Note del corso di Analisi matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

28 aprile 2023

Integrali impropri

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Definizione (integrale improprio semplice)**.** Si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ con $a \in \mathbb{R}$ è un **integrale improprio semplice** in b se f è definita e continua su $[a, b)$ e $b = \pm\infty$, f non è definita in b o non è continua in b. Si definisce in modo analogo un integrale improprio semplice se $b \in \mathbb{R}$.

In modo più generale, si dice che tale integrale è improprio semplice se f è integrabile in $[a, b'] \;\forall\, b' < b$, ma non su $[a, b]$

Esempio.
▶ L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ è un integrale improprio semplice dacché $\frac{1}{\sin(x)}$ è definito in 1, ma non in 0, ed è continuo e definito su $(0, 1)$.

▶ L'integrale $\int_0^\pi \frac{1}{\sin(x)}\,dx$, invece, non è improprio semplice, dal momento che $\frac{1}{\sin(x)}$ non è definito né in 0 né in π.

▶ L'integrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ non è improprio semplice poiché $\frac{1}{x}$ non è definito in 0.

Definizione. Il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ è definito come $\lim_{b' \to b^-} \int_a^{b'} f(x)\,dx$, se esiste.

Vi sono dunque quattro comportamenti possibili dell'integrale improprio semplice $\int_a^b f(x)\,dx$:

(a) esiste ed è finito (ossia, **converge**),

(b) esiste ed è $+\infty$ (ossia, **diverge a** $+\infty$),

(c) esiste ed è $-\infty$ (ossia, **diverge a** $-\infty$),

(d) non esiste.

Osservazione. Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua con primitiva $F : [a,b) \to \mathbb{R}$. Allora $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b^-}[F(b')] - F(a)$.

Esempio.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{a-1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1, \\ \frac{1}{1-a} & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- $\int_a^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-a}$.
- $\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx$ non esiste.

Nota. Si impiega la notazione $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_c^d g(x)\,dx$ per indicare che i due integrali hanno lo stesso comportamento.

Osservazione.

- Il comportamento di $\int_a^b f(x)\,dx$, se $a \in \mathbb{R}$, non dipende dalla scelta di a.

- Sia $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ con limite $L \neq 0 \in \overline{\mathbb{R}}$ a $+\infty$. Allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0, \\ -\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Se $f \geq 0$ in un intorno di b, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste sempre e vale o $+\infty$ o un numero finito.