

# I prodotti di uno spazio vettoriale

Dispense del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

A.A. 2022/2023



UNIVERSITÀ DI PISA



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione al prodotto scalare</b>	<b>5</b>
1.1	Prime definizioni	5
1.1.1	Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a $\varphi$	5
1.1.2	Prodotto definito o semidefinito	6
1.2	Il radicale di un prodotto scalare	6
1.2.1	La forma quadratica $q$ associata a $\varphi$ e vettori (an)isotropi	6
1.2.2	Matrice associata a $\varphi$ e relazione di congruenza	7
1.2.3	Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$	8
1.2.4	Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare	9
1.3	Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a $\varphi$	10
1.4	Il teorema di Lagrange e basi ortogonali	11
1.4.1	L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt	12
1.5	Il teorema di Sylvester	13
1.5.1	Caso complesso	13
1.5.2	Caso reale e segnatura di $\varphi$	14
1.5.2.1	Classificazione delle segnature per $n = 1, 2, 3$	16
1.5.2.2	Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura	17
1.5.2.3	Criterio di Sylvester per la definitezza di un prodotto scalare	19



# 1 Introduzione al prodotto scalare

**Nota.** Nel corso del documento, per  $V$ , qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ .

## 1.1 Prime definizioni

### 1.1.1 Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a $\varphi$

**Definizione** (prodotto scalare). Un **prodotto scalare** su  $V$  è una forma bilineare simmetrica  $\varphi$  con argomenti in  $V$ .

**Esempio.** Sia  $\varphi : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  tale che  $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB)$ .

- ▶  $\varphi(A + A', B) = \text{tr}((A + A')B) = \text{tr}(AB + A'B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$  (linearità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(\alpha A, B) = \text{tr}(\alpha AB) = \alpha \text{tr}(AB) = \alpha \varphi(A, B)$  (omogeneità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \varphi(B, A)$  (simmetria),
- ▶ poiché  $\varphi$  è simmetrica,  $\varphi$  è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su  $M(n, \mathbb{K})$ .

**Definizione** (vettori ortogonali). Due vettori  $\underline{v}, \underline{w} \in V$  si dicono **ortogonali** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$ , ossia  $\underline{v} \perp \underline{w}$ , se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ .

**Definizione** (somma diretta ortogonale). Siano  $U$  e  $W \subseteq V$  due sottospazi di  $V$  in somma diretta. Allora si dice che  $U$  e  $W$  sono in **somma diretta ortogonale** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  di  $V$ , ossia che  $U \oplus W = U \oplus^\perp W$ , se  $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$ .

**Definizione.** Si definisce prodotto scalare *canonico* di  $\mathbb{K}^n$  la forma bilineare simmetrica  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$  con argomenti in  $\mathbb{K}^n$  tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^\top \underline{w}, \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

**Osservazione.** Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{K}^n$  è effettivamente un prodotto scalare.

- ▶  $\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)^\top \underline{w} = (\underline{v}_1^\top + \underline{v}_2^\top) \underline{w} = \underline{v}_1^\top \underline{w} + \underline{v}_2^\top \underline{w} = \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w})$  (linearità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(\alpha \underline{v}, \underline{w}) = (\alpha \underline{v})^\top \underline{w} = \alpha \underline{v}^\top \underline{w} = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w})$  (omogeneità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}^\top \underline{w} = (\underline{v}^\top \underline{w})^\top = \underline{w}^\top \underline{v} = \varphi(\underline{w}, \underline{v})$  (simmetria),
- ▶ poiché  $\varphi$  è simmetrica,  $\varphi$  è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su  $\mathbb{K}^n$ .

**Esempio.** Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

- ▶  $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^\top B)$  per  $M(n, \mathbb{K})$ ,
- ▶  $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$  per  $\mathbb{K}[x]$ , con  $a \in \mathbb{K}$ ,
- ▶  $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$  per  $\mathbb{K}[x]$ , con  $x_1, \dots, x_n$  distinti,
- ▶  $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$  per lo spazio delle funzioni integrabili su  $\mathbb{R}$ , con  $a, b$  in  $\mathbb{R}$ ,
- ▶  $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$  per  $\mathbb{K}^n$ , con  $A \in M(n, \mathbb{K})$  simmetrica, detto anche **prodotto scalare indotto dalla matrice  $A$** , ed indicato con  $\varphi_A$ .

### 1.1.2 Prodotto definito o semidefinito

**Definizione.** Sia<sup>1</sup>  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora un prodotto scalare  $\varphi$  si dice **definito positivo** ( $\varphi > 0$ ) se  $\underline{v} \in V$ ,  $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ . Analogamente  $\varphi$  è **definito negativo** ( $\varphi < 0$ ) se  $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$ . In generale si dice che  $\varphi$  è **definito** se è definito positivo o definito negativo.

Infine,  $\varphi$  è **semidefinito positivo** ( $\varphi \geq 0$ ) se  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \forall \underline{v} \in V$  (o **semidefinito negativo**, e quindi  $\varphi \leq 0$ , se invece  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0 \forall \underline{v} \in V$ ). Analogamente ai prodotti definiti, si dice che  $\varphi$  è **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

**Esempio.** Il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^n$  è definito positivo: infatti  $\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ , se  $(x_1, \dots, x_n) \neq \underline{0}$ .

Al contrario, il prodotto scalare  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$  non è definito positivo:  $\varphi((x, y), (x, y)) = 0$ ,  $\forall (x, y) \mid x^2 = y^2$ , ossia se  $y = x$  o  $y = -x$ .

## 1.2 Il radicale di un prodotto scalare

### 1.2.1 La forma quadratica $q$ associata a $\varphi$ e vettori (an)isotropi

**Definizione.** Ad un dato prodotto scalare  $\varphi$  di  $V$  si associa una mappa  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ , detta **forma quadratica**, tale che  $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$ .

**Osservazione.** Si osserva che  $q$  non è lineare in generale: infatti  $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione** (vettore (an)isotropo). Un vettore  $\underline{v} \in V$  si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  se  $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ . Al contrario,  $\underline{v}$  si dice **anisotropo** se non è isotropo, ossia se  $q(\underline{v}) \neq 0$ .

**Definizione** (cono isotropo). Si definisce **cono isotropo** di  $V$  rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  il seguente insieme:

<sup>1</sup>In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

## 1 Introduzione al prodotto scalare

$$\text{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di  $V$ .

**Esempio.** Rispetto al prodotto scalare  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ , i vettori isotropi sono i vettori della forma  $(x, y, z)$  tali che  $x^2 + y^2 = z^2$ , e quindi  $\text{CI}(\varphi)$  è l'insieme dei vettori stanti sul cono di equazione  $x^2 + y^2 = z^2$ .

### 1.2.2 Matrice associata a $\varphi$ e relazione di congruenza

**Osservazione.** Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie  $\underline{v}_i, \underline{v}_j$  estraibili da una base  $\mathcal{B}$ . Infatti, se  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ ,  $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i$  e  $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v}_i$ , allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j).$$

**Definizione.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare di  $V$  e sia  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  una base ordinata di  $V$ . Allora si definisce la **matrice associata** a  $\varphi$  come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

**Osservazione.**

►  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è simmetrica, infatti  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_i)$ , dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,

►  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$ .

**Teorema 1.1.** (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi ordinate di  $V$ . Allora, se  $\varphi$  è un prodotto scalare di  $V$  e  $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ , vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_A = P^{\top} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}_A P.$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  e  $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$ . Allora  $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^{\top} A [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}'} = (P^i)^{\top} A P^j = P_i^{\top} (A P)^j = (P^{\top} A P)_{ij}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione.** Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza  $\cong$  (denotata anche come  $\equiv$ ) definita nel seguente modo su  $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ :

$$A \cong B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top} B P.$$

**Osservazione.** Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

- ▶  $A = I^\top AI \implies A \cong A$  (riflessione),
- ▶  $A \cong B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \cong A$  (simmetria),
- ▶  $A \cong B, B \cong C \implies A = P^\top BP, B = Q^\top CQ$ , quindi  $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP) \implies A \cong C$  (transitività).

**Osservazione.** Si osservano alcune proprietà della congruenza.

- ▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
- ▶ Se  $A$  e  $B$  sono congruenti,  $A = P^\top BP \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(P^\top BP) = \text{rg}(BP) = \text{rg}(B)$ , dal momento che  $P$  e  $P^\top$  sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango  $\text{rg}(\varphi)$  di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di  $\varphi$  in una qualsiasi base di  $V$ .
- ▶ Se  $A$  e  $B$  sono congruenti,  $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top) \det(B) \det(P) = \det(P)^2 \det(B)$ . Quindi, per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

### 1.2.3 Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_B(\varphi)$

**Definizione.** Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare  $\varphi$  come lo spazio:

$$V^\perp = \text{Rad}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in V\}$$

**Osservazione.** Il radicale del prodotto scalare canonico su  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione nulla, dal momento che  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$ . In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a  $V^\perp$ .

**Definizione.** Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

**Osservazione.** Sia  $\alpha_\varphi : V \rightarrow V^*$  la mappa<sup>2</sup> tale che  $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$ , dove  $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ .

Si osserva che  $\alpha_\varphi$  è un'applicazione lineare. Infatti,  $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V, \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$ . Inoltre  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \lambda \in \mathbb{K}, \alpha_\varphi(\lambda \underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})$ .

Si osserva inoltre che  $\text{Ker } \alpha_\varphi$  raccoglie tutti i vettori  $\underline{v} \in V$  tali che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in W$ , ossia esattamente i vettori di  $V^\perp$ , per cui si conclude che  $V^\perp = \text{Ker } \alpha_\varphi$  (per cui  $V^\perp$  è effettivamente uno spazio vettoriale). Se  $V$  ha dimensione finita,  $\dim V = \dim V^*$ , e si

<sup>2</sup>In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come  $\flat$ .



## 1 Introduzione al prodotto scalare

può allora concludere che  $\dim V^\perp > 0 \iff \text{Ker } \alpha_\varphi \neq \{0\} \iff \alpha_\varphi$  non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di  $\alpha_\varphi$  hanno la stessa dimensione). In particolare,  $\alpha_\varphi$  non è invertibile se e solo se  $\det(\alpha_\varphi) = 0$ .

Sia  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  una base ordinata di  $V$ . Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su  $\mathcal{B}$ , ossia  $\mathcal{B}^* = (\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*)$ . Allora  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) \end{pmatrix} \underset{\varphi \text{ è simmetrica}}{=} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_i) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .

Si conclude allora che  $\varphi$  è degenere se e solo se  $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$  e che  $V^\perp \cong \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

### 1.2.4 Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare

**Proposizione 1.1.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora  $\varphi$  è definito  $\iff \text{CI}(\varphi) = \{0\}$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Se  $\varphi$  è definito, allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{v})$  è sicuramente diverso da zero se  $\underline{v} \neq 0$ . Pertanto  $\text{CI}(\varphi) = \{0\}$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $\varphi$  non definito. Se non esistono  $\underline{v} \neq 0, \underline{w} \neq 0 \in V$  tali che  $q(\underline{v}) > 0$  e che  $q(\underline{w}) < 0$ , allora  $\varphi$  è necessariamente semidefinito. In tal caso, poiché  $\varphi$  non è definito, deve anche esistere  $\underline{u} \in V, \underline{u} \neq 0 \mid q(\underline{u}) = 0 \implies \text{CI}(\varphi) \neq \{0\}$ .

Se invece tali  $\underline{v}, \underline{w}$  esistono, questi sono anche linearmente indipendenti. Se infatti non lo fossero, uno sarebbe il multiplo dell'altro, e quindi le loro due forme quadratiche sarebbero concordi di segno,  $\neq$ . Si consideri allora la combinazione lineare  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$  al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , imponendo che essa sia isotropa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

Dal momento che  $\frac{\Delta}{4} = \overbrace{q(\underline{v}, \underline{w})^2}^{\geq 0} - \overbrace{q(\underline{w})q(\underline{v})}^{> 0}$  è sicuramente maggiore di zero, tale equazione ammette due soluzioni reali  $\lambda_1, \lambda_2$ . In particolare  $\lambda_1$  è tale che  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq 0$ , dal momento che  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti. Allora  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}$  è un vettore isotropo non nullo di  $V \implies \text{CI}(\varphi) \neq \{0\}$ .

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se  $\text{CI}(\varphi) = \{0\}$ ,  $\varphi$  è necessariamente definito. □

**Proposizione 1.2.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora  $\varphi$  è semidefinito  $\iff \text{CI}(\varphi) = V^\perp$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

## 1 Introduzione al prodotto scalare

( $\implies$ ) Sia  $\varphi$  semidefinito. Chiaramente  $V^\perp \subseteq \text{CI}(\varphi)$ . Si assuma per assurdo che  $V^\perp \subsetneq \text{CI}(\varphi)$ . Sia allora  $\underline{v}$  tale che  $\underline{v} \in \text{CI}(\varphi)$  e che  $\underline{v} \notin V^\perp$ . Poiché  $\underline{v} \notin V^\perp$ , esiste un vettore  $\underline{w} \in V$  tale che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$ . Si osserva che  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti tra loro. Se infatti non lo fossero, esisterebbe  $\mu \in \mathbb{R}$  tale che  $\underline{w} = \mu \underline{v} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \mu \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ ,  $\sharp$ .

Si consideri allora la combinazione lineare  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ . Si consideri  $\varphi$  semidefinito positivo. In tal caso si può imporre che la valutazione di  $q$  in  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$  sia strettamente negativa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) < 0 \iff \overbrace{q(\underline{v})}^{=0} + \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) < 0.$$

In particolare, dal momento che  $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$ , tale disequazione ammette una soluzione  $\lambda_1 \neq 0$ . Inoltre  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq \underline{0}$ , dal momento che  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti. Allora si è trovato un vettore non nullo per cui la valutazione in esso di  $q$  è negativa, contraddicendo l'ipotesi di semidefinitezza positiva di  $\varphi$ ,  $\sharp$ . Analogamente si dimostra la tesi per  $\varphi$  semidefinito negativo.

( $\impliedby$ ) Sia  $\varphi$  non semidefinito. Allora devono esistere  $\underline{v}, \underline{w} \in V$  tali che  $q(\underline{v}) > 0$  e che  $q(\underline{w}) < 0$ . In particolare,  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti tra loro, dal momento che se non lo fossero, uno sarebbe multiplo dell'altro, e le valutazioni in essi di  $q$  sarebbero concordi di segno,  $\sharp$ . Si consideri allora la combinazione lineare  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ , imponendo che  $q$  si annulli in essa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

In particolare, dal momento che  $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$ , tale disequazione ammette una soluzione  $\lambda_1 \neq 0$ . Allora, per tale  $\lambda_1$ ,  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \in \text{CI}(\varphi)$ . Tuttavia  $\varphi(\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}, \underline{v} - \lambda_1 \underline{w}) = q(\underline{v}) - \underbrace{\lambda_1^2 q(\underline{w})}_{<0} > 0 \implies \underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \notin V^\perp \implies \text{CI}(\varphi) \supsetneq V^\perp$ .

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se  $\text{CI}(\varphi) = V^\perp$ ,  $\varphi$  è necessariamente semidefinito. □

### 1.3 Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a $\varphi$

**Definizione** (sottospazio ortogonale a  $W$ ). Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Si identifica allora come **sottospazio ortogonale a  $W$**  il sottospazio  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in W\}$ .

**Proposizione 1.3** (formula delle dimensioni del prodotto scalare). Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

## 1 Introduzione al prodotto scalare

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione lineare  $a_\varphi$  introdotta precedentemente. Si osserva che  $W^\perp = \text{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$ , dove  $i : W \rightarrow V$  è tale che  $i(\underline{w}) = \underline{w}$ . Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \text{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \quad (1.1)$$

Sia allora  $f = i^\top \circ a_\varphi$ . Si consideri ora l'applicazione  $g = a_\varphi \circ i : W \rightarrow V^*$ . Sia ora  $\mathcal{B}_W$  una base di  $W$  e  $\mathcal{B}_V$  una base di  $V$ . Allora le matrici associate di  $f$  e di  $g$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(f) &= M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(i^\top)}_A \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(a_\varphi)}_B = AB, \\ \text{(ii)} \quad M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(g) &= M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(a_\varphi)}_B \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(i)}_{A^\top} = BA^\top \stackrel{B^\top=B}{=} (AB)^\top. \end{aligned}$$

Poiché  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$ , si deduce che  $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) \implies \text{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \text{rg}(a_\varphi \circ i) = \text{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \text{Ker } a_\varphi|_W$ , ossia che:

$$\text{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap \text{Ker } a_\varphi)}_{V^\perp} = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \quad (1.2)$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (1.2) nell'equazione (1.1), che  $\dim V = \dim W^\perp + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$ , ossia la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Si identifica  $\underline{w}^\perp$  come il sottospazio di tutti i vettori di  $V$  ortogonali a  $\underline{w}$ . In particolare, se  $W = \text{Span}(\underline{w})$  è il sottospazio generato da  $\underline{w} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{w} \in V$ , allora  $W^\perp = \underline{w}^\perp$ . Inoltre valgono le seguenti equivalenze:  $\underline{w} \notin W^\perp \iff \text{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w}$  non è isotropo  $\iff V = W \oplus^\perp W^\perp$ .

In generale, se  $W$  è un sottospazio qualsiasi di  $V$  tale che  $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$ , vale che  $V = W \oplus^\perp W^\perp$ .

**Proposizione 1.4** (formula di polarizzazione). Se  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica  $q$ . In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

### 1.4 Il teorema di Lagrange e basi ortogonali

**Definizione.** Si definisce **base ortogonale** di  $V$  una base  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  tale per cui  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \iff i \neq j$ , ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

**Teorema 1.2** (di Lagrange). Ogni spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  tale per cui  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  ammette una base ortogonale.

*Dimostrazione.* Si dimostra il teorema per induzione su  $n := \dim V$ . Per  $n \leq 1$ , la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per  $i \leq n$ . Se  $V$  ammette un vettore non isotropo  $\underline{w}$ , sia  $W = \text{Span}(\underline{w})$  e si consideri la decomposizione  $V = W \oplus W^\perp$ . Poiché  $W^\perp$  ha dimensione  $n - 1$ , per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a  $W$ , e quindi l'aggiunta di  $\underline{w}$  a questa base ne fa una base ortogonale di  $V$ . Se invece  $V$  non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la *formula di polarizzazione*. Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione.  $\square$

### 1.4.1 L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

**Definizione** (coefficiente di Fourier). Siano  $\underline{v} \in V$  e  $\underline{w} \in V \setminus \text{CI}(\varphi)$ . Allora si definisce il **coefficiente di Fourier** di  $\underline{v}$  rispetto a  $\underline{w}$  come il rapporto  $C(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}{\varphi(\underline{w}, \underline{w})}$ .

**Algoritmo 1.1** (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt). Se  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$  (e quindi nel caso di  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dalla *Proposizione 1.1*, se  $\varphi$  è definito) ed è data una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  per  $V$ , è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da  $\mathcal{B}$  una nuova base  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathcal{B}'$  è una base ortogonale,
- (ii)  $\mathcal{B}'$  mantiene la stessa bandiera di  $\mathcal{B}$  (ossia  $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_i')$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ ).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione  $\underline{v}_1$  e si sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore  $C(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \underline{v}_1 = \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1$ , rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con  $\underline{v}_1$ . Si sta quindi applicando la mappa  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_i^{(1)}$ . Si verifica infatti che  $\underline{v}_1$  e  $\underline{v}_i^{(1)}$  sono ortogonali per  $2 \leq i \leq n$ :

$$\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i^{(1)}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi\left(\underline{v}_1, \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1\right) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) = 0.$$

Poiché  $\underline{v}_1$  non è isotropo, si deduce che vale la decomposizione  $V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ . In particolare  $\dim \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n - 1$ : essendo allora i vettori  $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$  linearmente indipendenti e appartenenti a  $\text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ , ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)})$ , fino a che non si ottiene  $V' = \{\underline{0}\}$ .

**Esempio.** Si consideri  $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , ossia  $\mathbb{R}^3$  dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1 = \underline{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_2 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_2,$
- $\underline{v}_3^{(1)} = \underline{v}_3 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_3)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Si considera ora  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})$ . Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v}_3^{(2)} = \underline{v}_3^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})}{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_2^{(1)})} \underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_3^{(1)} - \underline{v}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3.$

Quindi la base ottenuta è  $\mathcal{B}' = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ , ossia la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.5 Il teorema di Sylvester

### 1.5.1 Caso complesso

**Nota.** D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ .

**Teorema 1.3** (di Sylvester, caso complesso). Sia  $\mathbb{K}$  un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g.  $\mathbb{C}$ ). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Si riordini allora la base  $\mathcal{B}'$  in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di  $\mathbb{K}$  è per ipotesi quadrato di un altro elemento di  $\mathbb{K}$ , si sostituisca  $\mathcal{B}'$  con una base  $\mathcal{B}$  tale per cui, se  $q(\underline{v}_i) = 0$ ,  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i$ , e altrimenti  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{q(\underline{v}_i)}}$ . Allora  $\mathcal{B}$  è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove  $r$  è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero.  $\square$

**Osservazione.**

► Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo  $\mathbb{K}$  in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che  $A \cong B \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ , se  $A$  e  $B$  sono matrici simmetriche con elementi in  $\mathbb{K}$ .

Ogni matrice simmetrica rappresenta infatti un prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che  $r$  nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente.

In particolare, se due matrici simmetriche hanno lo stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti a loro volta tra di loro.

► Due matrici simmetriche in  $\mathbb{K}$  con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.

► Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di vettori isotropi, dal momento che tale numero rappresenta la dimensione del radicale  $V^\perp$ .

### 1.5.2 Caso reale e segnatura di $\varphi$

**Definizione** (segnatura di un prodotto scalare). Data una base ortogonale  $\mathcal{B}$  di  $V$  rispetto al prodotto scalare  $\varphi$ , si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, & \text{(indice di positività)} \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, & \text{(indice di negatività)} \\ \iota_0(\varphi) &= \dim V^\perp. & \text{(indice di nullità)} \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare  $\varphi$  è noto dal contesto, si semplifica la notazione scrivendo solo  $\iota_+$ ,  $\iota_-$  e  $\iota_0$ . In particolare, la terna  $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$  è detta **segnatura** del prodotto  $\varphi$ .

**Teorema 1.4** (di Sylvester, caso reale). Sia  $\mathbb{K}$  un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g.  $\mathbb{R}$ ). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array} \right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente  $\iota_+$  vettori della base con forma quadratica positiva,  $\iota_-$  con forma negativa e  $\iota_0$  con forma nulla.

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente

## 1 Introduzione al prodotto scalare

positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca  $\mathcal{B}'$  con una base  $\mathcal{B}$  tale per cui, se  $q(\underline{v}_i) > 0$ , allora  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{q(\underline{v}_i)}}$ ; se  $q(\underline{v}_i) < 0$ , allora  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{-q(\underline{v}_i)}}$ ; altrimenti  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i$ . Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora  $\mathcal{B}$  una qualsiasi base ortogonale di  $V$ . Siano inoltre  $a$  il numero di vettori della base con forma quadratica positiva,  $b$  il numero di vettori con forma negativa e  $c$  quello dei vettori con forma nulla. Si consideri  $W_+ = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a)$ ,  $W_- = \text{Span}(\underline{v}_{a+1}, \dots, \underline{v}_b)$ ,  $W_0 = \text{Span}(\underline{v}_{b+1}, \dots, \underline{v}_c)$ .

Sia  $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si osserva che  $c = n - \text{rg}(M) = \dim \text{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$ . Inoltre  $\forall \underline{v} \in W_+$ , dacché  $\mathcal{B}$  è ortogonale,  $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v}_i) > 0$ , e quindi  $\varphi|_{W_+} > 0$ , da cui  $\iota_+ \geq a$ . Analogamente  $\iota_- \geq b$ .

Si mostra ora che è impossibile che  $\iota_+ > a$ . Se così infatti fosse, sia  $W$  tale che  $\dim W = \iota_+$  e che  $\varphi|_W > 0$ .  $\iota_+ + b + c$  sarebbe maggiore di  $a + b + c = n := \dim V$ . Quindi, per la formula di Grassman,  $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$ , ossia esisterebbe  $\underline{v} \neq \underline{0} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$ . Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia  $q(\underline{v}) > 0$  che  $q(\underline{v}) < 0$ ,  $\neq$ . Quindi  $\iota_+ = a$ , e analogamente  $\iota_- = b$ .  $\square$

**Definizione.** Si dice **base di Sylvester** una base di  $V$  tale per cui la matrice associata di  $\varphi$  sia esattamente nella forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

**Osservazione.**

► Come conseguenza del teorema di Sylvester reale, si osserva che la segnatura di una matrice simmetrica reale è invariante per cambiamento di base, se la base è ortogonale.

► La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, queste sono entrambe congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti deve contenere gli stessi numeri  $\iota_+$ ,  $\iota_-$  e  $\iota_0$  di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.

► Vale che  $\varphi$  è definito positivo  $\iff \sigma = (n, 0, 0)$ . Infatti, per il teorema di Sylvester reale,  $\iota_+ = n \iff$  la dimensione del massimo sottospazio di  $V$  su cui  $\varphi$  è definito positivo è  $n \iff \varphi$  è definito positivo. Analogamente  $\varphi$  è definito negativo  $\iff \sigma = (0, n, 0)$ .

► Nello stesso spirito dei prodotti definiti,  $\varphi$  è semidefinito positivo  $\iff \iota_- = 0$ . Infatti valgono le seguenti equivalenze:  $\varphi$  è semidefinito positivo  $\iff$  non esiste un vettore  $\underline{v} \in V$ ,  $\underline{v} \neq \underline{0}$  tale che  $q(\underline{v}) < 0 \iff \iota_- = 0$ . Analogamente  $\varphi$  è semidefinito

## 1 Introduzione al prodotto scalare

negativo  $\iff \iota_+ = 0$ .

► Se  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$  sono tutti i vettori di una base ortogonale  $\mathcal{B}$  con forma quadratica nulla, si osserva che  $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$  altro non è che  $V^\perp$  stesso.

Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che  $\dim W = \dim \text{Ker}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V^\perp$ . Sia allora la base  $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$  un'estensione di  $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ . Se  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{v} \in V$ ,  $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w}_i, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w}_i + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w}_i) = 0$  (dove  $\alpha_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{K}$  rappresentano la  $i$ -esima coordinata di  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$  nella base  $\mathcal{B}$ ), e quindi  $W \subseteq V^\perp$ . Si conclude allora, tramite l'uguaglianza dimensionale, che  $W = V^\perp$ .

► Poiché  $\dim \text{Ker}(\varphi) = \iota_0$ , vale in particolare che  $\text{rg}(\varphi) = n - \iota_0 = \iota_+ + \iota_-$  (infatti vale che  $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$ , dal momento che  $n$  rappresenta il numero di elementi di una base ortogonale).

► Se  $V = U \oplus^\perp W$ , allora  $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$ . Analogamente vale la stessa cosa per gli altri indici. Infatti, prese due basi ortogonali  $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W$  di  $U$  e  $W$ , la loro unione  $\mathcal{B}$  è una base ortogonale di  $V$ . Pertanto il numero di vettori della base  $\mathcal{B}$  con forma quadratica positiva è esattamente  $\iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$ .

► In generale, se  $W$  è un sottospazio di  $V$ , vale che  $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ . Infatti, se  $U$  è un sottospazio di  $W$  di dimensione  $\iota_+(\varphi|_W)$  tale che  $(\varphi|_W)|_U > 0$ , allora  $U$  è in particolare un sottospazio di  $V$  tale che  $\varphi|_U > 0$ . Pertanto, per definizione, essendo  $\iota_+(\varphi)$  la dimensione del massimo sottospazio su cui  $\varphi$ , ristretto ad esso, è definito positivo, deve valere che  $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ . Analogamente,  $\iota_-(\varphi) \geq \iota_-(\varphi|_W)$ .

### 1.5.2.1 Classificazione delle segnature per $n = 1, 2, 3$

Sia  $\mathcal{B}$  una base di Sylvester per  $\varphi$ . Sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si indica con  $x, y$  e  $z$  le tre coordinate di  $\underline{v} \in V$  secondo la base  $\mathcal{B}$ .

( $n = 1$ ) Vi sono solo tre possibili matrici per  $A$ :

- $A = (0)$ , con  $\sigma = (0, 0, 1)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 0$  e  $\text{CI}(\varphi) = V$ ,
- $A = (1)$ , con  $\sigma = (1, 0, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = (-1)$ , con  $\sigma = (0, 1, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ .

( $n = 2$ ) Vi sono sei possibili matrici per  $A$ :

- $A = 0$ , con  $\sigma = (0, 0, 2)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 0$  e  $\text{CI}(\varphi) = V$ ,



## 1 Introduzione al prodotto scalare

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (1, 0, 1)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$ ,
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (0, 1, 1)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (1, 1, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 2$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x^2 = y^2 \mid \underline{v} \in V\}$ ,
- $A = I_2$ , con  $\sigma = (2, 0, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 2$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = -I_2$ , con  $\sigma = (0, 2, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 2$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ .

Si osserva in particolare che  $\det(A) = -1 \iff \sigma = (1, 1, 0)$ . Pertanto se  $M$  è una matrice associata al prodotto scalare  $\varphi$  in una base  $\mathcal{B}'$ ,  $\det(M) < 0 \iff \sigma = (1, 1, 0)$ .

( $n = 3$ ) Se  $A$  contiene almeno uno zero nella diagonale, si può studiare  $A$  riconducendosi al caso  $n = 2$ , considerando la matrice  $A_{1,2}^{1,2}$ , e incrementando di uno l'indice di nullità di  $\varphi$  (eventualmente considerando anche come varia il cono isotropo). Altrimenti  $A$  può essere rappresentato dalle seguenti quattro matrici:

- $A = I_3$ , con  $\sigma = (3, 0, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = -I_3$ , con  $\sigma = (0, 3, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (2, 1, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x^2 + y^2 = z^2 \mid \underline{v} \in V\}$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (1, 2, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{y^2 + z^2 = x^2 \mid \underline{v} \in V\}$ .

Si osserva infine che, se  $V = \mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}$  ne è la base canonica, i coni isotropi delle ultime due matrici rappresentano proprio due coni nello spazio tridimensionale.

### 1.5.2.2 Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura

**Proposizione 1.5.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g.  $\mathbb{R}$ ). Sia  $W$  un sottospazio di  $V$  di dimensione  $k$ . Sia  $W'$  un sottospazio di  $V$  di dimensione  $k + 1$ . Sia  $\sigma(\varphi|_W) = (p, q, 0)$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  e siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  due basi di  $W$  e  $W'$ . Siano  $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$  e  $B' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W)$ .

Sia  $d := \frac{\det(B')}{\det(B)}$ . Allora vale che:

$$\sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p + 1, q, 0) & \text{se } d > 0, \\ (p, q + 1, 0) & \text{se } d < 0, \\ (p, q, 1) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## 1 Introduzione al prodotto scalare

*Dimostrazione.* Dalle precedenti osservazioni, vale che  $\iota_+(\varphi|_{W'}) \geq \iota_+(\varphi|_W)$  e che  $\iota_-(\varphi|_{W'}) \geq \iota_-(\varphi|_W)$ . Inoltre  $\varphi|_W$  è non degenere dal momento che  $\iota_0(\varphi|_W) = 0$ , e pertanto  $p + q = \text{rg}(\varphi|_W) = k$ .

Siano ora  $\mathcal{B}_\perp$  e  $\mathcal{B}'_\perp$  due basi di Sylvester di  $W$  e  $W'$ . Siano  $A = M_{\mathcal{B}_\perp}(\varphi|_W)$  e  $A' = M_{\mathcal{B}'_\perp}(\varphi|_W)$ . Allora  $\det(A) = (-1)^p(-1)^q$ , mentre  $\det(A') = (-1)^p(-1)^q d'$ , dove  $d' \in \{-1, 0, 1\}$ . Allora  $\det(A') = \det(A)d' \implies d' = \frac{\det(A')}{\det(A)}$ , dal momento che  $\det(A) \neq 0$ , essendo  $\varphi|_W$  non degenere.

In particolare,  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1)$  se e solo se  $\det(A') = 0 \implies d' = 0$ . Dal momento che  $\det(A') = 0 \iff \det(B') = 0$ ,  $d' = 0 \iff d = 0$ . Pertanto si conclude che  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1) \iff d = 0$ .

Al contrario,  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p + 1, q, 0)$  se e solo se  $d' = 1$ , ossia se e solo se  $\det(A')$  e  $\det(A)$  sono concordi di segno. Dal momento che il segno è un invariante del cambiamento di base per la matrice associata a  $\varphi$ ,  $d' = 1$  se e solo se  $\det(B)$  e  $\det(B')$  sono concordi di segno, ossia se e solo se  $d > 0$ . Pertanto  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p + 1, q, 0) \iff d > 0$ . Analogamente si verifica che  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q + 1, 0) \iff d < 0$ , da cui la tesi.  $\square$

**Algoritmo 1.2** (metodo di Jacobi). Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Se il determinante di ogni minore di testa<sup>3</sup> di  $A$  (ossia dei minori della forma  $A_{1, \dots, i}^{1, \dots, i}$ , con  $1 \leq i \leq n - 1$ ) è diverso da zero, è possibile applicare il **metodo di Jacobi** per il calcolo della segnatura di  $\varphi$ .

Sia  $d_i = \det \left( A_{1, \dots, i}^{1, \dots, i} \right) \forall 1 \leq i \leq n$  e si ponga  $d_0 := 1$ . Allora, per la *Proposizione 1.5*,  $\iota_+$  corrisponde al numero di permanenze del segno tra elementi consecutivi (escludendo 0) di  $(d_i)$ , mentre  $\iota_-$  corrisponde al numero di variazioni del segno (anche stavolta escludendo 0). Infine  $\iota_0$  può valere solo 0 o 1, dove  $\iota_0 = 1 \iff \det(A) = 0$ .

**Esempio.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$ .

Si calcola la segnatura di  $\varphi_A$  mediante il metodo di Jacobi. Poiché  $A$  è la matrice associata di  $\varphi_A$  nella base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , si può applicare il metodo di Jacobi direttamente su  $A$ .

Si calcola allora la successione dei  $d_i$ :

1.  $d_1 = \det(1) = 1$ ,
2.  $d_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$ ,

---

<sup>3</sup>In realtà il metodo si estende ad ogni successione di minori coerente con un'estensione di base (i.e. i minori principali di  $A$ ).

3.  $d_3 = \det(A) = (8 - 1) - 4 = 3$ .

Dal momento che vi sono tre permanenze di segno, si conclude che  $\sigma(\varphi_A) = (3, 0, 0)$ , ossia che  $\varphi_A$  è definito positivo.

### 1.5.2.3 Criterio di Sylvester per la definitezza di un prodotto scalare

**Proposizione 1.6** (criterio di Sylvester per i prodotti definiti). Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ , e sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Sia  $d_i = \det \begin{pmatrix} A_{1, \dots, i}^1, \dots, i \end{pmatrix}$ . Allora  $\varphi$  è definito positivo se e solo se  $d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ . Analogamente  $\varphi$  è definito negativo se e solo se  $(-1)^i d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ .

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\varphi$  è definito positivo se e solo se  $\iota_+ = n$ . Pertanto, per il *metodo di Jacobi*,  $\varphi$  è definito positivo se e solo se vi sono solo permanenze di segno tra elementi consecutivi nella successione  $(d_i)$ , e quindi se e solo se  $d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ . Analogamente  $\varphi$  è definito negativo se e solo se  $\iota_- = n$ , e quindi se e solo se vi sono solo variazioni di segno  $\iff d_i > 0$  se  $i$  è pari e  $d_i < 0$  se  $i$  è dispari  $\iff (-1)^i d_i > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ .

□