Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Decomposizione di Jordan e forma canonica di Jordan reale

Nota. Nel corso del documento, qualora non specificato, per f si intenderà un qualsiasi endomorfismo di V, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Inoltre per $\mathbb{K}$ si intenderà, per semplicità, un campo algebricamente chiuso; altrimenti è sufficiente considerare un campo $\mathbb{K}$ in cui i vari polinomi caratteristici esaminati si scompongono in fattori lineari.

Sia J la forma canonica di Jordan relativa a $f \in \operatorname{End}(V)$ in una base $\mathcal{B}$. Allora è possibile decomporre tale matrice in una somma di due matrici D e N tali che:

- D è diagonale e in particolare contiene tutti gli autovalori di J;
- N è nilpotente ed è pari alla matrice ottenuta ignorando la diagonale di J;
- $DN = ND$, dacché le due matrici sono a blocchi diagonali.

Pertanto è possibile considerare gli endomorfismi $\delta = M_{\mathcal{B}}^{-1}(D)$ (diagonalizzabile) e $\nu = M_{\mathcal{B}}^{-1}(N)$ (nilpotente). Si osserva allora che questi endomorfismi sono tali che $f = \delta + \nu$ (**decomposizione di Jordan** di f).

Teorema. La decomposizione di Jordan di f è unica.

Dimostrazione. Per dimostrare che la decomposizione di Jordan è unica è sufficiente mostrare che, dati δ, δ' diagonalizzabili e ν, ν' nilpotenti tali che $f = \delta + \nu = \delta' + \nu'$, deve valere necessariamente che $\delta = \delta'$ e che $\nu = \nu'$. In particolare è sufficiente dimostrare che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}} = \delta'|_{\widetilde{V_\lambda}}$ per ogni autovalore λ di

f, dal momento che $V = \widetilde{V_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V_{\lambda_k}}$, dove k è il numero di autovalori distinti di f, e così le matrici associate dei due endomorfismi sarebbero uguali in una stessa base, da cui si concluderebbe che $\delta = \delta'$, e quindi che $\nu = \nu'$.

Si osserva innanzitutto che δ (e così tutti gli altri tre endomorfismi) commuta con f: $\delta \circ f = \delta \circ (\delta + \nu) \underbrace{=}_{\delta \circ \nu = \nu \circ \delta} (\delta + \nu) \circ \delta = f \circ \delta$. Da quest'ultimo risultato consegue che $\widetilde{V_\lambda}$ è δ-invariante, dacché se f commuta con δ, anche $(f - \lambda \mathrm{Id})^n$ commuta con δ. Sia infatti $\underline{v} \in \widetilde{V_\lambda} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^n$, allora $(f - \lambda \mathrm{Id})^n(\delta(\underline{v})) = \delta((f - \lambda \mathrm{Id})^n(\underline{v})) = \delta(\underline{0}) = \underline{0} \implies \delta(\widetilde{V_\lambda}) \subseteq \widetilde{V_\lambda}$.

Si considerano allora gli endomorfismi $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$, $\delta'|_{\widetilde{V_\lambda}}$, $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}}$, $\nu'|_{\widetilde{V_\lambda}} \in \mathrm{End}(\widetilde{V_\lambda})$. Dal momento che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$ e $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}}$ commutano, esiste una base $\mathcal{B}'$ di $\widetilde{V_\lambda}$ tale per cui i due endomorfismi sono triangolarizzabili simultaneamente. Inoltre, dal momento che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$ è una restrizione su δ, che è diagonalizzabile per ipotesi, anche quest'ultimo endomorfismo è diagonalizzabile; analogamente $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}}$ è ancora nilpotente.

Si osserva dunque che $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V_\lambda}}) = M_{\mathcal{B}'}(\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}) + M_{\mathcal{B}'}(\nu|_{\widetilde{V_\lambda}})$: la diagonale di $M'_{\mathcal{B}}(\nu|_{\widetilde{V_\lambda}})$ è nulla, e $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V_\lambda}})$, poiché somma di due matrici triangolari superiori, è una matrice triangolare superiore. Allora la diagonale di $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V_\lambda}})$ raccoglie l'unico autovalore λ di $f|_{\widetilde{V_\lambda}}$, che dunque è l'unico autovalore anche di $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$. In particolare, poiché $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$ è diagonalizzabile, vale che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}} = \lambda \mathrm{Id}$. Analogamente $\delta'|_{\widetilde{V_\lambda}} = \lambda \mathrm{Id}$, e quindi $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}} = \delta'|_{\widetilde{V_\lambda}}$, da cui anche $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}} = \nu'|_{\widetilde{V_\lambda}}$. Si conclude dunque che le coppie di endomorfismi sono uguali su ogni restrizione, e quindi che $\delta = \delta'$ e $\nu = \nu'$. $\square$

Sia adesso $V = \mathbb{R}^n$. Si consideri allora la forma canonica di Jordan di f su $\mathbb{C}$ (ossia estendendo, qualora necessario, il campo a $\mathbb{C}$) e sia $\mathcal{B}$ una base di Jordan per f. Sia α un autovalore di f in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Allora, dacché $p_f \in \mathbb{R}[\lambda]$, anche $\overline{\alpha}$ è un autovalore di f. In particolare, vi è un isomorfismo tra $\widetilde{V_\alpha}$ e $\widetilde{V_{\overline{\alpha}}}$ (rappresentato proprio dall'operazione di coniugio). Quindi i blocchi di Jordan relativi ad α e ad $\overline{\alpha}$ sono gli stessi, benché coniugati.

Sia ora $\mathcal{B}'$ una base ordinata di Jordan per $f|_{\widetilde{V_\alpha}}$, allora $\overline{\mathcal{B}'}$ è anch'essa una base ordinata di Jordan per $f|_{\widetilde{V_{\overline{\alpha}}}}$. Si consideri dunque $W = \widetilde{V_\alpha} \oplus \widetilde{V_{\overline{\alpha}}}$ e la restrizione $\varphi = f|_W$. Si osserva che la forma canonica di φ si ottiene estraendo i singoli blocchi relativi ad α e $\overline{\alpha}$ dalla forma canonica di f. Se

$\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\}$, si considera $\mathcal{B}'' = \{\Re(\underline{v_1}), \Im(\underline{v_1}), ..., \Re(\underline{v_k}), \Im(\underline{v_k})\}$, ossia i vettori tali che $\underline{v_i} = \Re(\underline{v_i}) + i\Im(\underline{v_i})$. Questi vettori soddisfano due particolari proprietà:

- $\Re(\underline{v_i}) = \dfrac{\underline{v_i} + \overline{\underline{v_i}}}{2}$,
- $\Im(\underline{v_i}) = \dfrac{\underline{v_i} - \overline{\underline{v_i}}}{2i} \underbrace{=}_{\frac{1}{i}=-i} -\dfrac{\underline{v_i} - \overline{\underline{v_i}}}{2} i$.

In particolare $\mathcal{B}''$ è un base di W, dal momento che gli elementi di $\mathcal{B}''$ generano W e sono tanti quanto la dimensione di W, ossia $2k$. Si ponga $\alpha = a + bi$. Se $\underline{v_i}$ è autovettore si conclude che:[1]

- $f(\Re(\underline{v_i})) = \frac{1}{2}\left(f(\underline{v_i}) + f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\underline{v_i} + \overline{\alpha \underline{v_i}}\right) = \frac{1}{2}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} + a\overline{\underline{v_i}} - bi\overline{\underline{v_i}}\right) = a\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + b\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2} i = a\Re(\underline{v_i}) - b\Im(\underline{v_i})$,
- $f(\Im(\underline{v_i})) = \frac{1}{2i}\left(f(\underline{v_i}) - f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2i}\left(\alpha\underline{v_i} - \overline{\alpha \underline{v_i}}\right) = \frac{1}{2i}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} - a\overline{\underline{v_i}} + bi\overline{\underline{v_i}}\right) = b\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + a\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2i} = b\Re(\underline{v_i}) + a\Im(\underline{v_i})$.

Altrimenti, se non lo è:

- $f(\Re(\underline{v_i})) = \frac{1}{2}\left(f(\underline{v_i}) + f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\underline{v_i} + \underline{v_{i-1}} + \overline{\alpha \underline{v_i}} + \overline{\underline{v_{i-1}}}\right) = \frac{1}{2}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} + a\overline{\underline{v_i}} - bi\overline{\underline{v_i}}\right) + \Re(\underline{v_{i-1}}) = a\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + b\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2} i + \Re(\underline{v_{i-1}}) = a\Re(\underline{v_i}) - b\Im(\underline{v_i}) + \Re(\underline{v_{i-1}})$,
- $f(\Im(\underline{v_i})) = \frac{1}{2i}\left(f(\underline{v_i}) - f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2i}\left(\alpha\underline{v_i} + \underline{v_{i-1}} - \overline{\alpha \underline{v_i}} - \overline{\underline{v_{i-1}}}\right) = \frac{1}{2i}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} - a\overline{\underline{v_i}} + bi\overline{\underline{v_i}}\right) + \Im(\underline{v_{i-1}}) = b\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + a\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2i} + \Im(\underline{v_{i-1}}) = b\Re(\underline{v_i}) + a\Im(\underline{v_i}) + \Im(\underline{v_{i-1}})$.

Quindi la matrice associata nella base $\mathcal{B}''$ è la stessa di f relativa ad α dove si amplifica la matrice sostituendo ad α la matrice[2] $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e ad 1 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1] Si è in seguito utilizzato più volte l'identità $f(\overline{\underline{v_i}}) = \overline{f(\underline{v_i})}$.

[2] Si verifica facilmente che lo spazio delle matrici $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è isomorfo a $\mathbb{C}$ secondo la mappa $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$.

Esempio. Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$. Si osserva che M è composta da due blocchi che sono uno il blocco coniugato dell'altro. Quindi M è simile alla matrice reale $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.