Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

27 e 31 marzo 2023

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Proprietà e teoremi principali sul prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto scalare.

Proposizione. (formula delle dimensioni del prodotto scalare) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to W^*$ tale che $f(\underline{v})$ è un funzionale di W^* tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W$. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker} f$, da cui, per la formula delle dimensioni, $\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg} f$. Inoltre, si osserva anche che $f = i^\top \circ a_\varphi$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$, infatti $f(\underline{v}) = a_\varphi(\underline{v}) \circ i$ è un funzionale di W^* tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi)$.

Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to W^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}_V$ una base di V. Allora le matrice associate di f e di g sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A}\, \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B}\, \underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$, si deduce che $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g) \implies \mathrm{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \mathrm{rg}(a_\varphi \circ i) = \mathrm{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \mathrm{Ker}\, a_\varphi|_W = \dim W - \dim(W \cap \underbrace{\mathrm{Ker}\, a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$. Si conclude allora, sostituendo quest'ultima identità nell'identità ricavata a inizio dimostrazione che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. $\square$

Osservazione. Si possono fare alcune osservazioni sul radicale di un solo elemento $\underline{w}$ e su quello del suo sottospazio generato $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$:

- $\underline{w}^\perp = W^\perp$,
- $\underline{w} \notin W^\perp \iff \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp \iff \underline{w}$ non è isotropo $= \{\underline{0}\} \iff V = W \oplus W^\perp$.

Definizione. Si definisce **base ortogonale** di V una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

Proposizione. (formula di polarizzazione) Se $\mathrm{char}\, \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica q.

Dimostrazione. Si nota infatti che $q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, e quindi, poiché 2 è invertibile per ipotesi, che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 2^{-1}(q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}))$. $\square$

Teorema. (di Lagrange) Ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ tale per cui $\mathrm{char}\, \mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Sia dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la dimostrazione è triviale. Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se V ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n-1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a W, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di V. Se invece V non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. $\square$

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà $\mathrm{char}\, \mathbb{K} \neq 2$.

Teorema. (di Sylvester, caso complesso) Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g. $\mathbb{C}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di $\mathbb{K}$ è per ipotesi quadrato di un altro elemento di $\mathbb{K}$, si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) = 0$, $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$, e altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove r è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero. $\square$

Osservazione. Si possono effettuare alcune considerazioni sul teorema di Sylvester complesso.

▶ Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che $A \cong B \iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, se A e B sono matrici simmetriche: infatti ogni matrice simmetrica rappresenta una prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che r nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente. In particolare, se due matrici simmetriche hanno stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di congruenza, sono congruenti a loro volta.
▶ Due matrici simmetriche con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.
▶ Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di elementi nulli.

Nota. La notazione $\varphi > 0$ indica che φ è definito positivo. Analogamente $\varphi < 0$ indica che φ è definito negativo.

Definizione. Data una base ortogonale $\mathcal{B}$ di V rispetto al prodotto scalare φ, si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, && (\textbf{indice di positività}) \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, && (\textbf{indice di negatività}) \\ \iota_0(\varphi). &= \dim V^\perp && (\textbf{indice di nullità}) \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare φ è noto dal contesto, si omette e si scrive solo ι_+, ι_- e ι_0. In particolare, la terna $\sigma = (i_+, i_-, i_0)$ è detta **segnatura** del prodotto φ.

Teorema. (di Sylvester, caso reale) Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array}\right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente ι_+ vettori della base con forma quadratica positiva, ι_- con forma negativa e ι_0 con forma nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) > 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$; se $q(\underline{v_i}) < 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{-q(\underline{v_i})}}$; altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$. Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora a il numero di vettori della base con forma quadratica positiva, b il numero di vettori con forma negativa e c quello dei vettori con forma nulla. Si consideri $W_+ = \operatorname{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_a})$, $W_- = \operatorname{Span}(\underline{v_{a+1}}, ..., \underline{v_b})$, $W_0 = \operatorname{Span}(\underline{v_{b+1}}, ..., \underline{v_c})$.

Sia $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si osserva che $c = n - \operatorname{rg}(M) = \dim \operatorname{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$. Inoltre $\forall\, \underline{v} \in W_+$, dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v_i}) > 0$, e quindi $\varphi|_{W_+} > 0$, da cui $\iota_+ \geq a$. Analogamente $\iota_- \geq b$.

Si mostra ora che è impossibile che $\iota_+ > a$. Se così infatti fosse, sia W tale che $\dim W = \iota_+$ e che $\varphi|_W > 0$. $\iota_+ + b + c$ sarebbe maggiore di $a+b+c = n := \dim V$. Quindi, per la formula di Grassman, $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$, ossia esisterebbe $\underline{v} \neq \{\underline{0}\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$. Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia $q(\underline{v}) > 0$ che $q(\underline{v}) < 0$, $\lightning$. Quindi $\iota_+ = a$, e analogamente $\iota_- = b$. $\square$

Definizione. Si dice **base di Sylvester** una base di V tale per cui la matrice associata di φ sia esattamente nella forma vista nella dimostrazione del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

Osservazione.
▶ Si può dunque definire la segnatura di una matrice simmetrica come la segnatura di una qualsiasi sua base ortogonale, dal momento che tale segnatura è invariante per cambiamento di base.
▶ La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, sono entrambe congruenti alla matrice come vista nella dimostrazione della forma reale del teorema di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti devono contenere gli stessi numeri ι_+, ι_- e ι_0 di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.
▶ Se $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_k}$ sono tutti i vettori di una base ortogonale $\mathcal{B}$ con forma quadratica nulla, si osserva che $W = \operatorname{Span}(\underline{w_1}, ..., \underline{w_k})$ altro non è che $V^\perp$ stesso. Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che $\dim W = \dim \operatorname{Ker}(M_\mathcal{B}(\varphi)) = \dim V^\perp$. Inoltre, se $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w_i}, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w_i} + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w_i}) = 0$, e quindi $W \subseteq V^\perp$, da cui si conclude che $W = V^\perp$.
▶ Vale in particolare che $\operatorname{rg}(\varphi) = \iota_+ + \iota_-$, mentre $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = \iota_0$, e quindi $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$.

Definizione. Dati due spazi vettoriali (V, φ) e (V', φ') dotati di prodotto scalare sullo stesso campo $\mathbb{K}$, si dice che V e V' sono **isometrici** se esiste un isomorfismo f, detto isometria, che preserva tali che prodotti, ossia tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})).$$

Esercizio 1.
▶ $f : V \to V'$ è un isometria $\iff$ per una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\}$ di V, $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) \iff$ vale per ogni base.

Proposizione. Per (V, φ) e (V', φ') sono equivalenti:

(i) V e V' sono isometrici;

(ii) $\forall$ base $\mathcal{B}$ di V, $\mathcal{B}'$ di V', $M_\mathcal{B}(\varphi)$ e $M'_\mathcal{B}(\varphi')$ sono congruenti;

(iii) lo stesso ma per una base.

Dimostrazione. (1-2)
($\Longrightarrow$) Sia $\mathcal{B}'' = f(\mathcal{B})$. Allora $M_{\mathcal{B}''}(\varphi') = (\varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))$. Allora, per la formula di cambiamento di base, le matrici $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti.
($\Longleftarrow$) Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = P^{\top} B P$ e $B = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Allora $a_{ij} = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \ldots = \varphi'(\underline{v_i^{ii}}, \underline{v_j^{ii}})$, dove $\underline{v_i^{ii}}$ è base perché P è invertibile. Allora l'applicazione $f : V \to V'$ che manda $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i^{''}}$ è un isometria.
(2-3) esercizio. ☐

Proposizione. (V, φ) e (V', φ') spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ sono isometrici $\iff$ φ e φ' hanno la stessa segnatura.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Basta che prendi la solita base.
($\Longleftarrow$) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ basi di Sylvester di V e di V'. Si definisce allora l'applicazione $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{v_i}) = \underline{w_i}$: essa è un isometria. ☐

Corollario. Due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

Definizione. (somma diretta ortogonale) $V = U \oplus^{\perp} W$.

Osservazione.
▶ se $V = U \oplus^{\perp} W$, allora $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_V) + \iota_+(\varphi|_W)$, e analogamente per gli altri indici.

Esempio. Per $\varphi = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$.

Definizione. Sia $\mathbb{K}$ qualunque. $W \subseteq V$ si dice sottospazio isotropo se $\varphi|_W = 0$.

Osservazione.
▶ $V^{\perp}$ è isotropo,
▶ $\underline{v}$ è un vettore isotropo $\iff$ $W = \mathrm{Span}(\underline{v})$ è sottospazio isotropo,
▶ $W \subseteq V$ è isotropo $\iff$ $W \subseteq W^{\perp}$.

Proposizione. Sia φ non degenere. $W \subseteq V$ isotropo, allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$.

Dimostrazione. $W \subseteq W^{\perp} \implies \dim W \leq \dim W^{\perp} \implies \dim W \leq \dim V - \dim W \implies \dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$. ☐

Definizione. Si definisce **indice di Witt** $W(\varphi)$ di (V, φ) come la massima dimensione di un sottospazio isotropo.

Osservazione.
▶ Se $\varphi > 0$, $W(\varphi) = 0$.

Proposizione. Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), \iota_0(\varphi))$, con φ non degenere, $W(\varphi) = \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$.

Dimostrazione. Sia ad esempio $\iota_-(\varphi) \leq \iota_+(\varphi)$. Se W è un sottospazio con $\dim W > \iota_-(\phi)$, e W^+ è un sottospazio con $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$ e $\varphi|_{W^+} > 0 \implies \dim(W \cap W^+) > 0$, e quindi W non è isotropo (quindi $W(\varphi) < \iota_-(\varphi)$).

Sia $\mathcal{B}$ una base di Sylvester. Per costruirlo prendi coppie della base originale facendo la differenza e nota che ne prendi esattamente quante iota-. □