

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

28 aprile 2023

## Indipendenza e applicazioni affini

*Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.*

**Nota.** Qualora non specificato diversamente, si intenderà per  $E$  uno spazio affine sullo spazio vettoriale  $V$  e per  $E'$  uno spazio affine sullo spazio vettoriale  $V'$ , dove sia  $V$  che  $V'$  sono costruiti sul campo  $\mathbb{K}$ .

Fissato un origine  $O$  dello spazio affine, si possono sempre considerare due bigezioni:

- La bigezione  $i_O : E \rightarrow V$  tale che  $i(P) = P - O \in V$ ,
- La bigezione  $j_O : V \rightarrow E$  tale che  $j(\underline{v}) = O + \underline{v} \in E$ .

Si osserva inoltre che  $i_O$  e  $j_O$  sono l'una la funzione inversa dell'altra.

Dato uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  di dimensione  $n$ , si può considerare  $V$  stesso come uno spazio affine, denotato con le usuali operazioni:

- (a)  $\underline{v} + \underline{w}$ , dove  $\underline{v} \in V$  è inteso come *punto* di  $V$  e  $\underline{w} \in W$  come il vettore che viene applicato su  $\underline{w}$ , coincide con la somma tra  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  (e analogamente  $\underline{w} - \underline{v}$  è esattamente  $\underline{w} - \underline{v}$ ).
- (b) Le bigezioni considerate inizialmente sono in particolare due mappe tali che  $i_{v_0}(\underline{v}) = \underline{v} - \underline{v_0}$  e che  $j_{v_0}(\underline{v}) = \underline{v_0} + \underline{v}$ .

**Definizione** (spazio affine standard). Si denota con  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  lo **spazio affine standard** costruito sullo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^n$ . Analogamente si indica con  $A_V$  lo spazio affine costruito su uno spazio vettoriale  $V$ .

**Osservazione.**

- Una combinazione affine di  $A_V$  è in particolare una combinazione lineare di  $V$ . Infatti, se  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i$  con  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , allora, fissato  $\underline{v}_0 \in V$ ,  $\underline{v} = \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\underline{v}_i - \underline{v}_0) = \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i - \underline{v}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i$ .
- Come vi è una bigezione data dal passaggio alle coordinate da  $V$  a  $\mathbb{K}^n$ , scelta una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  e un punto  $O$  di  $E$ , vi è anche una bigezione  $\varphi_{O,\mathcal{B}}$  da  $E$  a  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  data dalla seguente costruzione:

$$\varphi_{O,\mathcal{B}}(P) = [P - O]_{\mathcal{B}}.$$

**Proposizione.** Sia  $D \subseteq E$ . Allora  $D$  è un sottospazio affine di  $E \iff$  fissato  $P_0 \in D$ , l'insieme  $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in D_0$ . Allora, per definizione, esistono  $P_1, \dots, P_k \in D$  tali che  $\underline{v}_i = P_i - P_0 \forall 1 \leq i \leq k$ . Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ . Sia inoltre  $P = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i \in E$ . Sia infine  $O \in D$ . Allora  $P = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O + O - P_0) = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_0 - O) = O + (1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i)(P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O)$ . In particolare  $P$  è una combinazione affine di  $P_1, \dots, P_k \in D$ , e quindi, per ipotesi, appartiene a  $D$ . Allora  $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i \in D_0$ . Poiché allora  $D_0$  è chiuso per combinazioni lineari,  $D_0$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , con  $P_1, \dots, P_k \in D$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ . Allora  $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) \in D_0$  per ipotesi, essendo combinazione lineare di elementi di  $D_0$ . Pertanto, poiché esiste un solo punto  $P'$  tale che  $P' = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$ , affinché  $\sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$  appartenga a  $D_0$ , deve valere anche che  $P \in D$ . Si conclude quindi che  $D$  è un sottospazio affine, essendo chiuso per combinazioni affini.  $\square$

**Osservazione.** Sia  $D$  un sottospazio affine di  $E$ .

- Vale la seguente identità  $D_0 = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$ . Sia infatti  $A = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$ . Chiaramente  $D_0 \subseteq A$ . Inoltre, se  $P - Q \in A$ ,  $P - Q = (P - P_0) - (Q - P_0)$ . Pertanto, essendo  $P - Q$  combinazione lineare di elementi di  $D_0$ , ed essendo  $D_0$  spazio vettoriale per la proposizione precedente,  $P - Q \in D_0 \implies A \subseteq D_0$ , da cui si conclude che  $D_0 = A$ .
- Pertanto  $D_0$  è unico, a prescindere dalla scelta di  $P_0 \in D$ .
- Vale che  $D = P_0 + D_0$ , ossia  $D$  è il traslato di  $D_0$  mediante il punto  $P_0$ .

**Definizione** (direzione di un sottospazio affine). Si definisce  $D_0 = \text{Giac}(D) = \{P - Q \mid P, Q \in D\} \subseteq V$  come la **direzione** (o *giacitura*) del sottospazio affine  $D$ .

**Definizione** (dimensione un sottospazio affine). Dato  $D$  sottospazio affine di  $E$ , si dice dimensione di  $D$ , indicata con  $\dim D$ , la dimensione della sua direzione  $D_0$ , ossia  $\dim D_0$ . In particolare  $\dim E = \dim V$ .

**Definizione** (sottospazi affini paralleli). Due sottospazi affini si dicono **paralleli** se condividono la stessa direzione.

**Osservazione.**

- ▶ I sottospazi affini di dimensione zero sono tutti i punti di  $E$ .
- ▶ I sottospazi affini di dimensione uno sono le *rette affini*, mentre quelli di dimensione due sono i *piani affini*.
- ▶ Si dice *iperpiano affine* un sottospazio affine di codimensione 1, ossia di dimensione  $n - 1$ .

**Definizione** (punti affinementemente indipendenti). Un insieme di punti  $P_1, \dots, P_k$  di  $E$  si dice **affinementemente indipendente** se ogni combinazione affine di tali punti è unica. Analogamente un sottoinsieme  $S \subseteq E$  si dice affinementemente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.

**Proposizione.** Dati i punti  $P_1, \dots, P_k \in E$ , sono equivalenti le seguenti affermazioni.

- (i)  $P_1, \dots, P_k$  sono affinementemente indipendenti,
- (ii)  $\forall i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k, P_i \notin \text{Aff}(P_1, \dots, P_k)$ , con  $P_i$  escluso,
- (iii)  $\forall i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$  l'insieme di vettori  $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  è linearmente indipendente,
- (iv)  $\exists i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$  per il quale l'insieme di vettori  $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  è linearmente indipendente.

*Dimostrazione.* Siano  $P_1, \dots, P_k$  affinementemente indipendenti. Sia  $i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$ . Allora chiaramente (i)  $\iff$  (ii), dacché se  $P_i$  appartenesse a  $\text{Aff}(P_1, \dots, P_k)$ , con  $P_i$  escluso, si violerebbe l'unicità della combinazione affine di  $P_i$ , e analogamente se esistessero due combinazioni affini in diversi scalari dello stesso punto si potrebbe un punto  $P_j$  con  $1 \leq j \leq k$  come combinazione affine degli altri punti.

Siano allora  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , con  $\lambda_i$  escluso, tali che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j (P_j - P_i) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere  $P_i$  nel seguente modo:

$$P_i = \left( 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \right) P_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j P_j.$$

Dal momento che la scrittura di  $P_i$  è unica per ipotesi,  $\lambda_j = 0 \forall 1 \leq j \leq k$  con  $j \neq i$ , e dunque l'insieme di vettori  $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  è linearmente indipendente, per cui (ii)  $\implies$  (iii). Analogamente si deduce anche che (iii)  $\implies$  (i) e che (iii)  $\implies$  (iv). Pertanto (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii).

Si assuma ora l'ipotesi (iv) e sia  $t \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq t \leq k$  tale che  $t \neq i$ . Siano dunque  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , con  $\lambda_t$  escluso, tale che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j (P_j - P_t) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere la somma come:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j (P_j - P_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j (P_t - P_i) = \underline{0},$$

ossia come combinazione lineare dei vettori della forma  $P_j - P_i$ . Allora, poiché per ipotesi tali vettori sono linearmente indipendenti, vale che:

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 & \text{se } j \neq t \text{ e } j \neq i, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^k \lambda_j = 0 & \implies \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme di vettori  $\{P_j - P_t \mid 1 \leq j \leq k, j \neq t\}$  è linearmente indipendente, da cui vale che (iv)  $\implies$  (iii). Si conclude dunque che (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii)  $\iff$  (iv), ossia la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

- Si osserva che il numero massimo di punti affinemente indipendenti di un sottospazio affine  $D$  di dimensione  $k$  è  $k + 1$ , dacché, fissato un punto, vi possono essere al più  $k$  vettori linearmente indipendenti.
- Un punto di  $E$  è sempre affinemente indipendente, dacché la sua unica combinazione affine è sé stesso.

**Definizione** (riferimento affine). Sia  $D \subseteq E$  un sottospazio affine di  $E$  di dimensione  $k - 1$ . Siano i punti  $P_1, \dots, P_k$  dei punti affinemente indipendenti. Allora si dice che tali punti formano un **riferimento affine** di  $D$ .

**Definizione** (coordinate affini). Sia  $D \subseteq E$  un sottospazio affine di  $E$  di dimensione  $k - 1$  e siano i punti  $P_1, \dots, P_k$  un riferimento affine  $R$  di  $D$ . Allora, se  $P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k \in D$  con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , si dice che le **coordinate affini** di  $P$  sono rappresentate dal punto  $[P]_{\mathcal{B}}$ , dove:

$$[P]_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

**Osservazione.**

- Esiste sempre un riferimento affine di un sottospazio affine  $D$  di  $E$ . Infatti, dato un punto  $P_1$  di  $E$ , e una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$  della direzione  $D_0$ , i punti  $P_1, P_1 + \underline{v}_1, \dots, P_1 + \underline{v}_k$  formano un riferimento affine.
- Dalla definizione sopra si deduce che, scelto un riferimento affine  $R$ , esiste una mappa iniettiva  $[\cdot]_R : D \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , dove l'immagine di  $P$  mediante  $[\cdot]_R$  è esattamente il vettore contenente le coordinate affini di  $P$ .

**Proposizione.** Sia  $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Allora i punti  $P_1, \dots, P_k$  sono affinemente indipendenti se e solo se i vettori  $\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \hat{P}_k = \begin{pmatrix} P_k \\ 1 \end{pmatrix}$  sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tali che  $\lambda_1 \hat{P}_1 + \dots + \lambda_k \hat{P}_k = \underline{0}$ . Allora  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$  e  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k = \underline{0}$ .

Pertanto, sapendo che  $\lambda_1 = -\lambda_2 - \dots - \lambda_k$ , vale la seguente identità:

$$\lambda_2(P_2 - P_1) + \dots + \lambda_k(P_k - P_1) = \underline{0}.$$

Poiché i punti  $P_1, \dots, P_k$  sono affinementemente indipendenti, per la proposizione precedente, allora i vettori  $P_2 - P_1, \dots, P_k - P_1$  sono linearmente indipendenti, per cui  $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ . Pertanto anche  $\lambda_1 = 0$ , e quindi i vettori  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$  sono linearmente indipendenti.

( $\Leftarrow$ ) Siano  $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tali che  $\lambda_2(P_2 - P_1) + \dots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0$ . Sia allora  $\lambda_1 = -\lambda_2 + \dots - \lambda_k$ . Si osserva dunque che  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$  e che  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k = 0$ , da cui si deduce che  $\lambda_1 \hat{P}_1 + \dots + \lambda_k \hat{P}_k = 0$ . Dal momento però che  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$  sono linearmente indipendenti,  $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , da cui la tesi, per la proposizione precedente.  $\square$

**Definizione** (combinazione convessa). Si dice che una combinazione affine  $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$  nei punti  $P_1, \dots, P_k$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  è una **combinazione convessa** se  $\lambda_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq k$ .

**Definizione** (baricentro). Si definisce **baricentro** dei punti  $P_1, \dots, P_k$  la combinazione convessa  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} P_i$ .

**Definizione** (inviluppo convesso). Si definisce l'**inviluppo complesso**  $IC(S)$  di un insieme  $S \subseteq E$  l'insieme delle combinazioni convesse finite di  $S$ .

**Osservazione.**

► L'insieme  $IC(S)$  è, effettivamente, un insieme convesso, se  $S \subseteq E$ . Se infatti  $P, Q \in IC(S)$ , allora  $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in IC(S)$ , con  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , e quindi  $[P, Q] \subseteq IC(S)$ .

► Se  $E = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ , e  $P_1, P_2, P_3$  sono tre punti di  $E$ , l'inviluppo convesso dei tre punti è esattamente il triangolo costruito sui tre punti. Analogamente, presi quattro punti di  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ , l'inviluppo convesso dei quattro punti è un tetraedro.

**Definizione** (applicazione affine). Si definisce **applicazione affine** da  $E$  a  $E'$  un'applicazione  $\varphi : E \rightarrow E'$  che conservi le combinazioni affini, ossia tale che:

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(P_i), \quad \text{se } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

**Osservazione.**

► Come per le applicazioni lineari, la somma e la composizione di più applicazioni affini è ancora una applicazione affine.

► Se si sceglie un riferimento affine di  $E$ ,  $\varphi$  è univocamente determinata da come agisce su tale riferimento.

**Teorema.** Sia  $\varphi : E \rightarrow E'$  un'applicazione affine. Allora esiste un'unica applicazione lineare  $g : V \rightarrow V'$  tale per cui  $\varphi(P) = \varphi(O) + g(P - O) \forall P \in E$ , invariante per la scelta di  $O \in E$ .

*Dimostrazione.* Sia  $O \in E$ . Si consideri l'applicazione  $g : V \rightarrow V'$  tale per cui  $g(\underline{v}) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$ . Si verifica che  $g$  è lineare:

- $g(\underline{v} + \underline{w}) = \varphi(O + \underline{v} + \underline{w}) - \varphi(O) = \varphi((O + \underline{v}) + (O + \underline{w}) - O) - \varphi(O) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O) + \varphi(O + \underline{w}) - \varphi(O) = g(\underline{v}) + g(\underline{w})$  (additività),
- $g(a\underline{v}) = \varphi(O + a\underline{v}) - \varphi(O) = \varphi(a(O + \underline{v}) + (1 - a)O) - \varphi(O) = a\varphi(O + \underline{v}) + (1 - a)\varphi(O) - \varphi(O) = ag(\underline{v})$  (omogeneità).

Inoltre,  $\varphi(P) = \varphi(O + P - O) = \varphi(O) + \varphi(P) - \varphi(O) = \varphi(O) + g(P - O)$ . Si osserva infine che  $g$  è unica per costruzione. Si verifica allora che scegliendo  $O' \in E$  al posto di  $O$ , la costruzione di  $g$  è invariante, ossia che  $\varphi(O' + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O) \forall \underline{v} \in V$ . Infatti  $\varphi(O' + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O' - O + (O + \underline{v})) - \varphi(O') = \varphi(O') - \varphi(O) + \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Data un'applicazione lineare  $g$  da  $V$  in  $V'$  e dati  $O \in E$ ,  $O' \in E$ , si può sempre costruire un'applicazione affine  $\varphi$  tale che  $\varphi(P) = O' + g(P - O)$ . Infatti, se  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  $\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i) = O' + g(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - O)) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(P_i - O) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\varphi(P_i) - O') = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(P_i)$ .

**Definizione** (applicazione lineare associata ad un'applicazione affine). Data un'applicazione affine  $\varphi : E \rightarrow E'$  e dato  $O \in E$ , si definisce  $g : V \rightarrow V'$  tale che  $g(\underline{v}) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$  come l'**applicazione lineare associata a  $\varphi$** .

**Osservazione.**

► Siano  $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  ed  $E' = \mathcal{A}_m(\mathbb{K})$ . Allora, se  $\varphi$  è un'applicazione affine da  $E$  a  $E'$ ,  $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{0}) + g(\underline{x} - \underline{0}) = A\underline{x} + \underline{b} \forall \underline{x} \in E$ , dove  $A$  è la matrice associata di  $g$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^m$  e  $\underline{b} = \varphi(\underline{0})$ .

► Se  $g$  e  $g'$  sono le applicazioni lineari associate alle applicazioni affini  $\varphi : E \rightarrow E'$  e  $\varphi' : E' \rightarrow E''$ , allora  $g \circ g'$  è l'applicazione lineare associata a  $\varphi \circ \varphi'$  e  $\varphi + \varphi'$ . Infatti, se  $O \in E$ ,  $\varphi(\varphi'(P)) = \varphi(\varphi'(O) + g'(P - O)) = \varphi(\varphi'(O)) + g(g'(P - O))$ .