Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

28 aprile 2023

Indipendenza e applicazioni affini

Fissato un origine O dello spazio affine, si possono sempre considerare due bigezioni:

- La bigezione $i_O : E \to V$ tale che $i(P) = P - O \in V$,
- La bigezione $j_O : V \to E$ tale che $j(\underline{v}) = O + \underline{v} \in E$.

Si osserva inoltre che i_O e j_O sono l'una la funzione inversa dell'altra.
Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ di dimensione n, si può considerare V stesso come uno spazio affine, denotato con le usuali operazioni:

(a) $\underline{v}+\underline{w}$, dove $\underline{v} \in V$ è inteso come *punto* di V e $\underline{w} \in W$ come il vettore che viene applicato su $\underline{w}$, coincide con la somma tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ (e analogamente $\underline{w} - \underline{v}$ è esattamente $\underline{w} - \underline{v}$).

(b) Le bigezioni considerate inizialmente sono in particolare due mappe tali che $i_{\underline{v_0}}(\underline{v}) = \underline{v} - \underline{v_0}$ e che $j_{\underline{v_0}}(\underline{v}) = \underline{v_0} + \underline{v}$.

Definizione (spazio affine standard)**.** Si denota con $\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ lo **spazio affine standard** costruito sullo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Analogamente si indica con A_V lo spazio affine costruito su uno spazio vettoriale V.

Osservazione.
► Una combinazione affine di A_V è in particolare una combinazione lineare di V. Infatti, se $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v_i}$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora, fissato $\underline{v_0} \in V$, $\underline{v} = \underline{v_0} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(\underline{v_i} - \underline{v_0}) = \underline{v_0} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v_i} - \underline{v_0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v_i}$.
► Come vi è una bigezione data dal passaggio alle coordinate da V a $\mathbb{K}^n$, scelta una base $\mathcal{B}$ di V e un punto O di E, vi è anche una bigezione $\varphi_{O,\mathcal{B}}$ da E a $\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ data dalla seguente costruzione:

$$\varphi_{O,\mathcal{B}}(P) = [P - O]_\mathcal{B}.$$

Proposizione. Sia $D \subseteq E$. Allora D è un sottospazio affine di $E \iff$ fissato $P_0 \in D$, l'insieme $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k} \in D_0$. Allora, per definizione, esistono P_1, ..., $P_k \in D$ tali che $\underline{v_i} = P_i - P_0 \; \forall \, 1 \leq i \leq k$. Siano λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Sia inoltre $P = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v_i} \in E$. Sia infine $O \in D$. Allora $P = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v_i} = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O + O - P_0) = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_0 - O) = O + (1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i)(P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O)$. In particolare P è una combinazione affine di P_1, ..., $P_k \in D$, e quindi, per ipotesi, appartiene a D. Allora $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v_i} \in D_0$. Poiché allora D_0 è chiuso per combinazioni lineari, D_0 è un sottospazio vettoriale di V.

($\impliedby$) Sia $P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, con P_1, ..., $P_k \in D$ e λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Allora $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) \in D_0$ per ipotesi, essendo combinazione lineare di elementi di D_0. Pertanto, poiché esiste un solo punto P' tale che $P' = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$, affinché $\sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$ appartenga a D_0, deve valere anche che $P \in D$. Si conclude quindi che D è un sottospazio affine, essendo chiuso per combinazioni affini. $\square$

Osservazione. Sia D un sottospazio affine di E.

- ▶ Vale la seguente identità $D_0 = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$. Sia infatti $A = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$. Chiaramente $D_0 \subseteq A$. Inoltre, se $P - Q \in A$, $P - Q = (P - P_0) - (Q - P_0)$. Pertanto, essendo $P - Q$ combinazione lineari di elementi di D_0, ed essendo D_0 spazio vettoriale per la proposizione precedente, $P - Q \in D_0 \implies A \subseteq D_0$, da cui si conclude che $D_0 = A$.
- ▶ Pertanto D_0 è unico, a prescindere dalla scelta di $P_0 \in D$.
- ▶ Vale che $D = P_0 + D_0$, ossia D è il traslato di D mediante il punto P_0.

Definizione (direzione di un sottospazio affine)**.** Si definisce $D_0 = \mathrm{Giac}(D) = \{P - Q \mid P, Q \in D\} \subseteq V$ come la **direzione** (o *giacitura*) del sottospazio affine D.

Definizione (dimensione un sottospazio affine)**.** Dato D sottospazio affine di E, si dice dimensione di D, indicata con $\dim D$, la dimensione della sua direzione D_0, ossia $\dim D_0$. In particolare $\dim E = \dim V$.

Definizione (sottospazi affini paralleli)**.** Due sottospazi affini si dicono **paralleli** se condividono la stessa direzione.

Osservazione.
▶ I sottospazi affini di dimensione zero sono tutti i punti di E.
▶ I sottospazi affini di dimensione uno sono le *rette affini*, mentre quelli di dimensione due sono i *piani affini*.
▶ Si dice *iperpiano affine* un sottospazio affine di codimensione 1, ossia di dimensione $n-1$.

Definizione (punti affinemente indipendenti)**.** Un insieme di punti P_1, ..., P_k di E si dice **affinemente indipendente** se ogni combinazione affine di tali punti è unica. Analogamente un sottoinsieme $S \subseteq E$ si dice affinemente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.

Proposizione. Dati i punti P_1, ..., $P_k \in E$, sono equivalenti le seguenti affermazioni.

(i) P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti,

(ii) $\forall\, i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$, $P_i \notin \operatorname{Aff}(P_1, \ldots, P_k)$, con P_i escluso,

(iii) $\forall\, i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$ l'insieme di vettori $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ è linearmente indipendente,

(iv) $\exists\, i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$ per il quale l'insieme di vettori $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Siano P_1, ..., P_k affinemente indipendenti. Sia $i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$. Allora chiaramente (i) $\iff$ (ii), dacché se P_i appartenesse a $\operatorname{Aff}(P_1, \ldots, P_k)$, con P_i escluso, si violerebbe l'unicità della combinazione affine di P_i, e analogamente se esistessero due combinazioni affini in diversi scalari dello stesso punto si potrebbe un punto P_j con $1 \leq j \leq k$ come combinazione affine degli altri punti.

Siano allora λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$, con λ_i escluso, tali che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j (P_j - P_i) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere P_i nel seguente modo:

$$P_i = \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j\right) P_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j P_j.$$

Dal momento che la scrittura di P_i è unica per ipotesi, $\lambda_j = 0 \; \forall \, 1 \leq j \leq k$ con $j \neq i$, e dunque l'insieme di vettori $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ è linearmente indipendente, per cui (ii) $\implies$ (iii). Analogamente si deduce anche che (iii) $\implies$ (i) e che (iii) $\implies$ (iv). Pertanto (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii).

Si assuma ora l'ipotesi (iv) e sia $t \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq t \leq k$ tale che $t \neq i$. Siano dunque λ_1, ..., λ_k, con λ_t escluso, tale che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j (P_j - P_t) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere la somma come:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j (P_j - P_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j (P_t - P_i) = \underline{0},$$

ossia come combinazione lineare dei vettori della forma $P_j - P_i$. Allora, poiché per ipotesi tali vettori sono linearmente indipendenti, vale che:

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 & \text{se } j \neq t \text{ e } j \neq i, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j = 0 & \implies \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme di vettori $\{P_j - P_t \mid 1 \leq j \leq k, j \neq t\}$ è linearmente indipendente, da cui vale che (iv) $\implies$ (iii). Si conclude dunque che (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv), ossia la tesi. $\square$

Osservazione.
▶ Si osserva che il numero massimo di punti affinemente indipendenti di un sottospazio affine D di dimensione k è $k+1$, dacché, fissato un punto, vi possono essere al più k vettori linearmente indipendenti.
▶ Un punto di E è sempre affinemente indipendente, dacché la sua unica combinazione affine è sé stesso.

Proposizione. Sia $E = \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$. Allora i punti P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti se e solo se i vettori $\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ..., $\hat{P}_k = \begin{pmatrix} P_k \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\Longrightarrow$) Siano λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\lambda_1 \hat{P}_1 + \ldots + \lambda_k \hat{P}_k = \underline{0}$. Allora $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ e $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0$.

Pertanto, sapendo che $\lambda_1 = -\lambda_2 + \ldots - \lambda_k$, vale la seguente identità:

$$\lambda_2(P_2 - P_1) + \ldots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0.$$

Poiché i punti P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti, per la proposizione precedente, allora i vettori $P_2 - P_1$, ..., $P_k - P_1$ sono linearmente indipendenti, per cui $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Pertanto anche $\lambda_1 = 0$, e quindi i vettori $\hat{P}_1$, ..., $\hat{P}_k$ sono linearmente indipendenti.

($\Longleftarrow$) Siano λ_2, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\lambda_2(P_2 - P_1) + \ldots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0$. Sia allora $\lambda_1 = -\lambda_2 + \ldots - \lambda_k$. Si osserva dunque che $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$ e che $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0$, da cui si deduce che $\lambda_1 \hat{P}_1 + \ldots + \lambda_k \hat{P}_k = 0$. Dal momento però che $\hat{P}_1$, ..., $\hat{P}_k$ sono linearmente indipendenti, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, da cui la tesi. $\square$

Se si impone $\lambda_i \geq 0$, si definisce che la combinazione è una combinazione convessa. Si definisce baricentro il punto con $\lambda_i = \frac{1}{n}$.

Definizione (inviluppo convesso)**.** Si dice IC(S) di un insieme $S \subseteq E$ l'insieme delle combinazioni convesse di S (finite).

Definizione. Sia E uno spazio affine su V, E' spazio affine su V' (sullo stesso $\mathbb{K}$) un'applicazione $f : E \to E'$ si dice app. affine se conserva le combinazioni affini ($f(\sum \lambda_i P_i) = \sum \lambda_i f(P_i)$, $\sum \lambda_i = 1$).

Teorema. Sia $f : E \to E'$ affine. Allora $\exists$ unica app. lineare $g : V \to V'$ lineare tale che valga $f(O + \underline{v}) = f(O) + g(\underline{v})$, per ogni scelta di $O \in E$.

Dimostrazione. Sia $O \in E$. L'applicazione $g_O : V \to V'$ data da $g_O(\underline{v}) = f(O + \underline{v}) - f(O)$. Si dimostra che g_O è lineare. $\square$