

(In)trattabilità computazionale

Esempio (comm. euleriani e comm. hamiltoniani)

Se G è un grafo non orientato, si dice CAMMINO EULERIANO un cammino che tocchi tutti gli archi di G una sola volta. Vale il seguente teorema:

Teorema G ammette un cammino euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari o solo due nodi hanno grado dispari.

→ la parte (\Rightarrow) è molto semplice:
se u è un nodo né iniziale né finale, allora — perché una volta toccato bisogna "uscire" e si possono usare gli archi una singola volta — $\deg u \equiv 0 \pmod{2}$. Per l'handshaking lemma, allora — prendendo tale eq. mod 2 — $\deg s \equiv \deg f \pmod{2}$, dove s è l'iniziale e f è quello finale.

→ la parte (\Leftarrow) può essere dimostrata esibendo l'algoritmo di Fleury.

Un CAMMINO HAMILTONIANO tocca invece tutti i nodi una singola volta. È molto più difficile trovare un tale cammino e un'idea ingenua è quella di generare le permutazioni dei nodi e verificare se rapp. un comm. hamiltoniano ($O(n!)$).

→ mentre per un cammino euleriano la ricerca è "facile" (l'algo di Fleury è polinomiale), per un cammino hamiltoniano è "facile" (ancora polinomiale) solo se lo verifica.

I PROBLEMI DECISIONALI si dividono infatti in due categorie (non disgiunte):

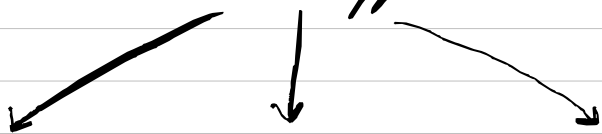
P
algoritmo risolutivo polinomiale
(e.g. comm. euler.)

NP
esiste un verificatore polinomiale in grado di determinare dato un input se questo risolve o no il prob.
(e.g. comm. ham.)

Chiaramente $P \subseteq NP$.

Ad oggi è un problema aperto stabilire se $P = NP$ o meno.

Esempio (K -colorazioni) Dato una mappa di paesi confinanti stabilire se esiste una colorazione usando K colori tale per cui paesi conf. hanno colore differenti.



$K=2$
 prob. P
 (si crea un grafo dove $(i, j) \in E$ se i e j sono conf. e si prova ad assegnare colori diversi a paesi conf.)

$K=3$
 prob. NP completo

$K=4$
 sempre possibile (tesi dei quattro colori)

Reduzione polinomiale

Dati due prob. decisionali π_1 e π_2 si vuole $\pi_1 \leq \pi_2$ se \exists alg. det. polin. T t.c. $\forall x \in \Sigma^*$ $x \in \pi_1 \iff T(x) \in \pi_2$.

Esempio Se π_1 è il prob. di stab. \exists cicli hamiltoniani e π_2 è il TSP (travel salesperson problem) — ossia date n città con per. D_{ij} (costo per andare da i a j) e K , det. se esiste permut. delle città con costo tot. $\leq K$ — allora

vole scegliere π_2 & π_2 i nodi come attore
 e porre:

$$\begin{cases} D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 2 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases} \rightsquigarrow O(|V|^2) \text{ di trasf.} \\ M = |V| \end{cases}$$

È chiaro che $X \in \pi_2 \iff T(X) \in \pi_2$.
 Se G è hamilt., allora un ciclo hamilt. risolve π_2 , se G non è hamilt., non possono \exists perm. di costo $\leq |V|$ (deve essere usato un D_{ij} con $D_{ij} = 2$ — altri G sarebbe ham.)

\rightsquigarrow chiom. α è RIFLESSIVA ($\pi \alpha \pi$ tramite id) e TRANSITIVA (si usa le comp.)

Prop. Se $\pi_2 \alpha \pi_2$, allora $\pi_2 \in P \implies \implies \pi_2 \in P$ (quindi $\pi_2 \notin P \implies \implies \pi_2 \notin P$).

Dim. Se π_2 è polinom., allora la comp. dell'alg. risul. di π_2 con T è dato per $\pi_2 \alpha \pi_2$ è polin., dunque anche π_2 è polin. ■

Si dice che π è **NP-completo** (NP-C, NPC) se:

- $\pi \in NP$
- $\forall \pi' \in NP, \pi' \leq \pi \rightarrow$ ogni prob. NP si rid. ad. a π .

Esempio (SAT — boolean SATisfiability prob.)
Dato n var. booleane x_1, \dots, x_n e una formula in forma normale congiuntiva (CNF) — ossia and di j clause (che sono or di letterali, i.e. x_i e $\bar{x}_i = \neg x_i$) — det.

ci sono 2^n assegn. possib. } se \exists un assegnom. di var. tutte x_i tale per cui la formula è vera/soddisfatta.

\rightarrow il **teorema di Cook-Levin** mostra che SAT \in NPC.

\rightarrow per i prob. NPC α è simmetrica e vale inoltre — grazie alla transitività — che $\pi \in NP$ è NPC se $\exists \pi' \in NPC$ t.c. $\pi' \leq \pi$.

\rightarrow se un prob. NPC risultasse $\in P$, allora NP sarebbe uguale a P!