Master Theorem

Teorema Si supponga che $f(n)$ sia <u>non decrescente</u>, che $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$, e che $n_0, c_0, c > 0$ siano t.c.

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq n_0, \\ \alpha T\left(\frac{n}{\beta}\right) + c \cdot f(n). \end{cases}$$

Allora, se $\exists \gamma, n_0' > 0$ t.c.

$$\alpha f\left(\frac{n}{\beta}\right) \leq \gamma f(n) \quad \forall n \geq n_0',$$

vale che:

$$T(n) = \begin{cases} O(f(n)) & \text{se } \gamma < 1 \\ O(f(n) \log_\beta(n)) & \text{se } \gamma = 1 \\ O(n^{\log_\beta(\alpha)}) & \text{se } \gamma > 1 \end{cases}$$

esempio nel caso del merge sort, $T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n$, e quindi $\alpha = 2$, $\beta = 2$;

$$2 \cdot \frac{n}{2} \leq \underbrace{1}_{\gamma} \cdot n \xrightarrow{M.T.} T(n) = O(n \cdot \log_2(n)) =$$
$$= O(n \cdot \log(n)).$$

→ il master theorem è molto appli nel contesto degli alg. dati da divide et impera.

esempio storico: moltiplic. tra matrici

Calcolare ogni termine $(AB)_{ij} = A_i B^j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ richiede $O(n)$ operazioni, quindi la classica molt. tra matrici è $O(n^2 \cdot n) = O(n^3)$.

Per fooling argument, questo prob. ha un lower bound $O(n^2)$.

L'idea di Strassen è quella di trasformare il prob. con il div. et imp.:

$$\underset{C}{AB} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

da cui $C_{ij} = [A_{i1} \ A_{i2}] \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}$, che danno luogo a 2 prod. per tutti gli elem. di C (8 prod. in totale).

Seguendo la regola di Strassen si possono fare 7 prodotti invece che 8:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 + V_1 - V_3 + V_5 & V_3 + V_4 \\ V_5 + V_6 & V_1 - V_2 + V_4 - V_6 \end{bmatrix}$$

con $V_0 = (b-d)(g+h)$, $V_1 = (a+d)(e+h)$, $V_2 = (a-c)(e+f)$, $V_3 = (a+b)h$, $V_4 = a(f-h)$, $V_5 = d(g-e)$, $V_6 = (c+d)e$.

Così $T(n) \leq 7 \underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{prod}} + \underbrace{c \cdot n^2}_{\text{somme}}$, e allora per il master theorem $\left(7\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \underbrace{\frac{7}{4}}_{\delta > 1} n^2\right)$,

$T(n) = O(n^{\log_2(7)})$ con

$\log_2(7) \approx 2{,}8074$.

altro esempio: nearest neighbor

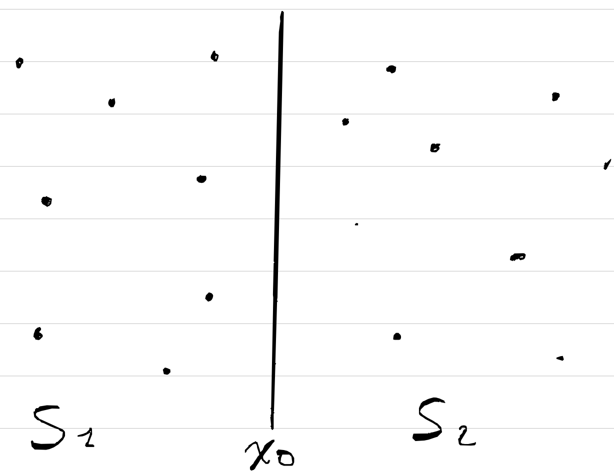
→ dato $S \subseteq \mathbb{R}^k$ finito, trovare $\operatorname{argmin}_{(x,y) \in S \times S} d(x,y)$.

→ per $k > 2$ si usa una riduzione a uno spazio vett di dim $\ll k$ ottenendo una buona approssimazione

→ vediamo il caso più semplice di dist euclidea e $n=2$.

BASELINE: trovare il min tra le dist per ispezione → $\Theta\left(\binom{n}{2}\right) = \Theta(n^2)$.

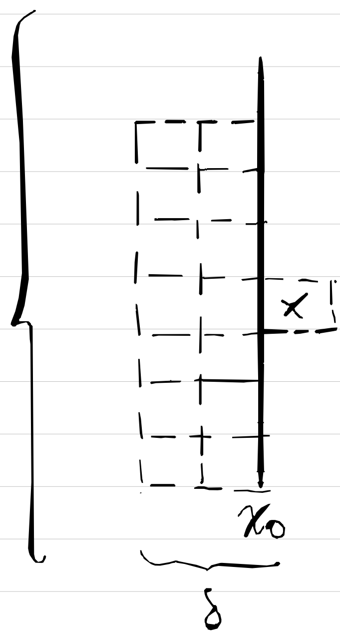
Idea: per $n \leq 3$ agiamo per $|S| = n$ ispezione diretta, per $n > 3$ ordiniamo S sulle x e poi sulle y $[O(n \log n)]$, e scelto un x_0 partizioniamo S in $S_1 \cup S_2$ in base all'ord. $(S_1 \leq S_2)$.



→ applichiamo l'alg ricorsivamente su S_1 e S_2, ottenendo le rispettive coppie minime.
Adesso ci manca di considerare l'"impero" sui punti vicini alla barriera.

Prop. è suff consid le coppie $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ t.c. $d(p_1, p_2) < \delta \triangleq \min(\underbrace{\delta_1}_{\text{in } S_1}, \underbrace{\delta_2}_{\text{in } S_2})$. → ovvio

impero



in ogni quadrato c'è un solo p.to (altrimenti verrebbe violata la minimalità di δ)

x_0 → $O(1)$ vicini confrontabili !! → max 10

Selezioniamo $S_y = \{(x,y) \in S \mid |x - x_0| \le \delta\}$ (già ordinato da prima) e scorrendo in ordine, confrontando coppia per coppia solo i vicini //

Quindi $T(n) \le \underbrace{2\, T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{divide}} + cn \xrightarrow{M.T.}$

$\rightarrow T(n) = O(n \cdot \log n)$. Sommando l'ordinam. iniziale si ottiene dunque $O(n \cdot \log n)$ finale.