\underline{v})) \Rightarrow \exists\, a_0, \dots, a_{k-2} \in \mathbb{K}$ tali che
$YX^{k-1}\underline{v} = \sum_{i=0}^{k-2} a_i f_X^i(\underline{v})$. Allora $Y \cdot YX^{k-1}\underline{v}$ è pari ad Y moltiplicata per una combinazione lineare di $\mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^{k-2}(\underline{v}))$, e dunque, per il passo induttivo essa appartiene a $\mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^{k-3}(\underline{v}))$.
Pertanto $\exists\, b_0, \dots, b_{k-3} \in \mathbb{K}$ tali che $Y^2X^{k-1}\underline{v} = \sum_{i=0}^{k-3} b_i f_X^i(\underline{v})$.
Infine $YX^k\underline{v} = X^2Y^2X^{k-1}\underline{v} + X^{k-1}\underline{v} = X^2\sum_{i=0}^{k-3} b_i X^i\underline{v} + X^{k-1}\underline{v} =$
$= \sum_{i=0}^{k-3} b_i X^{i+2}\underline{v} + X^{k-1}\underline{v}$. Poiché il massimo grado di X nella somma è $k-1$, $YX^k\underline{v} \in \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^{k-1}(\underline{v}))$. ✓

Sia $\underline{x} \in \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^n(\underline{v})) \Rightarrow \exists\, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \underline{v}$. Allora $f_Y(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_Y(X^i \underline{v})$. Poiché, in particolare, $f_Y(X^i \underline{v}) \in \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^n(\underline{v}))\ \forall i \in \mathbb{N} \mid i \leq n$, $f_Y(\underline{x}) \in \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^n(\underline{v}))$. Dunque $f_Y(\mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^n(\underline{v}))) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^n(\underline{v}))$, e $\mathrm{Span}(\underline{v}, \dots, f_X^n(\underline{v}))$ è f_Y-invariante.

es. 7

a. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Sia A^{-1} la matrice inversa di A.

Innanzitutto, A^{-1} è un'inversa generalizzata di A: $AA^{-1}A = I$.

Sia $X \in M(n, \mathbb{K})$ tale che $AXA = A$. Allora $A^{-1}AXA = I_n \Rightarrow$ $\Rightarrow XA = I_n$. Poiché l'inverso è unico, $X = A^{-1}$.

b. Sia $A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array}\right) \in M(m, p, \mathbb{K})$ con $m, p \in \mathbb{N}^+ \mid m, p \geq n$.

Sia $X = (x_{ij})_{\substack{i=1-m \\ j=1-p}}$ un inverso generalizzato di A. Allora vale la relazione $AXA = A$.

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \\ \hline \underline{0} \end{pmatrix}. \qquad (AX)A = \left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & x_{1n} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \underline{0} \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & \\ \hline & \underline{0} & & \underline{0} \end{array}\right).$$

Dunque $x_{ij} = \delta_{ij} \ \forall i, j \in \mathbb{N}^+ \mid i \leq n \wedge j \leq n$, ossia

$$X = \left(\begin{array}{c|c} I_n & V \\ \hline U & W \end{array} \right), \text{ con } V \in M(n, p-n),\ U \in M(m-n, n),$$
$$W \in M(m-n, p-n).$$

c. Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$. Sia $\operatorname{rg} A = k \in \mathbb{N}$. Allora vale sicuramente che $A \sim_{SD} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, ossia $\exists\, P \in GL(m, \mathbb{K})$, $Q \in GL(n, \mathbb{K})$ tali che:

$$A = P \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)}^{I} Q.$$

Sia $X = \left(\begin{array}{c|c} I_k & V \\ \hline U & W \end{array} \right)$, con $V \in M(n, p-n)$, $U \in M(m-n, n)$,
$W \in M(m-n, p-n)$.

Allora, per il punto b., $ITI = I$. Detto $G = Q^{-1} T P^{-1}$, si verifica che:

$$AGA = PIQQ^{-1}TP^{-1}PIQ = PITIQ = PIQ = A.$$

Dunque G è un inverso generalizzato di A.

d. Si dimostra innanzitutto che $\dim(\mathrm{Ker}\, f_X \cap \mathrm{Im}\, f_A) = 0$.

Sia $\underline{v} \in (\mathrm{Ker}\, f_X \cap \mathrm{Im}\, f_A)$. Allora $\exists\, \underline{w} \in K^n \mid \underline{v} = A\underline{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{AX\underline{v}}_{=\underline{0}} = AXA\underline{w} = A\underline{w} \Rightarrow A\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$. Quindi $\mathrm{Ker}\, f_X \cap \mathrm{Im}\, f_A = \{\underline{0}\}$,

ossia $\dim(\mathrm{Ker}\, f_X \cap \mathrm{Im}\, f_A) = 0$.

Dunque $\dim(W + \mathrm{Ker}\, f_A) = \dim W + \dim \mathrm{Ker}\, f_A - \dim(W \cap \mathrm{Ker}\, f_A)$,

dove $\dim W = \dim f_X|_{\mathrm{Im}\, f_A} = \mathrm{rg}\, A - \dim \mathrm{Ker}\, f_X|_{\mathrm{Im}\, f_A} =$

$= \mathrm{rg}\, A - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\, f_X \cap \mathrm{Im}\, f_A)}_{=0} = \mathrm{rg}\, A$.

Pertanto $\dim(W + \mathrm{Ker}\, f_A) = \underbrace{\mathrm{rg}\, A + \mathrm{Ker}\, f_A}_{n} - \dim(W \cap \mathrm{Ker}\, f_A) =$

$= n - \dim(W \cap \mathrm{Ker}\, f_A)$.

Si verifica che $\dim(W \cap \mathrm{Ker}\, f_A) = 0$. Sia $\underline{v} \in W \cap \mathrm{Ker}\, f_A$. Allora

$\exists\, \underline{w} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{v} = XA\underline{w} \Rightarrow \underbrace{A\underline{v}}_{=\underline{0}} = AXA\underline{w} = A\underline{w} \Rightarrow A\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$.

Quindi $W \cap \mathrm{Ker}\, f_A = \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim(W \cap \mathrm{Ker}\, f_A) = 0$. Allora

$\dim(W + \mathrm{Ker}\, f_A) = n \Rightarrow W + \mathrm{Ker}\, f_A = \mathbb{K}^n$. Poiché

$W \cap \mathrm{Ker}\, f_A = \{\underline{0}\}$, $W \oplus \mathrm{Ker}\, f_A = \mathbb{K}^n$, ossia W è un

supplementare di $\mathrm{Ker}\, f_A$.

es. 8

a. Si dimostra che, dati $A, B \subseteq \mathcal{B}$, $\mathrm{Span}(A) \cap \mathrm{Span}(B) = \mathrm{Span}(A \cap B)$. Chiaramente $\mathrm{Span}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Span}(A) \cap \mathrm{Span}(B)$. Sia ora $\underline{v} \in \mathrm{Span}(A) \cap \mathrm{Span}(B)$. Sia $A \cap B = \{\underline{c_1}, \dots, \underline{c_r}\}$ con $r \in \mathbb{N}$. Siano $A = \{\underline{c_1}, \dots, \underline{c_r}, \underline{a_{r+1}}, \dots, \underline{a_m}\}$ e $B = \{\underline{c_1}, \dots, \underline{c_r}, \underline{b_{r+1}}, \dots, \underline{b_n}\}$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Allora $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tali che:

$$\begin{cases} \underline{v} = \alpha_1 \underline{c_1} + \dots + \alpha_m \underline{a_m} \\ \underline{v} = \beta_1 \underline{c_1} + \dots + \beta_n \underline{b_n} \end{cases} \Longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)\underline{c_1} + \dots + (\alpha_r - \beta_r)\underline{c_r} + \alpha_{r+1}\underline{a_{r+1}} +$$

$$+ \dots + \alpha_m \underline{a_m} - \beta_{r+1}\underline{b_{r+1}} + \dots - \beta_n \underline{b_n} = \underline{0}.$$

Poiché $A \cup B \subseteq \mathcal{B}$ è linearmente indipendente, $\alpha_i = \beta_i \ \forall i \in \mathbb{N} \mid i \leq r$, $\alpha_j = 0 \ \forall j \in \mathbb{N} \mid r < j \leq m$ e $b_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \mid r < k \leq n$. Dunque $\underline{v} \in \mathrm{Span}(A \cap B)$. Pertanto $\mathrm{Span}(A) \cap \mathrm{Span}(B) \subseteq \mathrm{Span}(A \cap B)$. Allora $\mathrm{Span}(A) \cap \mathrm{Span}(B) = \mathrm{Span}(A \cap B)$.

Allora $W_1 \cap \dots \cap W_k = \mathrm{Span}(\mathcal{B} \setminus \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}\})$, la cui dimensione è $n - k$ poiché $\mathcal{B} \setminus \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}\}$ è linearmente indipendente.

b. Si assuma inizialmente A invertibile. Allora $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_m\}$ è linearmente indipendente. Dacché $|\mathcal{B}| = n$, $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^n$. Dal momento che $B \neq \underline{0}$, $\{B\}$ è linearmente indipendente. Si può dunque completare $\{B\}$ con la base $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{B}_i = (\mathcal{B} \setminus \{A_i\}) \cup \{B\}$ con $i \in \mathbb{N}^+ \mid i \leq n$. Tuttavia $\mathcal{B}_i$ non è mai linearmente indipendente, dacché $X_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline B \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \}i$ non è mai invertibile con $i \in \mathbb{N}^+ \mid i \leq n$ per ipotesi, e dunque $\operatorname{rg} X_i < n$, $\lightning$.

Quindi A non è invertibile.

es. 9

(i) (a.) $\Longleftrightarrow$ (b.)

($\Rightarrow$) Sia $[\underline{v}] \in \operatorname{Ker} \hat{f}$. Allora $\hat{f}([\underline{v}]) = [f(\underline{v})] = \operatorname{Ker} f \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\underline{v}) \in \operatorname{Ker} f$. Si ponga $\underline{v} \notin \operatorname{Ker} f$. Allora $f(\underline{v}) \neq \underline{0}$ appartiene ad $\operatorname{Im} f$. Dacché $f|_{\operatorname{Im} f}$ è un isomorfismo, $f(\underline{v}) \neq \underline{0} \Rightarrow f(f(\underline{v})) \neq \underline{0} \Rightarrow f(\underline{v}) \notin \operatorname{Ker} f$, $\lightning$. Dunque $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Ker} \hat{f} = \{\operatorname{Ker} f\} \Rightarrow \hat{f}$ è iniettiva. Sia ora $\underline{w} \in V$. Poiché $f(\underline{w}) \in \operatorname{Im} f$ e $f|_{\operatorname{Im} f}$ è un isomorfismo, $\exists\, \underline{v} \in \operatorname{Im} f$ tale che $f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow [\underline{v}] = [\underline{w}]$. Dacché $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$, $\exists\, \underline{x} \in V \mid \underline{v} = f(\underline{x})$. Pertanto $\forall\, [\underline{w}] \in V/\operatorname{Ker} f$ $\exists\, [\underline{x}] \in V/\operatorname{Ker} f \mid \hat{f}([\underline{x}]) = [\underline{w}]$, ossia $\hat{f}$ è surgettiva.

Dunque $\hat{f}$ è un isomorfismo.

($\Leftarrow$) Sia $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f}$, allora $\exists\, \underline{x} \in V \mid \underline{v} = f(\underline{x})$. $\hat{f}([\underline{x}]) =$
$= [f(\underline{x})] = [\underline{v}] = [\underline{0}]$ implica $[\underline{x}] = [\underline{0}]$ dacché $\hat{f}$ è un isomorfismo, ossia $\underline{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\underline{x}) = \underline{v} = \underline{0}$. Quindi $\operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f} = \{\underline{0}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f|_{\operatorname{Im} f}$ è iniettiva. Sia ora $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$. Allora $\exists\, \underline{x} \in V \mid$
$\underline{v} = f(\underline{x})$. Poiché $\hat{f}$ è surgettiva, $\exists\, \underline{w} \in V \mid [f(\underline{w})] = [\underline{x}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \underline{k} \in \operatorname{Ker} f \mid f(\underline{w}) = \underline{x} + \underline{k} \Rightarrow f(f(\underline{w})) = f(\underline{x}) + \underbrace{f(\underline{k})}_{=\underline{0}}$.
Sia $\underline{i} = f(\underline{w}) \in \operatorname{Im} f$, si è allora dimostrato che $f(\underline{i}) = \underline{v}$, ossia che $\forall\, \underline{v} \in \operatorname{Im} f\ \exists\, \underline{w} \in \operatorname{Im} f \mid f(\underline{w}) = \underline{v}$, quindi che $f|_{\operatorname{Im} f}$ è surgettiva. Pertanto $f|_{\operatorname{Im} f}$ è un isomorfismo.

(ii) (b.) $\Leftrightarrow$ (c.)

($\Rightarrow$) Poiché $\hat{f}$ è un isomorfismo, $\forall\, \underline{v} \in V\ \exists\, \underline{w} \in V \mid [f(\underline{w})] = [\underline{v}]$, ossia $\exists\, \underline{k} \in \operatorname{Ker} f \mid \underline{v} = \underbrace{f(\underline{w})}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{\underline{k}}_{\in \operatorname{Ker} f} \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Quindi $V \subseteq \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Poiché d'altra parte $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \subseteq V$, si ricava che $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Sia ora $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Poiché $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$, $\exists\, \underline{w} \in V \mid \underline{v} = f(\underline{w})$. $\hat{f}([\underline{w}]) = [f(\underline{w})] = [\underline{v}] = [\underline{0}]$ implica, dacché $\hat{f}$ è un isomorfismo, che $[\underline{w}] = [\underline{0}]$, ossia che $\underline{w} \in \operatorname{Ker} f$. Allora $\underline{v} = f(\underline{w}) = \underline{0}$.
Quindi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\underline{0}\}$. Si conclude dunque che $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

($\Leftarrow$) Poiché $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$, $\forall\, \underline{v} \in V\ \exists\, \underline{w} \in V,\ \underline{k} \in \ker f \mid \underline{v} = f(\underline{w}) + \underline{k} \Rightarrow \forall\, \underline{v} \in V\ \exists\, \underline{w} \in V \mid \hat{f}([\underline{w}]) = [\underline{v}]$, ossia $\hat{f}$ è surgettiva. Sia ora $\underline{v} \in V \mid \hat{f}([\underline{v}]) = [f(\underline{v})] = [\underline{0}]$. Allora $\exists\, \underline{k} \in \ker f \mid f(\underline{v}) = \underline{k}$. Dacché $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ sono in somma diretta, $f(\underline{v}) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0}$, ossia $[\underline{v}] = [\underline{0}]$, quindi $\ker \hat{f} = \{[\underline{0}]\} \Rightarrow \hat{f}$ è iniettiva. Si conclude allora che $\hat{f}$ è un isomorfismo.

(iii) (c.) $\Longleftrightarrow$ (d.)

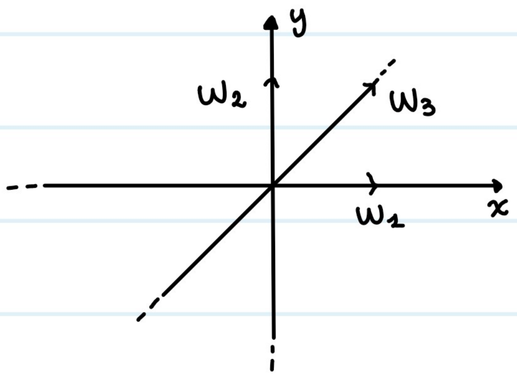
($\Rightarrow$) Poiché (c.) per ipotesi è vera, essendo (c.) equivalente a (b.) e (b.) equivalente ad (a.), anche (a.) è vera. Allora $\operatorname{Im} f$ è un supplementare di $\ker f$ tale che $f|_{\operatorname{Im} f}$ sia un isomorfismo.

($\Leftarrow$) Si dimostra che $W = \operatorname{Im} f$. Sia $\underline{w} \in W$. Poiché $f|_W$ è un isomorfismo $\exists\, \underline{v} \in W \mid \underline{w} = f(\underline{v}) \Rightarrow \underline{w} \in \operatorname{Im} f$, ossia che $W \subseteq \operatorname{Im} f$. Sia ora $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$. Allora $\exists\, \underline{x} \in V \mid \underline{v} = f(\underline{x})$. Poiché $V = \ker f \oplus W$, $\exists\, \underline{k} \in \ker f,\ \underline{w} \in W \mid \underline{x} = \underline{k} + \underline{w}$, da cui $\underline{v} = f(\underline{k} + \underline{w}) = f(\underline{k}) + f(\underline{w}) = f(\underline{w})$. Dacché W è f-invariante, $\underline{v} = f(\underline{w}) \in W$. Dunque $\operatorname{Im} f \subseteq W$. Valendo la doppia inclusione si deduce che $W = \operatorname{Im} f$, ossia che $V =$

$= \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$

es. 10

a. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e siano $W_1 = \operatorname{Span}(\underline{e_1})$, $W_2 = \operatorname{Span}(\underline{e_2})$ e $W_3 = \operatorname{Span}(\underline{e_1} + \underline{e_3})$. $W_1 \cap W_2$, $W_2 \cap W_3$ e $W_1 \cap W_3$ sono tutti uguali a $\{\underline{0}\}$. Pertanto $W_1 + W_2 = W_2 + W_3 = W_1 + W_3 = \mathbb{R}^2$. Allora $(W_1 + W_2) \cap (W_2 + W_3) \cap (W_1 + W_3) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \neq \{\underline{0}\} = W_1 \cap W_2 = (W_1 + \{\underline{0}\}) \cap (W_2 + \{\underline{0}\}) = (W_1 + (W_2 \cap W_3)) \cap (W_2 + (W_3 \cap W_1))$.



Pertanto l'affermazione è falsa.

b. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{K})$ e sia $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{K})$. Sia $B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per definizione, A e B sono simili.
$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Tuttavia $\operatorname{tr}(A^2) = 5 \neq 4 = \operatorname{tr}(AB)$. Pertanto l'affermazione è falsa.

c. Siano $V = \mathbb{R}$ e $h = Id$. $-2h$ e h appartengono entrambi ad E dacché $-h$ e $2h$ ammettono, rispettivamente, $-h^{-1}$ e $\frac{1}{2}h^{-1}$ come inverse, e sono dunque isomorfismi. Tuttavia, se E fosse sottospazio, anche $-2h + h$ dovrebbe appartenere ad E, e dunque $-2h + h + h = \underline{0}$ dovrebbe essere un isomorfismo, $\lightning$.
Pertanto l'affermazione è falsa.