Appunti di Fisica

Gabriel Antonio Videtta

21 gennaio 2022

Indice

Capitolo 1

I moti principali della meccanica newtoniana

1.1 Il moto uniformemente accelerato (m.u.a.)

Conoscendo le definizioni di accelerazione ($\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) e di velocità ($\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$) è possibile, ponendo l'accelerazione costante (i.e. il *jerk* è nullo, $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$), ricavare numerose formule.

1.1.1 Le equazioni del moto in un sistema di riferimento unidimensionale

Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases} \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Da $a = \frac{dv}{dt}$, si ricava $dv = a \cdot dt$, da cui:

$$\int dv = \int a\,dt = a \int dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

Dimostrata questa prima equazione, è possibile dimostrare in modo analogo l'altra:

$$\int dx = \int v \cdot dt = \int v_0\,dt + \int at\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

La dimostrazione può essere inoltre resa immediata se si sviluppano $x(t)$ e $v(t)$ come serie di Taylor-Maclaurin.

□

1.1.2 Lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione

Senza ricorrere alla variabile di tempo t, è possibile esprimere lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione mediante le seguente formula:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Considerando $a = \frac{dv}{dt}$, è possibile riscrivere, mediante l'impiego delle formule di derivazione delle funzioni composte, quest'ultima formula:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\,\frac{dv}{dx}$$

Da ciò si può ricavare infine l'ultima formula:

$$a\,dx = v\,dv \Rightarrow a\int dx = \int v\,dv$$

E quindi:

$$a(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

□

1.2 Il moto dei proiettili

Il *moto dei proiettili*, o moto parabolico, non è altro che la forma vettoriale del m.u.a. sfruttando due accelerazioni per entrambe le dimensioni: una nulla (quella dello spostamento parallelo al terreno) ed una pari a $-g$ (quella data dalla gravità nello spostamento normale al terreno).

1.2.1 Le equazioni del moto dei proiettili

Riprendendo le precedenti considerazioni, si può dunque scrivere l'equazione del moto in forma vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{1.3}$$

O nel casso del moto parabolico sulla Terra:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 \tag{1.4}$$

O si può separare quest'ultima in due equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0\cos(\theta)t \\ y(t) = y_0 + v_0\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.2 Il calcolo della gittata e della traiettoria

Definita la *gittata* come la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo assume la stessa ordinata del punto di lancio e la *traiettoria* come la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo assume la massima ordinata, si possono facilmente dimostrare le seguenti equazioni per un moto la cui la posizione iniziale è nulla e che viene effettuato sulla Terra:

$$\begin{cases} x_{\text{gittata}} = \dfrac{v_0^2\sin(2\theta)}{g} \\ x_{\text{traiettoria}} = \dfrac{1}{2}x_{\text{gittata}} = \dfrac{v_0^2\sin(2\theta)}{2g} \end{cases} \tag{1.6}$$

Dimostrazione dell'equazione della gittata. L'equazione del moto in questo caso si può sintetizzare nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x = v_0\cos(\theta)t \\ y = v_0\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Poiché il corpo deve raggiungere terra, l'ordinata deve annullarsi, da cui si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0\cos(\theta)} \\ \dfrac{1}{2}gt^2 = v_0\sin(\theta)t \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda, ricaviamo:

$$\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\theta)} = v_0\sin(\theta)\frac{x}{v_0\cos(\theta)} \Rightarrow x = \frac{2v_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g}$$

Ricordando che $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, otteniamo infine:

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

□

Dimostrazione dell'equazione della traiettoria. Poiché $y(x)$ rappresenta analiticamente una parabola, il punto in cui l'ordinata si massimizza ha come ascissa l'ascissa media tra i due zeri (i.e. l'ascissa del vertice della parabola), ovvero $x_{traiettoria}$ è la media tra 0 e x_{gittata}:

$$x_{traiettoria} = \frac{v_0 \sin(2\theta)}{2g}$$

□

1.3 Il moto circolare

Definendo alcune grandezze fisiche in modo analogo a come vengono proposte nel m.u.a., è possibile riproporre le equazioni 1.1 mediante l'impiego di grandezze esclusivamente angolari.

1.3.1 Le equazioni del moto circolare

Si definiscano dunque le seguenti grandezze:

- L'angolo θ in funzione del tempo
- La velocità angolare $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
- L'accelerazione angolare $\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Innanzitutto, è possibile coniugare il mondo angolare con quello cartesiano, tenendo conto del fatto che $x = \theta r$. In questo modo si ricavano le seguenti relazioni:

- $v = \omega r$, la velocità angolare
- $a_t = \alpha r$, l'accelerazione tangenziale (da distinguersi da quella centripeta!)

Per sostituzione, dalle equazioni 1.1 si ottengono dunque le analoghe seguenti:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \tag{1.7}$$

Nel caso del moto circolare uniforme ($\alpha = 0$) è utile definire altre due quantità:

- Il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- La frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

1.3.2 L'accelerazione centripeta

Oltre all'accelerazione tangenziale, direttamente proporzionale a quella lineare, è possibile definire anche un altro tipo di accelerazione: l'**accelerazione centripeta** (a_c), diretta dal corpo verso il centro della circonferenza sulla quale questo muove.

Questo tipo di accelerazione è costante nel moto circolare uniforme ($\alpha = 0$) ed è calcolata mediante le seguente equazione:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{1.8}$$

Qualora non ci si riferisse ad un moto circolare uniforme, l'accelerazione centripeta non sarà costante, ma variabile in funzione della velocità con la quale si muove il corpo.

Inoltre, vale la seguente relazione:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \tag{1.9}$$

Nel caso del moto circolare uniforme, l'unica accelerazione agente sul corpo è quindi quella centripeta.

1.3.3 Il moto circolare visualizzato vettorialmente

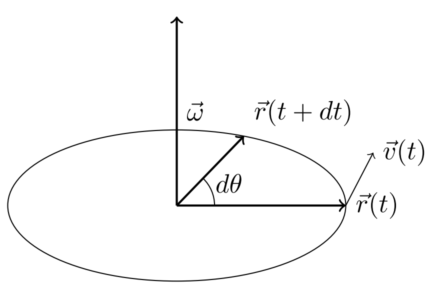

Figura 1.1: Il moto circolare nel piano O_{xy}

Per visualizzare in modo più intuitivo, ma anche più formale, il moto circolare, è possibile costruire un sistema di riferimento basandosi su alcune assunzioni.

Basandosi sulla figura 1.1, assumiamo $d\vec{\theta} = d\theta \cdot \hat{z}$, attraverso cui possiamo concludere che $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ è anch'esso parallelo a $\hat{z}$.

Inoltre, $d\vec{r}$ deve essere perpendicolare sia a $\vec{r}$ che a $\vec{\omega}$, poiché appartiene al piano O_{xy}.

Perciò è possibile riscrivere $d\vec{r}$ nella seguente forma, tenendo conto che il suo modulo è pari a $d\theta \cdot \|\vec{r}\|$ (ovvero l'arco di circonferenza percorso per $d\theta$):

$$d\vec{r} = \frac{d\theta \cdot \|\vec{r}\|}{\|\vec{w} \times \vec{r}\|}\vec{w} \times \vec{r} = \frac{d\theta}{\|\vec{\omega}\|}\vec{w} \times \vec{r}$$

Poiché la velocità $\vec{v}$ è pari a $\frac{d\vec{r}}{dt}$, si ottiene, conoscendo $d\vec{r}$, la seguente relazione:

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{1.10}$$

Dalla quale si ricava che $\vec{v}$ è perpendicolare sia a $\vec{r}$ che a $\vec{\omega}$.

Analogamente, è possibile ricavare l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{1.11}$$

È interessante notare che $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è perpendicolare a $\vec{\omega} \times \vec{v}$, permettendoci di calcolare facilmente il modulo dell'accelerazione:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\|\vec{\alpha} \times \vec{r}\|^2 + \|\vec{\omega} \times \vec{v}\|^2} \tag{1.12}$$

Non solo: $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è perpendicolare a $\vec{r}$ e $\vec{\omega} \times \vec{v}$ gli è parallelo, ma possiede un verso opposto. Per questa serie di motivi, $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ viene chiamata **accelerazione tangenziale** ($\vec{a_t}$), mentre $\vec{\omega} \times \vec{v}$ viene chiamata **accelerazione centripeta** ($\vec{a_c}$).

Nel moto circolare uniforme, ove $\vec{\alpha} = 0$, infatti l'accelerazione centripeta è costante (vd. eq. 1.8) e l'accelerazione tangenziale è nulla (quindi $\vec{a} = \vec{a_c}$).

Attraverso questa visualizzazione del moto, è possibile ricavare tutte le formule proposte all'inizio della sezione (ed è soprattutto possibile giustificare l'equazione 1.9).