(In)trattabilità computazionale

Esempio (camm. euleriani e camm. hamiltoniani)

Se G è un grafo <u>non</u> orientato, si dice **CAMMINO EULERIANO** un cammino che tocchi <u>tutti</u> gli <u>archi</u> di G una sola volta. Vale il seguente teorema:

(G connesso)

Teorema G ammette un cammino euleriano sse tutti i nodi hanno grado pari o solo due nodi hanno grado dispari.

→ la freccia ($\Rightarrow$) è molto semplice: se u è un nodo né iniziale né finale, allora — poiché una volta toccato bisogna "usarne" e si possono usare gli archi una singola volta — $\deg u \equiv 0 \pmod 2$. Per l'handshaking lemma, allora — prendendo tale eq. mod 2 — $\deg s \equiv \deg f \pmod 2$, dove s e f sono il nodo iniziale e quello finale.

→ la freccia ($\Leftarrow$) può essere dimostrata esibendo l'algoritmo di Fleury.

Un ==CAMMINO HAMILTONIANO== tocca invece tutti i nodi una singola volta. È molto più difficile trovare un tale cammino e un'idea ingenua è quella di generare le permutaz. dei nodi e verificare se rappr. un camm. hamiltoniano ($O(n!)$).

→ mentre per un cammino euleriano la ricerca è "facile" (l'alg. di Fleury è polinomiale), per un cammino hamiltoniano è "facile" (ancora polinomiale) solo la verifica.

I ==PROBLEMI DECISIONALI== si dividono infatti in due categorie (<u>non</u> disgiunte):

P

algoritmo risolutivo polinomiale (e.g. camm. euler.)

NP

esiste un ==verificatore polinomiale== in grado di determinare dato un input se questo risolve o no il prob. (e.g. camm. ham.)

Chiaramente $P \subseteq NP$.
Ad oggi è un problema aperto stabilire se $P = NP$ o meno.

Esempio (K-colorazioni) Data una mappa di paesi confinanti stabilire se esiste una colorazione usando K colori tale per cui paesi conf. hanno colori differenti.

K = 2
prob. P
(si crea un grafo dove $(i, j) \in E$ se i e j sono conf. e si prova ad assegnare colori diversi a paesi conf.)

K = 3
prob. NP completo

K = 4
sempre possibile (teor. dei quattro colori)

Riduzione polinomiale

Dati due prob. decisionali π_1 e π_2 si scrive $\pi_1 \propto \pi_2$ se $\exists$ alg. det. polin. T t.c. $\forall x \in \Sigma^*$ $x \in \pi_1 \iff T(x) \in \pi_2$.

Esempio Se π_1 è il prob. di stab. se $\exists$ cicli hamiltoniani e π_2 è il TSP (travel salesperson problem) — ossia date n città con par. D_{ij} (costo per andare da i a j) e K, det. se esiste permut. delle città con costo tot. $\leq K$ — allora vale $\pi_1 \propto \pi_2$. Infatti basta scegliere i nodi come città e porre:

$$\begin{cases} D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 2 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases} \rightsquigarrow O(|V|^2) \text{ di trasf.} \\ M = |V| \end{cases}$$

È chiaro che $x \in \pi_1 \iff T(x) \in \pi_2$. Se G è hamilt., allora un ciclo hamilt. risolve π_2; se G **non** è hamilt., **non** possono $\exists$ perm. di costo $\leq |V|$ (deve essere usato un D_{ij} con $D_{ij}=2$ — altr. G sarebbe ham.)

$\rightsquigarrow$ chiaram. $\propto$ è RIFLESSIVA ($\pi \propto \pi$ tramite id) e TRANSITIVA (si usa la comp.)

Prop. Se $\pi_1 \propto \pi_2$, allora $\pi_2 \in P \implies$
$\implies \pi_1 \in P$ (quindi $\pi_1 \notin P \implies$
$\implies \pi_2 \notin P$).

Dim. Se π_2 è polinom., allora la comp dell'alg. risol. di π_2 con T dato per $\pi_1 \propto \pi_2$ è polin., dunque anche π_1 è polin. ∎

Si dice che π è **NP-completo** (**NP-C, NPC**) se:

- $\pi \in NP$
- $\forall \pi' \in NP,\ \pi' \propto \pi$ ⇝ ogni prob. NP si rid. pol. a π.

Esempio (SAT — boolean SATisfiability prob.)
Date n var. booleane $x_1, \dots, x_n$ e una formula in forma normale congiuntiva (CNF) — ossia and di clausole (che sono or di letterali, i.e. x_i e $\overline{x_i} = \neg x_i$) — det.
ci sono 2^n assegn. possib. $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \exists \text{ un assegnam. di verità sulle} \\ x_i \text{ tale per cui la formula è} \\ \text{vera/soddisfatta.} \end{array} \right.$

⇝ il **teorema di Cook-Levin** mostra che $SAT \in NPC$.

⇝ per i prob. NPC $\propto$ è simmetrica e vale inoltre — grazie alla transitività — che π NP è NPC sse $\exists\ \pi' \in NPC$ t.c. $\pi' \propto \pi$.

⇝ se un prob. NPC risultasse $\in P$, allora NP sarebbe uguale a P!