

# Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

17 marzo 2023

## Successioni per ricorrenza

**Osservazione.** Sia  $X$  l'insieme delle successioni a valori reali che soddisfano una data eq. ricorsiva lineare ed omogenea di ordine  $k$  (ossia che coinvolge  $k$  precedenti elementi di una successione).

- ▶  $X$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .
- ▶  $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1})^\top$  è un isomorfismo, e quindi  $\dim X = k$ .
- ▶ Si può facilmente individuare una base naturale di  $X$ , costituita dagli elementi della forma  $\underline{x}_i = T^{-1}(e_{i+1})$  con  $i = 0, \dots, k-1$ , dove  $\underline{x}_i$  rappresenta una successione di  $X$  dove l' $i$ -esimo elemento è pari a 1 e gli altri, tra 0 e  $k-1$ , sono nulli.

**Osservazione.** Le eq. differenziali ordinarie si possono approssimare ad eq. su differenze finite (e questa considerazione è alla base della grande somiglianza tra i concetti sviluppati sia per queste che per quelle).

**Esempio.** (ricondursi a un caso discreto) Si consideri un'eq. differenziale omogenea lineare del primo ordine su  $x(t)$ . Si può approssimare  $t$  con  $nh$ , dato  $h$  piccolo, e così scrivere  $x_n = x(nh) \approx x(t)$ . Così, allora,  $x_{n+1} = x((n+1)h) = x(t+h)$ . Conseguentemente  $hx'(t) \approx x(t+h) - x(t) \approx x_{n+1} - x_n$ .

Si provi a risolvere, per esempio, l'eq. differenziale  $x'(t) = x(t)$ . Sostituendo, si ottiene  $x_{n+1} - x_n = hx_n$ , da cui si ricava l'eq. ricorsiva  $x_{n+1} = (1+h)x_n$ . Allora  $x(nh) = x_n = (1+h)^n \underbrace{x(0)}_c = (1+h)^n c$ .

In effetti  $x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^n c = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ (1+h)^{\frac{1}{h}} \right]^t c = ce^t$ , la famiglia di soluzioni dell'eq. differenziale originale.

**Esempio.** (metodo delle bisettrici) Sia data la seguente successione:

$$(x_n) = \begin{cases} x_n = x_{n-1}^4, \\ x_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si consideri allora il sistema di funzioni:

$$\begin{cases} f(x) = x^4, \\ y = x, \end{cases}$$

ossia i punti fissi di  $f(x)$ . Si può disegnare facilmente la successione mediante il seguente algoritmo: si prenda  $x_0$  sull'asse delle ascisse, e si valuti  $f(x_0) = x_1$  collegando il punto  $(x_0, 0)$  a  $(x_0, x_1)$ , alla fine ricollegato sulla bisettrice al punto  $(x_1, x_1)$ ; si colleghi  $(x_1, x_1)$  a  $(x_1, x_2 = f(x_1))$  e quest'ultimo a  $(x_2, x_2)$ , etc. Si sarà allora disegnato in modo grafico la successione, e considerando i blocchi che connettono  $(x_{n-1}, x_{n-1})$ ,  $(x_{n-1}, x_n)$  e  $(x_n, x_n)$ , si potrà facilmente intuire che  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  per  $x_0 > 1$ , che  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  per  $x_0 = 1$ , e che  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  per  $x_0 < 1$ . Quindi nel caso dell'esempio,  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

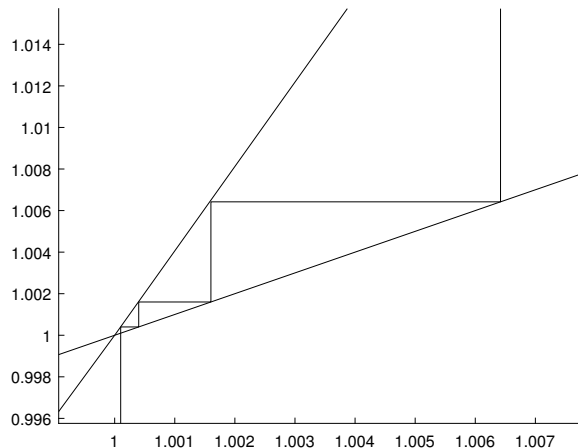


Figura 1: Applicazione dell'algoritmo con  $x_0 = 1,0001$ .

**Esempio.** Riprendendo l'esempio precedente, si può ora provare a dimostrare formalmente i risultati ottenuti. Sempre graficamente, si intuisce che  $(x_n)$  sarà decrescente, e quindi che ammetterà limite (che, in particolare, coinciderà con il suo estremo inferiore).

Si dimostra quindi, per prima cosa, che  $(x_n)$  è decrescente, e che vale  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ . Si procede per induzione: se  $n = 0$ , la tesi è già verificata; se la tesi è vera fino a  $n - 1$ , allora  $x_n = \underbrace{x_{n-1}^4}_{\geq 0} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \leq \frac{1}{2}$ .

Quindi  $(x_n)$  è decrescente, e poiché 0 ne è minorante, varrà in particolare che  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [0, \frac{1}{2}]$ .

Si mostra che  $\ell$  deve essere un punto fisso di  $f$ : poiché  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ , anche  $x_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  (essendone una sottosuccessione); inoltre, poiché  $x_{n+1} = x_n^4$ ,  $x_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell^4$ . Poiché il limite è unico, deve allora valere  $\ell = \ell^4 = f(\ell)$ . Poiché gli unici punti fissi di  $f$  sono 0 e 1, e 1 non è minorante di  $(x_n)$ , deve valere che  $\ell = 0$ .

Se invece  $x_0$  fosse stato maggiore di 1, si sarebbe dimostrato che  $(x_n)$  era strettamente crescente, e dunque avrebbe ammesso comunque limite; tale limite non sarebbe potuto essere né 0 né 1, dacché non sarebbero stati maggioranti di  $(x_n)$ , né tantomeno  $-\infty$ . Allora tale limite avrebbe dovuto essere, forzatamente,  $\infty$ .

**Esempio.** Si consideri adesso la successione:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}. \end{cases}$$

Applicando lo stesso ragionamento di prima, si considera  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ . È sufficiente dimostrare che  $(x_n)$  è tale che  $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}$  (dove  $\sqrt{2}$  è l'unico punto fisso di  $f(x)$ ) per concludere immediatamente che il limite di tale successione è proprio  $\sqrt{2}$ .

**Esempio.** Si consideri l'eq. ricorsiva  $x_n = \frac{1}{x_{n-1}^2}$ , con  $x_0 > 1$ . Qualsiasi disegno si faccia, si osserverà una "spirale" nella configurazione della successione: si ipotizzerà dunque che  $x_n$  non ammetterà limite. Si distinguono dal disegno due sottosuccessioni:  $x_{2n}$  e  $x_{2n+1}$ , che, rispettivamente, obbediranno a due eq. ricorsive,  $x_{2(n+1)} = x_{2n}^4$  e  $x_{2(n+1)+1} = x_{2n+1}^4$ , ossia la successione analizzata in uno scorso esempio.

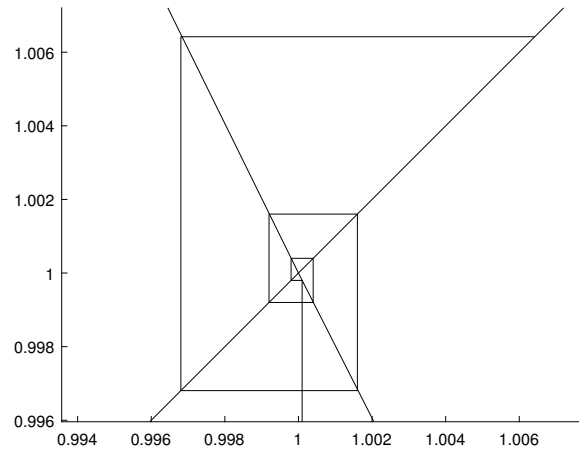


Figura 2: Applicazione del metodo della bisettrice con  $x_0 = 1,0001$ .

Poiché  $x_0 > 1$ ,  $x_1 = \frac{1}{x_0} < 1$ . Allora  $x_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ , mentre  $x_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ : poiché una sottosuccessione deve tendere allo stesso limite della successione da cui deriva, ed il limite è unico, si conclude che  $(x_n)$  non ammette limite.