Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi
Anno accademico 2024-25

Studente: Gabriel Antonio Videtta (matricola 654839) – g.videtta1@studenti.unipi.it

Indice dei problemi

Problema 1: Coppia di Kuratowski e altre definizioni di coppie ordinate

Si considerino le seguenti possibili definizioni di coppie ordinate:

(a.) $(a,b)_K := \{\{a\},\{a,b\}\}$ (Kuratowski),

(b.) $(a,b)_1 := \{\{a,\varnothing\},\{b,\{\varnothing\}\}\}$ (Haussdorf),

(c.) $(a,b)_2 := \{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\}$ (Wiener),

(d.) $(a,b)_3 := \{\{a\},\{b,\varnothing\}\}$ (Quine),

(e.) $(a,b)_4 := \{a,\{b\}\}$,

(f.) $(a,b)_5 := \{\{a,\varnothing\},b\}$.

Si dimostri che $(a,b)_K$, $(a,b)_1$, $(a,b)_2$ e $(a,b)_3$ soddisfano la proprietà caratterizzante di una coppia ordinata, ovverosia $(a,b) = (a',b') \longleftrightarrow a = a' \land b = b'$. Si mostri che $(a,b)_4$ e $(a,b)_5$ invece non la soddisfano.

Soluzione. Per il principio di sostituzione, se $a = a'$ e $b = b'$, $(a,b) = (a',b')$ è sicuramente vero. Mostriamo che per $(a,b)_K$, $(a,b)_1$, $(a,b)_2$ e $(a,b)_3$ vale anche il viceversa, ossia che $(a,b) = (a',b') \longrightarrow a = a' \land b = b'$. Per $(a,b)_4$ e $(a,b)_5$ mostriamo invece un controesempio alla proprietà caratterizzante di una coppia ordinata.

(a.) Se $(a,b)_K = (a',b')_K$, allora $\{a\} = \bigcap(a,b)_K = \bigcap(a',b')_K = \{a'\}$, e ciò è possibile solo se $a = a'$. Analogamente $\{a,b\} = \bigcup(a,b)_K = \bigcup(a',b')_K = \{a,b'\}$, dove si è utilizzato che $a' = a$. Se $b = a$, $b' \in \{a,b'\} = \{a,b\} = \{a\}$ implica che $b' = a = b$. Se invece $b \neq a$, $b \in \{a,b\} = \{a,b'\}$: se per assurdo $b \neq b'$, allora si avrebbe necessariamente $a = b$, $\lightning$. Quindi $b = b'$, da cui la tesi.

(b.) Sia $(a,b)_1 = (a',b')_1$. Dividiamo la dimostrazione in più casi.

- Se $b = \varnothing$, allora, affinché $\{a', \varnothing\}$ sia elemento di $(a,b)_1$, deve valere $a' = a$ o $a' = \{\varnothing\}$. Dividiamo ancora in due casi.
  - Sia dunque $a' = \{\varnothing\}$. Se per assurdo $a \neq \{\varnothing\}$, si avrebbe necessariamente $b' = \varnothing$, e dunque $\{\{a,\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} = (a,b)_1 = (a',b')_1 = \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, che è impossibile dato che $a \neq \{\varnothing\}$. Quindi $a = \{\varnothing\} = a'$. Affinché $\{b',\{\varnothing\}\}$ sia elemento di $(a,b)_1$, deve valere anche $b = b'$ o $b = \varnothing$; dacché $b' = \varnothing$, in entrambi i casi si ottiene $b = b'$.
  - Se invece $a' = a$ con $a' \neq \{\varnothing\}$, allora l'unico elemento in $(a,b)_1$ che contiene $\{\varnothing\}$ è $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, e in $(a',b')_1$ è $\{b',\{\varnothing\}\}$, da cui necessariamente $b' = \varnothing = b$. Dunque $a = a'$ e $b = b'$.

  In entrambi i casi si ha dunque $a = a'$ e $b = b'$.
- Se $a = \{\varnothing\}$, affinché $\{b',\{\varnothing\}\}$ sia elemento di $(a,b)_1$, deve valere $b' = \varnothing$ o $b' = b$. Dividiamo ancora in due casi.
  - Sia dunque $b' = \varnothing$. Se per assurdo $b \neq \varnothing$, si avrebbe necessariamente $a' = \{\varnothing\}$, e dunque $\{\{b,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} = (a,b)_1 = (a',b')_1 = \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, che è impossibile dato che $b \neq \varnothing$. Quindi $b = \varnothing = b'$. Affinché $\{a',\varnothing\}$ sia elemento di $(a,b)_1$, deve valere anche $a = a'$ o $a' = \{\varnothing\}$; dacché $a = \{\varnothing\}$, in entrambi i casi si ottiene $a = a'$.
  - Se invece $b' = b$ con $b' \neq \varnothing$, allora l'unico elemento in $(a,b)_1$ che contiene $\varnothing$ è $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$, e in $(a',b')_1$ è $\{a',\varnothing\}$, da cui necessariamente $a' = \varnothing = a$. Dunque $a = a'$ e $b = b'$.

  In entrambi i casi si ha dunque $a = a'$ e $b = b'$.
- Se $a \neq \{\varnothing\}$ e $b \neq \varnothing$, allora l'unico elemento in $(a,b)_1$ che contiene $\{\varnothing\}$ è $\{b,\{\varnothing\}\}$, e poiché $\{b',\{\varnothing\}\} \in (a',b')_1 = (a,b)_1$, da cui necessariamente $b' = b$, dacché $b \neq \{\varnothing\}$. Analogamente l'unico elemento in $(a,b)_1$ che contiene $\varnothing$ è $\{a,\varnothing\}$, e poiché $\{a',\varnothing\} \in (a',b')_1 = (a,b)_1$, da cui necessariamente $a' = a$, dacché $a \neq \varnothing$.

In tutti i casi si ottiene $a = a'$ e $b = b'$, da cui la tesi.

(c.) Sia $(a,b)_2 = (a',b')_2$. In $(a,b)_2$ l'unico elemento contenente un insieme vuoto è $\{\{a\},\varnothing\}$ (né $\{a\}$ né $\{b\}$ sono vuoti, uno contiene a, l'altro b), e analogamente in $(a',b')_2$ è $\{\{a'\},\varnothing\}$. Poiché $\{a\}$ e $\{a'\}$ sono entrambi non vuoti e $(a,b)_2 = (a'b')_2$, necessariamente $a = a'$. Analogamente, l'unico elemento di $(a,b)_2$ che non contiene un insieme vuoto è $\{\{b\}\}$, mentre in $(a',b')_2$ è $\{\{b'\}\}$, da cui $b = b'$, e dunque la tesi.

(d.) Sia $(a,b)_3 = (a',b')_3$. Distinguiamo più casi.

- Se $a = \varnothing$ e $b = \varnothing$, $(a,b)_3 = \{\{\varnothing\}\}$. Necessariamente $b = \varnothing$, altrimenti $(a',b')_3$ conterrebbe un insieme di due elementi, mentre $(a,b)_3$ contiene un solo singoletto. Allo stesso modo $a = \varnothing$, altrimenti $(a',b')_3$ conterrebbe due elementi, mentre $(a,b)_3$ ha un solo singoletto.

- Se $a = \varnothing$, ma $b \neq \varnothing$, allora $b' \neq \varnothing$: se infatti per assurdo $b' = \varnothing$, allora $(a', b')_3$ conterrebbe solo singoletti, mentre $(a, b)_3$ contiene un insieme di due elementi, dacché $b \neq \varnothing$. Dal momento che in $(a, b)_3$ l'unico insieme di due elementi è $\{b, \varnothing\}$, mentre in $(a', b')_3$ è $\{b', \varnothing\}$, da cui $b = b'$. Infine, anche i singoletti $\{a\}$ e $\{a'\}$ dei due insiemi sono uguali, e quindi $a = a'$.
- Se $a \neq \varnothing$, ma $b = \varnothing$, allora necessariamente $b' = \varnothing = b$: altrimenti $(a', b')_3$ conterrebbe un insieme di due elementi, mentre $(a, b)_3$ contiene solo singoletti. Poiché $a \neq \varnothing$, $(a, b)_3$ ha due elementi, e dunque $a' \neq \varnothing$: altrimenti $(a', b')_3$ avrebbe un singolo elemento, mentre $(a, b)_3$ ne ha due. Allora, poiché $a \neq \varnothing$, $a' \neq \varnothing$ e $b = b' = \varnothing$, deduciamo che necessariamente deve valere $a = a'$.
- Se $a \neq \varnothing$ e $b \neq \varnothing$, allora $b' \neq \varnothing$: altrimenti $(a', b')_3$ conterrebbe solo singoletti, mentre $(a, b)_3$ contiene un insieme di due elementi. Dal momento che $b \neq \varnothing$, $b' \neq \varnothing$ e in $(a, b)_3$ l'unico insieme di due elementi è $\{b, \varnothing\}$, mentre in $(a', b')_3$ è $\{b', \varnothing\}$, allora necessariamente $b = b'$. Analogamente l'unico singoletto contenuto in $(a, b)_3$ deve essere uguale a quello contenuto in $(a', b')_3$, ossia $\{a\} = \{a'\}$, da cui $a = a'$.

In tutti i casi si ottiene $a = a'$ e $b = b'$, da cui la tesi.

(e.) $(\{\varnothing\}, \{\varnothing\})_4 = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = (\{\{\varnothing\}\}, \varnothing)_4$; tuttavia $\{\varnothing\} \neq \varnothing$, perché $\varnothing \in \{\varnothing\}$, ma $\varnothing \notin \varnothing$. Dunque $(a, b)_4$ non soddisfa la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate.

(f.) $(\{\varnothing\}, \{\varnothing\})_5 = \{\{\{\varnothing\}, \varnothing\}, \{\varnothing\}\} = (\varnothing, \{\{\varnothing\}, \varnothing\})_5$, ma come abbiamo appena visto $\{\varnothing\} \neq \varnothing$. Dunque $(a, b)_4$ non soddisfa la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate.

Problema 2: Formula esplicita per la coppia di Kuratowski

Si scriva una formula esplicita per $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Soluzione. Trasformiamo tramite opportune sostituzioni la formula originale in una formula esplicita:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\rightsquigarrow \forall x(x \in (a, b) \longleftrightarrow x \in \{\{a\}, \{a, b\}\}) \text{ (estensionalità)}$$

$$\rightsquigarrow \forall x(x \in (a, b) \longleftrightarrow (x = \{a\} \vee x = \{a, b\})$$

$$\rightsquigarrow \forall x(x \in (a, b) \longleftrightarrow (\forall y(y \in x \longleftrightarrow y \in \{a\}) \vee \forall y(y \in x \longleftrightarrow y \in \{a, b\})) \text{ (estensionalità)}$$

$$\rightsquigarrow \forall x(x \in (a, b) \longleftrightarrow (\forall y(y \in x \longleftrightarrow y = a) \vee \forall y(y \in x \longleftrightarrow (y = a \vee y = b))).$$

Problema 3: Dominio e immagine di una relazione sono insiemi

Si dimostri che $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{x \mid \exists y((x,y) \in \mathcal{R})\}$ e $\mathrm{imm}(\mathcal{R}) = \{y \mid \exists x((x,y) \in \mathcal{R})\}$ sono effettivamente insiemi.

Soluzione. Si osserva che $\bigcup(a,b) = \{a,b\}$, e quindi $\bigcup(\bigcup\mathcal{R})$ – che è un insieme per l'assioma dell'unione – contiene indistintamente elementi del dominio e dell'immagine di $\mathcal{R}$. Possiamo allora utilizzare l'assioma di separazione per mostrare che $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$ e $\mathrm{imm}(\mathcal{R})$ sono insiemi:

(i.) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in \bigcup(\bigcup\mathcal{R}) \mid \exists y((x,y) \in \mathcal{R})\}$,

(ii.) $\mathrm{imm}(\mathcal{R}) = \{y \in \bigcup(\bigcup\mathcal{R}) \mid \exists x((x,y) \in \mathcal{R})\}$.

Problema 4: Forme equivalenti dell'assioma di scelta (1)

Si dimostrino che le seguenti asserzioni sono tra loro equivalenti:

(i.) $\forall I \forall \sigma((\exists x(x \in I) \wedge \sigma$ I-successione $\wedge \forall j(j \in I \longrightarrow \exists y(y \in \sigma(j)))) \longrightarrow \exists z(z \in \bigtimes_{i \in I} \sigma(i)))$ (assioma di scelta, AC),

(ii.) $\forall \mathcal{F}((\forall c(c \in \mathcal{F} \longrightarrow \exists d(d \in c)) \wedge \forall a \forall b((a \in \mathcal{F} \wedge b \in \mathcal{F} \wedge \neg(\forall y(y \in a \longleftrightarrow y \in b))) \longrightarrow \neg\exists z(z \in a \wedge z \in b))) \longrightarrow \exists X(\forall F(F \in \mathcal{F} \longrightarrow \exists a(a \in X \wedge a \in F \wedge \forall b((b \in X \wedge b \in F) \longrightarrow \forall w(w \in a \longleftrightarrow w \in b))))))$ ($\forall \mathcal{F}$ famiglia di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, $\exists X$ tale che $\forall F \in \mathcal{F}$ vale che $|X \cap F| = 1$),

(iii.) $\forall f((f \in \mathrm{Fun}(A,B) \wedge f$ surgettiva$) \longrightarrow \exists g(g \in \mathrm{Fun}(B,A) \wedge f \circ g = \mathrm{id}_B))$ (per funzioni surgettive esiste un'inversa destra),

(iv.) $\forall X(\exists z(z \in X) \longrightarrow \exists f(f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, X) \wedge \forall y(y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow f(y) \in y)))$ (esiste sempre una funzione di scelta sulle parti).

Soluzione. Mostriamo l'equivalenza di (i.) con tutte le altre asserzioni[1].

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi non vuoti a due a due disgiunti. Se $\mathcal{F}$ è vuota, la tesi è banale. Se $\mathcal{F}$ non è vuota, si può considerare la $\mathcal{F}$-successione $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Poiché gli elementi di $\mathcal{F}$ sono non vuoti, $\bigtimes_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{id}_{\mathcal{F}}(f) = \bigtimes_{f \in \mathcal{F}} f \neq \varnothing$ per l'assioma di scelta. Sia dunque $g \in \bigtimes_{f \in \mathcal{F}} f$. Consideriamo $X = \{y \in \bigcup\mathcal{F} \mid \exists x(x \in \mathcal{F} \wedge y = g(x))\} = g(\mathcal{F})$, che è un'insieme per l'assioma di separazione.

Sia $F \in \mathcal{F}$. Allora $g(F) \in X$. Mostriamo che se y è un insieme tale per cui $y \in X$ e $y \in F$, allora $y = g(F)$. Dacché $y \in X$, esiste $z \in \mathcal{F}$ tale per cui $y = g(z)$. Poiché $g \in \bigtimes_{f \in \mathcal{F}} f$, $g(z) \in z$; allo stesso tempo $g(z) = y \in F$. Se z fosse diverso da F, $g(z)$ sarebbe un elemento di $z \cap F$, che per ipotesi è l'insieme vuoto, $\lightning$. Quindi $z = F$, e dunque $y = g(F)$. Dunque $|X \cap F| = 1$.

[1] Avremmo potuto dimostrare anche solo 4 implicazioni invece che 6, seguendo un ciclo di implicazioni della forma (i.) $\longrightarrow$ (ii.) $\longrightarrow$ (iii.) $\longrightarrow$ (iv.) $\longrightarrow$ (i.), ma per comodità e spirito di esercizio si è preferito riportare tutte le equivalenze con la formulazione originale di AC.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Sia σ una I-successione tale per cui $\sigma(i)$ è non vuoto per ogni $i \in I$. Consideriamo la famiglia di insiemi $\mathcal{F} := \{y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup\{I, \bigcup \operatorname{imm} \sigma\}))) \mid \exists i(i \in I \land y = \{i\} \times \sigma(i))\}$. Allora $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi non vuoti a due a due disgiunti (infatti due elementi distinti di $\mathcal{F}$ hanno elementi con prima coordinata diversa, e quindi sono diversi per la proprietà caratterizzante delle coppia ordinata di Kuratowski). Dunque esiste un insieme X tale per cui $|X \cap (\{i\} \times \sigma(i))| = 1$ per ogni $i \in I$. Si può allora costruire una funzione $f : I \to \bigcup_{i \in I} \sigma(i)$ tale per cui $f(i) \in \sigma(i)$ prendendo come $f(i)$ come l'unico elemento in $|X \cap (\{i\} \times \sigma(i))|$ – tale funzione è un insieme perché questa definizione è traducibile in formula e perché tale $f \in \operatorname{Fun}(I, \bigcup_{i \in I} \sigma(i))$, dove quest'ultimo è un insieme (e dunque si può applicare l'assioma di separazione). Allora $\bigtimes_{i \in I} \sigma(i) \neq \varnothing$, ovverosia l'assioma di scelta è vero.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(iii.)}}$ Sia $f : A \to B$ una funzione surgettiva. Sia $\sigma : B \to \mathcal{P}(A)$ tale per cui $\sigma(b) = f^{-1}(b)$. Poiché f è surgettiva, $\sigma(b) \neq \varnothing$ per ogni $b \in B$. Allora, per l'assioma di scelta, $\bigtimes_{b \in B} \sigma(b) \neq \varnothing$. Sia $g \in \bigtimes_{b \in B} \sigma(b)$. Dal momento che $g(b) \in f^{-1}(b)$, $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in B$, ovverosia g è un'inversa destra di f.

$\boxed{\text{(iii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Sia σ una I-successione tale per cui $\sigma(i) \neq \varnothing$ per ogni $i \in I$. Consideriamo l'insieme $A = \{y \in I \times \bigcup \operatorname{imm} \sigma \mid \exists i(i \in I \land \exists b(b \in \sigma(i) \land y = (i, b)))\}$. Possiamo allora costruire una funzione $f : A \to I$ tale per cui $(i, b) \mapsto i$, ovverosia $f = \pi_1 \circ \iota$, dove ι è l'immersione di A in $I \times \bigcup \operatorname{imm} \sigma$ e π_1 è la proiezione indotta dalla prima coordinata di $I \times \bigcup \operatorname{imm} \sigma$. Chiaramente f è surgettiva dal momento che $\sigma(i) \neq \varnothing$ per ogni $i \in I$. Allora f ammette un'inversa destra $g : I \to A$. Se allora π_2 è la proiezione indotta dalla seconda coordinata di $I \times \bigcup \operatorname{imm} \sigma$, $h = \pi_2 \circ \iota \circ g$ è una funzione da I a $\bigcup \operatorname{imm} \sigma$ tale per cui, per costruzione, $h(i) \in \sigma(i)$, ovverosia $h \in \bigtimes_{i \in I} \sigma(i)$, che dunque non è vuoto.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(iv.)}}$ Consideriamo la $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\})$-successione $\operatorname{id}_{\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}}$. Poiché a $\mathcal{P}(X)$ è stato tolto l'insieme vuoto $\varnothing$, ogni suo elemento è non vuoto. Pertanto $\bigtimes_{Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}} Y \neq \varnothing$ per l'assioma di scelta, ossia esiste $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to \bigcup \operatorname{imm} \operatorname{id}_{\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}} = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}} Y = X$ tale per cui $f(y) \in \operatorname{id}_{\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}}(y) = y$ per $y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, ossia f è la funzione di scelta cercata.

$\boxed{\text{(iv.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Sia σ una I-successione tale per cui $\sigma(i) \neq \varnothing$ per ogni $i \in I$. Consideriamo allora $X = \bigcup \operatorname{imm} \sigma$, per il quale vale $\sigma(i) \subseteq X$ per ogni $i \in I$, ovverosia $\sigma(i) \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ (infatti i $\sigma(i)$ sono <u>non</u> vuoti). Allora esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$. Sia $h : I \to \bigcup_{i \in I} \sigma(i)$ definita in modo tale che $h(i) = f(\sigma(i))$. Dacché f è una funzione di scelta, $h(i) = f(\sigma(i)) \in \sigma(i)$, ossia h è ben definita sul suo codominio ed è un elemento di $\bigtimes_{i \in I} \sigma(i)$, che dunque non è vuoto.

Problema 5: Composizione di relazioni e di funzioni

Si dia una opportuna definizione di composizione per le relazioni $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$ con $\mathsf{imm}(\mathcal{R}) = \mathsf{dom}(\mathcal{R}')$ e si mostri che per tale definizione la composizione di relazioni che sono funzioni è ancora una funzione e che tale composizione coincide con l'usuale composizione di funzioni.

Soluzione. Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ due relazioni. Definiamo $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ in modo tale che i suoi elementi siano le coppie (x, y) con $x \in \mathsf{dom}(\mathcal{R})$ e $y \in \mathsf{imm}(\mathcal{R}')$ tale per cui $\exists z(z \in \mathsf{imm}(\mathcal{R}) \wedge (x, z) \in \mathcal{R} \wedge (z, y) \in \mathcal{R}')$, dove ricordiamo che $\mathsf{imm}(\mathcal{R}) = \mathsf{dom}(\mathcal{R}')$. In altre parole:

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{c \in \mathsf{dom}(\mathcal{R}) \times \mathsf{imm}(\mathcal{R}') \mid \varphi(c)\},$$

dove:

$$\varphi(c) = \exists x \exists y(x \in \mathsf{dom}(\mathcal{R}) \wedge y \in \mathsf{imm}(\mathcal{R}') \wedge c = (x, y) \wedge \exists z(z \in \mathsf{imm}(\mathcal{R}) \wedge (x, z) \in \mathcal{R} \wedge (z, y) \in \mathcal{R}')).$$

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ è un insieme, per l'assioma della separazione. Successivamente, notiamo che $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ è una relazione, essendo un insieme di coppie ordinate, che $\mathsf{imm}(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathsf{imm}(\mathcal{R}')$ e che $\mathsf{dom}(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}) = \mathsf{dom}(\mathcal{R})$ – dove si è usato ancora che $\mathsf{imm}(\mathcal{R}) = \mathsf{dom}(\mathcal{R}')$.

Siano ora $g := \mathcal{R}$ e $f := \mathcal{R}'$ funzioni. Mostriamo che $f \circ g$ è una funzione. Sia $x \in \mathsf{dom}(f \circ g) = \mathsf{dom}(g)$ e supponiamo che, date y e y' in $\mathsf{imm}(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathsf{imm}(\mathcal{R}')$, (x, y) e (x, y') appartengano entrambe a $f \circ g$. Allora esistono z e z' in $\mathsf{imm}(\mathcal{R})$ tali per cui (x, z), (x, z') appartengano entrambe a g e (z, y), (z', y') appartengano a f. Dal momento che g è una funzione, dalla prime due appartenenze si ricava $z = z'$; dacché anche f è una funzione, dalle seconde due, sostituendo $z = z'$, si ricava $y = y'$, ovverosia $f \circ g$ è una funzione.

Mostriamo che tale composizione coincide con l'usuale composizione di funzioni, ovverosia verifichiamo che $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ per ogni $x \in \mathsf{dom}(g)$. Sappiamo che $(x, g(x)) \in g$ e che $(g(x), f(g(x))) \in f$, allora – per definizione di $f \circ g$ – $(x, f(g(x))) \in f \circ g$. Poiché $f \circ g$ è una funzione, si deve allora avere necessariamente $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Problema 6: La classe delle funzioni da A a B è un insieme

Si dimostri che $\mathsf{Fun}(A, B) = \{f \mid f \text{ funzione da } A \text{ a } B\}$ è un insieme.

Soluzione. Poiché $f \in \mathsf{Fun}(A, B)$ ha dominio A e immagine B, allora $f \subseteq A \times B$, ovverosia $f \in \mathcal{P}(A \times B)$. Dunque, $\mathsf{Fun}(A, B)$ è un insieme per l'assioma di separazione, dacché:

$$\mathsf{Fun}(A, B) = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f \text{ funzione da } A \text{ a } B\},$$

dove usiamo che "f funzione da A a B" è effettivamente una formula ammissibile (ossia si può sviluppare usando i simboli primitivi della nostra teoria).

> **Problema 7: $\{a, b, c\}$ è un insieme**
>
> Si dimostri che $\{a, b, c\}$ è un insieme.

Soluzione. Usiamo gli assiomi di ZF per dimostrare che $\{a, b, c\}$ è un insieme, sapendo che a, b e c sono insiemi. Per l'assioma della coppia esistono gli insiemi $\{a, b\}$ e $\{c, c\} = \{c\}$. Ancora per l'assioma della coppia esiste $\{\{a, b\}, \{c\}\}$. Allora per l'assioma dell'unione esiste $\bigcup\{\{a, b\}, \{c\}\} = \{a, b, c\}$, come desideravamo.

> **Problema 8: Forme equivalenti dell'assioma di scelta (2)**
>
> Si mostri che l'assioma di scelta è equivalente alla seguente asserzione:
>
> $$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}, \qquad \forall (A_{i,j} \mid i \in I, j \in J). \quad (*)$$

Soluzione. Mostriamo le due implicazioni separatamente.

$\boxed{\mathrm{AC} \longrightarrow (*)}$ Sia $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$. Allora per ogni $i_0 \in I$, esiste $j_0 \in J$ tale per cui $x \in A_{i_0,j_0}$. In altre parole l'insieme $B_i = \{j \in J \mid x \in A_{i,j}\}$ <u>non</u> è vuoto per ogni $i \in I$. Per l'assioma di scelta $\bigtimes_{i \in I} B_i$ <u>non</u> è vuoto. Sia dunque $h \in \bigtimes_{i \in I} B_i$. Per costruzione $x \in A_{i,h(i)}$ per ogni $i \in I$, e dunque $x \in \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} \subseteq \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$. Pertanto vale $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} \longrightarrow x \in \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

Sia $x \in \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$. Allora esiste $f \in \mathrm{Fun}(I, J)$ tale per cui $x \in A_{i,f(i)} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$ per ogni $i \in I$. Pertanto $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$. Dunque vale $x \in \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} \longrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$.

Infine, per l'assioma di estensionalità, si conclude che:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}.$$

$\boxed{(*) \longrightarrow \mathrm{AC}}$ Mostriamo che $(*)$ implica l'esistenza di una funzione di scelta sulle parti di un qualsiasi insieme <u>non</u> vuoto, che sappiamo essere equivalente ad AC. Sia dunque X un insieme <u>non</u> vuoto. Consideriamo

$I = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ e $J = X$. Sia $A_{i,j} = \{X\}$ se $j \in i$, e $\varnothing$ altrimenti. Allora vale che:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \neq \varnothing}} \bigcup_{x \in X} A_{Y,x} = \bigcap_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \neq \varnothing}} \{X\} = \{X\},$$

dove la penultima uguaglianza è dovuta al fatto che gli Y sono stati scelti non vuoti (e quindi esiste almeno un elemento x dentro ogni Y, per cui $A_{Y,x} = \{X\}$).

Per $(*)$ vale allora che:

$$\{X\} = \bigcap_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \neq \varnothing}} \bigcup_{x \in X} A_{Y,x} = \bigcup_{f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, X)} \bigcap_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \neq \varnothing}} A_{Y, f(Y)},$$

ovverosia esiste $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}, X)$ tale per cui $X \in A_{Y, f(Y)}$ per ogni $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Questo è possibile solo se $A_{Y, f(Y)} = \{X\}$ per ogni Y, ovverosia per costruzione se $f(Y) \in Y$. Dunque f è una funzione di scelta sulle parti di X, da cui la tesi.

Problema 9: La classe degli insiemi equipotenti è propria

Si mostri che, dato $y \neq \varnothing$, $E_y = \{x \mid |x| = |y|\}$ non è un insieme.

Soluzione. Sia x un insieme. Poiché $y \neq \varnothing$, esiste $z \in y$. Per l'assioma della separazione, $y \setminus \{z\} = \{x \in y \mid x \neq z\}$ è un insieme. Per l'assioma della coppia esistono $\{x, x\} = \{x\}$ e $\{y \setminus \{z\}, \{x\}\}$, dunque, per l'assioma dell'unione, esiste $\bigcup \{y \setminus \{z\}, \{x\}\} = (y \setminus \{z\}) \cup \{x\}$. $(y \setminus \{z\}) \cup \{x\}$ è in bigezione con y tramite la mappa che manda tutti gli elementi diversi da x in sé stessi e x in z, quindi $|(y \setminus \{z\}) \cup \{x\}| = |y|$, ovverosia $(y \setminus \{z\}) \cup \{x\} \in E_y$. Dunque $x \in (y \setminus \{z\}) \cup \{x\} \in E_y$, ovverosia ogni insieme è elemento di un elemento in E_y. Pertanto, se E_y fosse un insieme, per l'assioma dell'unione si avrebbe $\bigcup E_y = \mathbb{V}$, ovverosia la classe di tutti gli insiemi sarebbe un insieme, ma questo è falso, $\lightning$. Dunque E_y non è un insieme.

Problema 10: Una bigezione esplicita tra $[0,1)$ e $(0,1)$

Si trovi una bigezione esplicita tra $[0,1)$ e $(0,1)$.

Soluzione. Sfruttando l'idea che abbiamo utilizzato per costruire una bigezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ possiamo costruire direttamente una bigezione tra $[0,1)$ e $(0,1)$, come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x = 0, \\ x & \text{se } x \neq 0 \text{ e } 1/x \notin \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\frac{1}{x}+1} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } 1/x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

In questo modo, i numeri non naturali vengono mandati in loro stessi, 0 viene mandato in $\frac{1}{2}$ (e dacché $1 \notin [0,1)$ ciò non crea problemi), $\frac{1}{2}$ viene mappato a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, etc... – seguendo l'analoga filosofia adottata nel caso di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in cui fissavamo i non naturali e mandavamo i naturali nei loro successivi.

Problema 11: Prodotto, unione a intersezione nulla, spazi di funzioni e parti di insiemi equipotenti sono equipotenti

Siano A e A' tali che $|A| = |A'|$. Siano B e B' tali che $|B| = |B'|$. Si mostri allora che:

(i.) $|A \times B| = |A' \times B'|$,

(ii.) $|A \cup B| = |A' \cup B'|$, se $A \cap B = A' \cap B' = \varnothing$,

(iii.) $|\text{Fun}(A, B)| = |\text{Fun}(A', B')|$,

(iv.) $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$.

Mostrare che prodotto, parti, unione, spazio delle funzioni di insiemi equipotenti sono equipotenti.

Soluzione. Sia $f : A \to A'$ una bigezione, così come $g : B \to B'$. Dimostriamo la tesi punto per punto.

(i.) La mappa $A \times B \ni (a, b) \mapsto (f(a), g(b)) \in A' \times B'$ è una funzione la cui inversa è $A' \times B' \ni (a', b') \mapsto (f^{-1}(a'), g^{-1}(b')) \in A \times B$, dunque è una bigezione. Allora $|A \times B| = |A' \times B'|$.

(ii.) Dal momento che $A \cap B = \varnothing$, la funzione $h : A \cup B \to A' \cup B'$ tale per cui:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A, \\ g(x) & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

è ben definita.

Chiaramente h è suriettiva, dal momento che lo sono sia f che g. Se x e y in $A \cup B$ sono tali che $h(x) = h(y)$, allora $h(x)$ e $h(y)$ devono appartenere entrambi ad A' o entrambi a B' dal momento che $A' \cap B' = \varnothing$. Per lo stesso motivo x e y devono necessariamente appartenere entrambe o A o a B, e dunque deve valere o $f(x) = f(y)$ (se x, $y \in A$) o $g(x) = g(y)$ (se x, $y \in B$), da cui si deduce a prescindere che vale $x = y$, da cui l'iniettività di h. Poiché h è iniettiva e suriettiva, h è una bigezione. Dunque $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

(iii.) Costruiamo $F : \text{Fun}(A, B) \to \text{Fun}(A', B')$ tale per cui $F(h) = g \circ h \circ f^{-1}$. Mostriamo che F è effettivamente una bigezione.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, two heads, "f"'] & B \arrow[d, tail, two heads, "g"] \\
A' \arrow[r, "F(h)"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Sia $G : \mathrm{Fun}(A', B') \to \mathrm{Fun}(A, B)$ tale per cui $G(k) = g^{-1} \circ k \circ f$. Mostriamo che F e G sono una l'inversa destra dell'altra:

- $F(G(k)) = F(g^{-1} \circ k \circ f) = g \circ g^{-1} \circ k \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{B'} \circ k \circ \mathrm{id}_{A'} = k$, ovverosia G è inversa destra di F.
- $G(F(h)) = G(g \circ h \circ f^{-1}) = g^{-1} \circ g \circ h \circ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B \circ h \circ \mathrm{id}_A = h$, ovverosia F è inversa destra di G.

Allora G è l'inversa di F, e dunque F è una bigezione. Si conclude pertanto che $|\mathrm{Fun}(A, B)| = |\mathrm{Fun}(A', B')|$.

(iv.) Dal momento che $|\mathcal{P}(A)| = |\mathrm{Fun}(A, \{0, 1\})|$, che $|\mathcal{P}(A')| = |\mathrm{Fun}(A', \{0, 1\})|$ e che – dal punto (iii.) – $|\mathrm{Fun}(A, \{0, 1\})| = |\mathrm{Fun}(A', \{0, 1\})|$, allora, per transitività, vale che $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$.

In alternativa, possiamo costruire $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A')$ tale per cui $F(C) = \{y \in A' \mid \exists x(x \in C \land y = f(x))\}$ per $C \subseteq A$, ovverosia $F(C)$ è l'immagine di C tramite f. F ammette come inversa $G : \mathcal{P}(A') \to \mathcal{P}(A)$ tale per cui $G(D) = \{z \in A \mid f(z) \in D\}$ per $D \subseteq A'$, ovverosia la controimmagine di D tramite f.

Mostriamo che F e G sono l'una l'inversa destra dell'altra:

- $G(F(C)) = G(\{y \in A' \mid \exists x(x \in C \land y = f(x))\}) = \{z \in A \mid f(z) \in \{y \in A' \mid \exists x(x \in C \land y = f(x))\}\} = \{z \in A \mid f(z) \in A' \land \exists x(x \in C \land f(z) = f(x))\}$.

  Dal momento che $f(z) \in A'$ è sempre vera e che $f(z) = f(x) \longleftrightarrow z = x$ per l'iniettività di f, l'insieme $G(F(C))$ si riscrive come $\{z \in A \mid \exists x(x \in C \land z = x)\} = \{z \in A \mid z \in C\} = C$, dunque F è inversa destra di G.
- $F(G(D)) = F(\{z \in A \mid f(z) \in D\}) = \{y \in A' \mid \exists x(x \in \{z \in A \mid f(z) \in D\} \land y = f(x))\} = \{y \in A' \mid \exists x(x \in A \land f(x) \in D \land y = f(x))\}$.

  Sostituendo $y = f(x)$ in $f(x) \in D$ ($\rightsquigarrow y \in D$), portando fuori $y \in D$ fuori dalle condizioni di esistenza (è indipendente dalla variabile x) e sfruttando che $\exists x(x \in A \land y = f(x))$ per $y \in A'$ è sempre vera per la suriettività di f, si riscrive $F(G(D))$ come $\{y \in A' \mid y \in D \land \exists x(x \in A \land y = f(x))\} = \{y \in A' \mid y \in D\} = D$, dunque G è inversa destra di F.

Allora G è l'inversa di F, e dunque F è una bigezione. Si conclude pertanto ancora che $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$.

Problema 12: Una bigezione da $\mathbb{N}$ ad $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme infinito. Si dimostri che la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ definita di seguito per ricorsione numerabile è una bigezione:

$$f(n) = \begin{cases} \min(A) & \text{se } n = 1, \\ \min(A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione. Mostriamo che, dato $n \in \mathbb{N}$, $f(n) < f(n+1)$, da cui si deduce che f è strettamente crescente e dunque iniettiva. Sia $B = A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}$. Allora $f(n) = \min(B)$ e $f(n+1) = \min(B \setminus \{f(n)\}$. In particolare $f(n+1)$ è dunque un numero naturale distinto da $f(n)$ e appartenente a B; essendo allora $f(n)$ il minimo di B, $f(n) < f(n+1)$.

Infine mostriamo che f è surgettiva. Supponiamo per assurdo che f non lo sia: allora $\operatorname{imm} f \neq A$, dunque $A \setminus \operatorname{imm} f$ – essendo sottinsieme di $\mathbb{N}$ – ammette un minimo a. Sicuramente $a \neq \min(A)$, perché $f(1) = \min(A)$; in particolare $a > \min(A)$. Allora $[\min(A), a)_A$ non è vuoto ed ammette dunque un massimo $a' \in A$. Poiché $a' < a$, essendo a il minimo di $A \setminus \operatorname{imm} f$, necessariamente $a' \in \operatorname{imm} f$, ovverosia esiste $n \in \mathbb{N}$ tale per cui $f(n) = \min(A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}) = a'$. Allora $f(n+1) = \min(A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1), a'\})$. Dal momento che $a \notin \operatorname{imm} f$, sicuramente $a \in A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1), a'\}$. Essendo a il successore di a' in A, allora a è anche il minimo di $a \in A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1), a'\}$, e dunque $f(n+1) = a$, ovverosia $a \in \operatorname{imm} f$, $\lightning$. Quindi f è surgettiva.

Dal momento che f è sia iniettiva che surgettiva, allora f è bigettiva.

Problema 13: Una funzione iniettiva da $\operatorname{Fun}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ in $[0,1)$

Si dimostri che la funzione da $\operatorname{Fun}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ in $[0,1)$ che associa a f la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{10^n}$ è iniettiva.

Soluzione. Siano f e g elementi di $\operatorname{Fun}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ tali per cui $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{10^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{g(n)}{10^n}$. Supponiamo $f \neq g$. Allora $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$, che dunque non è vuoto, ammette per il principio del buon ordinamento un minimo n_0 per cui $f(n_0) \neq g(n_0)$. Allora, eliminando i termini uguali precedenti a n_0 e moltiplicando per 10^{n_0} si ottiene:

$$f(n_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n_0 + n)}{10^n} = g(n_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{g(n_0 + n)}{10^n},$$

da cui:

$$f(n_0)-g(n_0)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{g(n_0+n)-f(n_0+n)}{10^n}.$$

Stimando $f(n_0)-g(n_0)$ sapendo che $f(n_0+n)$, $g(n_0+n)$ appartengono a $\{0,1\}$, si ottiene:

$$-\frac{1}{9}=\sum_{n\in\mathbb{N}}-\frac{1}{10^n}\leq f(n_0)-g(n_0)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{10^n}=\frac{1}{9}.$$

Poiché $f(n_0)-g(n_0)$ è un naturale tra -1, 0 e 1, ciò implica che sia 0, ossia $f(n_0)=g(n_0)$, $\lightning$. Quindi $f=g$, ossia la funzione indicata nella tesi è iniettiva.

> **Problema 14: Se X è infinito, allora $|\mathrm{Fin}(X)|=|\mathrm{FSeq}(X)|=|X|$ (AC)**
>
> Si assuma di sapere che AC è equivalente ad affermare che $|X\times X|=|X|$ per ogni X infinito. Assumendo allora AC, si dimostri che, dato X infinito, $|\mathrm{Fin}(X)|=|\mathrm{FSeq}(X)|=|X|$.

Soluzione. Poiché vale AC, esiste una funzione di scelta $f:\mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}\to X$, ovvero sia f è una funzione tale per cui $f(Y)\in Y$ per $Y\in\mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$.

Mostriamo in ordine i seguenti risultati:

(i.) $|X|\leq|\mathrm{Fin}(X)|$, (ii.) $|\mathrm{Fin}(X)|\leq|\mathrm{FSeq}(X)|$, (iii.) $|\mathrm{FSeq}(X)|\leq|X|$.

(i.) Sia $F_1:X\to\mathrm{Fin}(X)$ tale per cui $x\mapsto\{x\}$. Chiaramente F_1 è iniettiva, dunque $|X|\leq|\mathrm{Fin}(X)|$.

(ii.) Poiché X è infinito, in particolare X <u>non</u> è vuoto. Sia dunque c un elemento di X. Sia $Y\in\mathrm{Fin}(X)$ <u>non</u> vuoto. Se $n=|Y|$, allora si può definire per ricorsione numerabile la funzione $f_Y:n\to Y$ tale per cui:

$$f_Y(i)=\begin{cases} f(Y) & \text{se } i=0,\\ f(Y\setminus\{f_Y(0),\dots,f_Y(i-1)\}) & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Possiamo dunque definire $F_2:\mathrm{Fin}(X)\to\mathrm{FSeq}(X)$ in modo tale che $F_2(\varnothing)=(c)$ e $F_2(Y)=(c,f_Y(0),\dots,f_Y(|Y|-1))$. Mostriamo che F_2 è iniettiva.

Innanzitutto se $F_2(Y)=F_2(Y')$, deve chiaramente valere o $Y=Y'=\varnothing$ o $|Y|=|Y'|=n$. Allora, per la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate, deve valere $f_Y(0)=f_{Y'}(0)$, ..., $f_Y(n-1)=f_{Y'}(n-1)$. Poiché f_Y e $f_{Y'}$ sono funzioni surgettive, vale che:

$$Y=\operatorname{imm}f_Y=\{f_Y(0),\dots,f_Y(n-1)\}=\{f_{Y'}(0),\dots,f_{Y'}(n-1)\}=\operatorname{imm}f_{Y'}=Y'.$$

Dunque F_2 è iniettiva, da cui $|\mathrm{Fin}(X)|\leq|\mathrm{FSeq}(X)|$.

(iii.) Osserviamo innanzitutto che $\text{FSeq}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$. Poiché X non è vuoto esiste un elemento $c \in X$. Allora $|X| \leq |\{c\} \times X| \leq |\mathbb{N} \times X| \leq |X \times X| = |X|$, dove si è usato che X si immerge in modo naturale in $\{c\} \times X$, che $\{c\} \leq \mathbb{N}$ dacché $\mathbb{N}$ è non vuoto, e che X, essendo infinito, ammette una funzione surgettiva su $\mathbb{N}$. Pertanto, per il teorema di Cantor-Bernstein, vale che $|\mathbb{N} \times X| = |X|$.

Dal momento che X è infinito, sappiamo che $|X^n| = |X|$ applicando ricorsivamente $|X \times X| = |X|$, che sappiamo essere vero grazie all'assioma di scelta. Quindi $\text{Big}(X^n, X)$ è non vuoto. Allora, ancora per l'assioma di scelta, $\bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \text{Big}(X^n, X)$ è non vuoto. Sia $(f_i \mid i \in \mathbb{N}) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \text{Big}(X^n, X)$. Costruiamo $F_3 : \text{FSeq}(X) \to \mathbb{N} \times X$ in modo tale che $F_3((x_1, \ldots, x_n)) = (n, f_n((x_1, \ldots, x_n)))$.

Mostriamo che F_3 è iniettiva. Se $F_3((x_1, \ldots, x_n)) = F_3((y_1, \ldots, y_m))$, allora $(n, f_n((x_1, \ldots, x_n))) = (m, f_n((y_1, \ldots, y_m)))$. Per la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate, dalle prime coordinate si ricava $m = n$, e poi dalle seconde si deduce che $f_n((x_1, \ldots, x_n)) = f_n((y_1, \ldots, y_n))$, e dunque che $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$. Dunque F_3 è iniettiva, da cui $|\text{FSeq}(X)| \leq |\mathbb{N} \times X|$.

Per quanto detto prima $|\mathbb{N} \times X| = |X|$, dunque $|\text{FSeq}(X)| \leq |X|$.

Infine, applicando il teorema di Cantor-Bernstein sulla catena:

$$|X| \leq |\text{Fin}(X)| \leq |\text{FSeq}(X)| \leq |X|,$$

si ottiene esattamente la tesi.

Problema 15: $|X| \leq |Y| \longrightarrow |\text{Fin}(X)| \leq |\text{Fin}(Y)|$ **e** $|\text{FSeq}(X)| \leq |\text{FSeq}(Y)|$

Siano X e Y insiemi non vuoti tali per cui $|X| \leq |Y|$. Si mostri che $|\text{Fin}(X)| \leq |\text{Fin}(Y)|$ e che $|\text{FSeq}(X)| \leq |\text{FSeq}(Y)|$.

Soluzione. Sia $f : X \to Y$ una funzione iniettiva. Allora f induce due funzioni $F : \text{Fin}(X) \to \text{Fin}(Y)$ e $S : \text{FSeq}(X) \to \text{FSeq}(Y)$, dove $F(Z) = f(Z)$, per $Z \in \text{Fin}(X)$, e $S((x_1, \ldots, x_n)) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ per x_1, ..., x_n appartenenti a X e n variabile tra i numeri naturali.

Poiché f è iniettiva, F lo è – infatti $F(Z) = F(Z') \longrightarrow F^{-1}(F(Z)) = F^{-1}(F(Z')) \longrightarrow Z = Z'$; dunque $|\text{Fin}(X)| \leq |\text{Fin}(Y)|$.

Inoltre, se $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\widehat{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ sono sequenze finite in $\text{FSeq}(X)$ con m e n numeri naturali, allora $S(\widehat{x}) = S(\widehat{y})$ implica sicuramente $m = n$. D'altra parte, per la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate, $S(\widehat{x}) = S(\widehat{y})$ implica $f(x_i) = f(y_i)$ per ogni i naturale tra 1 e n. Dacché f è iniettiva, questo vuol dire che $x_i = y_i$ per ogni tale i, e dunque che $\widehat{x} = \widehat{y}$, ovverosia S è iniettiva. Pertanto $|\text{FSeq}(X)| \leq |\text{FSeq}(Y)|$.

Problema 16: Se $A \cap A' = \varnothing$, $|\mathrm{Fun}(A, B) \times \mathrm{Fun}(A', B)| = |\mathrm{Fun}(A \cup A', B)|$

Siano A e A' due insiemi per cui $A \cap A' = \varnothing$. Sia anche B un insieme. Si mostri allora che $|\mathrm{Fun}(A, B) \times \mathrm{Fun}(A', B)| = |\mathrm{Fun}(A \cup A', B)|$.

Soluzione. Siano $f : A \to B$ e $g : A' \to B$ due funzioni. Dal momento che $A \cap A' = \varnothing$, $f \cup g$ è ancora una funzione – infatti non vi sono collisioni nel dominio. Allora $F : \mathrm{Fun}(A, B) \times \mathrm{Fun}(A', B) \to \mathrm{Fun}(A \cup A', B)$ dove $F((f, g)) = f \cup g$ è ben definita.

Sia $G : \mathrm{Fun}(A \cup A', B) \to \mathrm{Fun}(A, B) \times \mathrm{Fun}(A', B)$ definita in modo tale che $G(h) = (h|_A, h|_{A'})$, dove $f|_{X'} := f \cap (X' \times \operatorname{imm} f)$ è la restrizione di $f : X \to Y$ sul dominio $X' \subseteq X$. Mostriamo che F e G sono l'una l'inversa destra dell'altra.

- $G(F((f, g)) = G(f \cup g) = ((f \cup g|_A), (f \cup g|_{A'}))$. Poiché $A \cap A' = \varnothing$, non vi sono collisioni nel dominio, e dunque $G(F((f, g))) = (f, g)$ dacché f ha dominio A e g ha dominio A'. Dunque F è inversa destra di G.
- $F(G(h)) = F((h|_A, h|_{A'})) = h|_A \cup h|_{A'} = h$. Dunque G è inversa destra di F.

Si conclude dunque che G è l'inversa di F, ovverosia che F è una bigezione. Dunque $|\mathrm{Fun}(A, B) \times \mathrm{Fun}(A', B)| = |\mathrm{Fun}(A \cup A', B)|$.

Problema 17: Calcolo di cardinalità riguardanti $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ (AC)

Sia n un numero naturale. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi, applicando l'assioma di scelta solo dove indicato:

(a.) $\mathbb{R}^n$,	(b.) $\mathrm{Fin}(\mathbb{R})$,	(c.) $\mathrm{FSeq}(\mathbb{R})$,	(d.) $\mathrm{FSeq}{\uparrow}(\mathbb{R})$,
(e.) $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$,	(f.) $\mathrm{Fun}{\uparrow}(\mathbb{N}, \mathbb{N}))$,	(g.) $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$,	(h.) $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,
(i.) $\mathrm{Fun}{\uparrow}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,	(j.) $[\mathbb{N}]^{\aleph_0}$,	(k.) $[\mathbb{R}]^{\aleph_0}$ (AC),	(l.) $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
(m.) $C^0(\mathbb{R})$,	(n.) $\mathfrak{O}(\mathbb{R}^2)$.		

Soluzione. Risolviamo ogni punto del problema.

(a.) Sappiamo che $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Posto allora che $\left|\mathbb{R}^{n-1}\right| = \mathfrak{c}$, vale che $|\mathbb{R}^n| = \left|\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\right| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Si conclude allora per induzione che $|\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}$.

(b., c.) Poiché $\mathbb{R}$ è infinito, $|\mathrm{Fin}(\mathbb{R})| = |\mathrm{FSeq}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (vd. *Problema 14*).

(d.) Poiché $\mathrm{FSeq}{\uparrow}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{FSeq}(\mathbb{R})$, sicuramente $|\mathrm{FSeq}{\uparrow}(\mathbb{R})| \leq \mathfrak{c}$ per il punto (c.). D'altra parte $\mathbb{R}$ si immerge naturalmente in $\mathrm{FSeq}{\uparrow}(\mathbb{R})$ (un numero è una 1-sequenza, crescente per mancanza di altri numeri), dunque $\mathfrak{c} \leq |\mathrm{FSeq}{\uparrow}(\mathbb{R})|$. Allora, per il teorema di Cantor-Bernstein, $|\mathrm{FSeq}{\uparrow}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

(e.) Poiché $|2| \leq |\mathbb{N}|$, allora $\mathfrak{c} = \left|2^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| \leq \left|2^{\mathbb{N}}\right| = \mathfrak{c}$, dove abbiamo usato anche che $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Dunque, per il teorema di Cantor-Bernstein, $|\mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

(f.) Dacché $\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N},\mathbb{N}) \subseteq \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, allora $|\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N},\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}$.

Poiché $\mathbb{N}$ è infinito, $|\mathrm{Fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$. Allora, dacché $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$, $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ (vd. *Problema 19*). Sia $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$. Possiamo definire per ricorsione numerabile la funzione $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che:

$$f_A(n) = \begin{cases} \min(A) & \text{se } n = 1, \\ \min(A \setminus \{f(1), \dots, f(n)\}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente f_A è crescente e ha A come immagine (vd. *Problema 12*) – da cui $f_A = f_B \longrightarrow A = B$ (vd. *Problema 14*, (ii.) per una semplice dimostrazione). Dunque la mappa $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N}) \to \mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N},\mathbb{N})$ tale per cui $F(Y) = f_Y$ è iniettiva, da cui si deduce che $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})| \leq |\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N},\mathbb{N})|$.

Infine, per il teorema di Cantor-Bernstein, si deduce che $|\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N},\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

(g.) Dal momento che $\mathfrak{S}(\mathbb{N}) \subseteq \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, allora sicuramente $|\mathfrak{S}(\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}$. Da (f.) sappiamo che $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Sia A un sottinsieme infinito di $\mathbb{N}$. Definiamo per ricorsione numerabile la funzione $f_A : \mathbb{N} \to A$ tale per cui:

$$f_A(n) = \begin{cases} \min(A) & \text{se } n = 1, \\ \min(A \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sappiamo che f_A è bigettiva (vd. *Problema 12*). Definiamo allora $\sigma_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per ricorsione numerabile in modo tale che:

$$\sigma_A(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus A, \\ f_A(n-1) & \text{se } f_A^{-1}(n) \text{ è pari}, \\ f_A(n+1) & \text{se } f_A^{-1}(n) \text{ è dispari}. \end{cases}$$

In altre parole σ_A "modifica" l'identità $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ trasponendo a due a due i numeri consecutivi della lista $(f_A(1), f_A(2), \ldots)$.

Definiamo $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ in modo tale che $F(A) = \sigma_A$. Mostriamo che F è iniettiva. Se $\sigma_A = \sigma_B$, allora σ_A e σ_B hanno lo stesso insieme di punti fissi, ovverosia, poiché f_A è bigettiva, $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \setminus B$, da cui $A = B$. Pertanto $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})| \leq |\mathfrak{S}(\mathbb{N})|$.

Infine, per il teorema di Cantor-Bernstein si conclude che $|\mathfrak{S}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

(h.) Si osserva che $\mathfrak{c} = \left|2^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \left|(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = \mathfrak{c}$. Allora, per il teorema di Cantor-Bernstein, $|\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

(i.) Poiché $\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, sicuramente $|\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{R})| \leq \mathfrak{c}$.

Sia ι l'immersione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Poiché ι mantiene l'ordinamento, la funzione $F : \mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to \mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tale per cui $F(f) = f \circ \iota$ è ben definita e iniettiva. Dunque $\mathfrak{c} = |\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{N})| \leq |\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{R})|$.

Si conclude dunque che, per il teorema di Cantor-Bernstein, $|\mathrm{Fun}\!\uparrow\!(\mathbb{N}, \mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

(j.) Poiché i sottinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ sono sono numerabili, $[\mathbb{N}]^{\aleph_0} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$. Dacché $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ e $|\mathrm{Fin}(\mathbb{N})| = \aleph_0$ (vd. *Problema 14*), allora si sta togliendo un insieme al più numerabile ad un insieme che ha la cardinalità del continuo. Pertanto, per il *Problema 19*, $\left|[\mathbb{N}]^{\aleph_0}\right| = \mathfrak{c}$.

(k.) Sia $F : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\aleph_0}$ definita in modo tale che $F(x) = \{x - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Chiaramente F è iniettiva, da cui $\mathfrak{c} \leq \left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right|$.

Sia $A \in [\mathbb{R}]^{\aleph_0}$. Poiché A è numerabile, esiste una funzione iniettiva $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{imm} f_A = A$. In particolare $B_A = \{f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \operatorname{imm} f = A\}$ <u>non</u> è vuoto. Pertanto, applicando l'assioma di scelta, $\bigtimes_{A \in [\mathbb{R}]^{\aleph_0}} B_A$ è <u>non</u> vuoto. Sia F dunque una funzione in $\bigtimes_{A \in [\mathbb{R}]^{\aleph_0}} B_A$. F è iniettiva, infatti $F(A) = F(A') \longrightarrow \operatorname{imm} F(A) = \operatorname{imm} F(A')$, da cui $A = A'$. Pertanto $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$, e per il punto (h.) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \mathfrak{c}$. Pertanto $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| \leq \mathfrak{c}$.

Applicando il teorema di Cantor-Bernstein si conclude che $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| = \mathfrak{c}$.

(l.) Poiché $\mathfrak{c} = |\{0\} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, per il teorema di Cantor-Bernstein vale che $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Dacché $\left|2^{\mathbb{R}}\right| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}}\right| = \left|2^{\mathbb{R}}\right|$, allora, ancora per il teorema di Cantor-Bernstein, $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|2^{\mathbb{R}}\right| > \mathfrak{c}$.

(m.) Dal momento che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, una funzione continua è completamente determinata dalla sua restrizione su $\mathbb{Q}$. Pertanto la mappa $F : C^0(\mathbb{R}) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ tale per cui $F(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ è iniettiva. Dunque $\left|C^0(\mathbb{R})\right| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$. Per (h.) $|\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})| = \mathfrak{c}$, dunque $\left|C^0(\mathbb{R})\right| \leq \mathfrak{c}$. Allo stesso tempo la mappa $G : \mathbb{R} \to C^0(\mathbb{R})$ tale per cui $G(k) = [x \mapsto x + k]$ è iniettiva, e dunque $\mathfrak{c} \leq \left|C^0(\mathbb{R})\right|$. Per il teorema di Cantor-Bernstein si deduce allora che $\left|C^0(\mathbb{R})\right| = \mathfrak{c}$.

(n.) Dal[2] momento che la topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ è più fine di quella cofinita, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vale $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)\} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Dunque la mappa $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ tale per cui $(x, y) \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)\}$ è ben definita. Si osserva che F è chiaramente iniettiva, dunque $\mathfrak{c} = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \leq \left|\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)\right|$.

Dacché $\mathbb{Q}^2$ è denso nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \mid \exists q_1 \exists q_2 \exists r (q_1 \in \mathbb{Q} \wedge q_2 \in \mathbb{Q} \wedge r \in \mathbb{Q}^+ \wedge z = B_r(q_1, q_2))\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Dunque per ogni $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ l'insieme $B_A = \{z \in$

[2] Il procedimento presentato si può facilmente generalizzare per dimostrare che $|\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)| = \mathfrak{c}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \mid \exists q_1 \exists q_2 \exists r (q_1 \in \mathbb{Q} \wedge q_2 \in \mathbb{Q} \wedge r \in \mathbb{Q}^+ \wedge z = (q_1, q_2, r) \wedge B_r(q_1, q_2) \in \mathcal{P}(A)\}$ è non vuoto.

Sia $f : \mathbb{O}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)$ tale per cui $f(A) = B_A$. Allora f è chiaramente iniettiva, e dunque $\left|\mathbb{O}(\mathbb{R}^2)\right| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

Infine, per il teorema di Cantor-Bernstein, si conclude che $\left|\mathbb{O}(\mathbb{R}^2)\right| = \mathfrak{c}$.

Problema 18: Una relazione numerabile ha dominio e immagine al più numerabile (senza fare uso di AC**)**

Sia $\mathcal{R}$ una relazione con $|\mathcal{R}| = \aleph_0$. Si dimostri allora che $|\mathrm{dom}(\mathcal{R})| \leq \aleph_0$ e che $|\mathrm{imm}(\mathcal{R})| \leq \aleph_0$, senza impiegare l'assioma di scelta.

Soluzione. Sia $f : \mathcal{R} \to \mathbb{N}$ una bigezione tra $\mathcal{R}$ e $\mathbb{N}$. Sia $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$. Definiamo allora $A_x = \{z \in \mathcal{R} \mid \exists y (y \in \mathrm{imm}\,\mathcal{R} \wedge z = (x, y))\}$, che è un insieme per l'assioma di separabilità. Poiché $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$, A_x non è vuoto. Pertanto, per il principio del buon ordinamento, $f(A_x)$ ammette un minimo.

Sia $F : \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \to \mathbb{N}$ tale per cui $F(x) = \min(f(A_x))$. Mostriamo che F è iniettiva. $F(x) = F(y) \longrightarrow \min(f(A_x)) = \min(f(A_y))$. Siano m, $n \in \mathrm{imm}\,\mathcal{R}$ con $(x, m) \in \mathcal{R}$ e $(y, n) \in \mathcal{R}$ tali per cui $\min(f(A_x)) = f((x, m))$ e $\min(f(A_y)) = f((y, n))$; allora $f((x, m)) = f((y, n))$. Dacché f è una bigezione, $(x, m) = (y, n)$. Pertanto, per la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate, $x = y$. Dunque F è iniettiva, da cui $|\mathrm{dom}(\mathcal{R})| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Analogamente, se $y \in \mathrm{imm}(\mathcal{R})$, si può definire tramite l'assioma di separabilità l'insieme $B_y = \{z \in \mathcal{R} \mid \exists x (x \in \mathrm{dom}\,\mathcal{R} \wedge z = (x, y))\}$. In questo modo possiamo costruire $G : \mathrm{imm}(\mathcal{R}) \to \mathbb{N}$ tale per cui $G(y) = \min(f(B_y))$, che si mostra allo stesso modo essere iniettiva, da cui $|\mathrm{imm}(\mathcal{R})| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Problema 19: Se A è al più numerabile e B ha almeno la cardinalità del continuo, $|B \setminus A| = |B|$

Si assuma già di sapere che, dato $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $|C| \leq \aleph_0$, vale che $|(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus C| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Si deduca che, dati B con $|B| \geq \mathfrak{c}$ e A con $|A| \leq \aleph_0$, allora $|B \setminus A| = |B|$.

Soluzione. Possiamo assumere senza perdita di generalità che A sia sottinsieme di B. Infatti $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ e $|A \cap B| \leq |A| \leq \aleph_0$, dunque le ipotesi sono ancora vere scegliendo $A \cap B$ al posto di A, dando lo stesso risultato.

Poiché $|B| = \mathfrak{c}$, esiste una funzione bigettiva $f : B \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. In particolare $|f(A)| = |A| \leq \aleph_0$ e $f(A) \subseteq f(B) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Allora, per ipotesi vale $|f(B) \setminus f(A)| = |f(B)|$, da cui $|B| = |f(B)| = |f(B) \setminus f(A)| = |B \setminus A|$.

Poiché $|B| \geq \mathfrak{c}$, esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to B$. In particolare $\left|f^{-1}(A)\right| \leq |A| = \aleph_0$ e $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Allora, per ipotesi vale $\left|f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)\right| = \left|f^{-1}(B)\right|$, da cui $|B| \geq \left|f^{-1}(B)\right| = \left|f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)\right|$

> **Problema 20: Cardinalità di $A \setminus B$ e $A \cup B$ se $|B| < |A|$ e A è infinito (AC)**
>
> Sia A un insieme infinito e sia B tale per cui $|B| < |A|$. Si dimostri che $|A \setminus B| = |A \cup B| = |A|$, assumendo l'assioma di scelta.

Soluzione. Il caso per B finito è già stato trattato; occupiamoci del caso in cui anche B è infinito. Mostriamo innanzitutto che $|A \cup B| = |A|$. Si ha chiaramente $|A \cup B| \leq |A \sqcup B|$. Inoltre $|A \sqcup B| \leq |A \times B|$, grazie all'infinità di B. Allora:

$$|A| \leq |A \cup B| \leq |A \times B| \leq |A \times A| = |A|,$$

dove AC è stato usato per giustificare $|A \times A| = |A|$. Si conclude allora per il teorema di Cantor-Bernstein che $|A| = |A \cup B|$.

Per dimostrare che $|A \setminus B| = |A|$, osserviamo che $|A| = |A \setminus B \sqcup B|$. Se fosse $|A \setminus B| \leq |B|$, si avrebbe $|A| = |B|$ per il punto precedente, $\lightning$. Allora $|A \setminus B \sqcup B| = |A \setminus B|$, da cui la tesi.

> **Problema 21: Proprietà dei numeri naturali (1) – Definizione equivalente dell'ordinamento stretto**
>
> Siano n, $m \in \omega$. Si dimostri che $n \in m \longleftrightarrow n \subsetneq m$.

Soluzione. Mostriamo per induzione che $\varphi(m)$ è vera per ogni $m \in \omega$, dove:

$$\varphi(m) = \forall n (n \in m \longrightarrow n \subsetneq m).$$

$\boxed{\varphi(0)}$ Dal momento che $0 = \varnothing$ non ammette elementi, $\Psi(0)$ è vacuamente vera.

$\boxed{\varphi(m+1)}$ Se $n \in m+1$, allora $n \in m$ o $n = m$. Se $n \in m$, allora, per l'ipotesi induttiva, vale che $n \subsetneq m$. Dal momento che $m+1 = m \cup \{m\}$, allora $n \subsetneq m+1$. Se invece $n = m$, per definizione di $m+1$ vale $n \subsetneq m+1$. Pertanto $\varphi(m+1)$ vale se vale $\varphi(m)$.

Pertanto, applicando il principio di induzione, se m è un elemento di ω, $n \in m \longrightarrow n \subsetneq m$. Mostriamo infine per induzione che $\Psi(m)$ è vera per ogni $m \in \omega$, dove:

$$\Psi(m) = \forall n (n \in \omega \longrightarrow (n \in m \longleftrightarrow n \subsetneq m)).$$

$\boxed{\Psi(0)}$ Dal momento che $0 = \varnothing$ non ammette elementi né sottinsiemi propri, $\Psi(0)$ è vacuamente vera.

$\boxed{\Psi(m+1)}$ Una direzione è già verificata dal momento che vale $\varphi(m+1)$. Sia pertanto $n \subsetneq m+1 = m \cup \{m\}$ con $n \in \omega$. Se valesse $m \in n$, allora – poiché vale $\varphi(n)$ (qui è cruciale che n sia un numero naturale!) – $m \subsetneq n$, da cui $m+1 = m \cup \{m\} \subseteq n$; questo è tuttavia assurdo, dacché implicherebbe $n = m+1$, $\lightning$. Pertanto $m \notin n$, da cui $n \subseteq m$. Se $n = m$, allora $n = m \in m+1$ per costruzione; altrimenti $n \subsetneq m$, da cui, per l'ipotesi induttiva, si ricava che $n \in m$, e dunque che $n \in m+1$. Pertanto $\Psi(m+1)$ vale se vale $\Psi(m)$,

Infine si conclude che $\Psi(m)$ è vera per ogni $m \in \omega$ applicando il principio d'induzione, ovverosia è vera la tesi.

> **Problema 22: Proprietà dei numeri naturali (2) – Massimo e minimo tra n e m**
>
> Siano n, $m \in \omega$. Si dimostri che $\min\{n, m\} = n \cap m$ e che $\max\{n, m\} = n \cup m$.

Soluzione. Se $n \leq m$, allora $n \subseteq m$ per il *Problema 21*. Dunque $\min\{n, m\} = n = n \cap m$ e $\max\{n, m\} = m = n \cup m$. Analogamente se $m \leq n$, allora $m \subseteq n$, da cui $\min\{n, m\} = m = n \cap m$ e $\max\{n, m\} = n = n \cup m$.

> **Problema 23: Proprietà dei numeri naturali (3) – ω è un insieme transitivo**
>
> Si mostri che ω è transitivo, ovvero si dimostri che gli elementi degli elementi di ω sono elementi di ω.

Soluzione. Mostriamo per induzione che $\Psi(m)$ è vera per ogni $m \in \omega$, dove:

$$\Psi(m) = \forall n (n \in m \longrightarrow n \in \omega).$$

$\boxed{\Psi(0)}$ Dal momento che $0 = \varnothing$ non ammette elementi, $\Psi(0)$ è vacuamente vera.

$\boxed{\Psi(m+1)}$ Sia $n \in m+1$. Allora $n = m$ o $n \in m$. Nel primo caso, n appartiene a ω (infatti $m \in \omega$); nel secondo caso, per ipotesi induttiva, $n \in \omega$. Dunque $\Psi(m+1)$ vale se $\Psi(m)$.

Pertanto, applicando il principio di induzione si ricava che $\Psi(m)$ è vera per ogni $m \in \omega$, ovverosia ω è un insieme transitivo.

> **Problema 24: Proprietà dei numeri naturali (4) – $\widehat{x} \in \omega \longrightarrow x \in \omega$**
>
> Si mostri che se $\widehat{x} := x \cup \{x\}$ appartiene a ω, allora $x \in \omega$.

Soluzione. Sappiamo grazie al *Problema 23* che ω è un insieme transitivo. Dal momento che $x \in \widehat{x}$ e $\widehat{x} \in \omega$, allora $x \in \omega$, essendo elemento di un elemento di ω.

Problema 25: Infinito $\longrightarrow$ Dedekind-infinito (AC)

Sia A un insieme infinito. Assumendo l'assioma di scelta, si dimostri che A è Dedekind-infinito, ovverosia si mostri che esiste $B \subsetneq A$ tale per cui $|B| = |A|$.

Soluzione. Poiché vale AC e A è infinito, esiste una funzione iniettiva $f : \omega \to A$. Dacché $|\omega| = |\omega \setminus \{0\}|$ tramite la bigezione indotta dal successore $S : n \mapsto n+1$, allora $|f(\omega)| = |f(\omega \setminus \{0\})|$. Detto allora $B = f(\omega \setminus \{0\})$, chiaramente $A \neq B$ dal momento che f è iniettiva. Dunque B è l'insieme desiderato.

Problema 26: Caratterizzazioni delle bigezioni su insiemi finiti

Sia A un insieme finito e sia $f : A \to A$ una funzione. Si mostri che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i.) f è bigettiva,

(ii.) f è iniettiva,

(iii.) f è surgettiva.

Soluzione. Mostriamo il ciclo di implicazioni (i.) $\longrightarrow$ (ii.) $\longrightarrow$ (iii.) $\longrightarrow$ (i.), in modo tale da dimostrare tutte le equivalenze.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ Se f è bigettiva, allora f è per definizione anche iniettiva.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(iii.)}}$ Se $f : A \to A$ è iniettiva, Se f non fosse surgettiva, allora $f(A)$ sarebbe un sottinsieme proprio di A, e dunque si avrebbe $|f(A)| < |A|$, violando il principio dei cassetti. Dunque f è surgettiva.

$\boxed{\text{(iii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Poiché A è finito[3], f ammette un'inversa destra $g : A \to A$, che è iniettiva. Allora, poiché (ii.) $\longrightarrow$ (iii.), g è surgettiva, e dunque g è bigettiva. Pertanto f è anch'essa bigettiva essendo l'inversa di g.

Problema 27: A, B finiti $\longrightarrow$ $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$ finiti

Siano A e B due insiemi finiti. Si mostri che i seguenti insiemi sono finiti:

(a.) $A \cap B$, (b.) $A \cup B$, (c.) $A \times B$, (d.) $\mathcal{P}(A)$.

Soluzione. Mostriamo le varie richieste ordinatamente.

[3] Se A è finito, f è ammette sempre un'inversa destra, anche senza utilizzare AC.

(a.) Poiché $A \cap B \subseteq A$ e A è finito, allora $A \cap B$ è sottinsieme di un insieme finito e dunque è finito.

(b.) Mostriamo per induzione che vale $\Psi(m)$ per ogni $m \in \omega$, dove:

$$\Psi(m) = \forall n \forall A \forall B((|A| = m \wedge |B| = n) \longrightarrow \exists k(k \in \omega \wedge |A \cup B| = k)).$$

$\boxed{\Psi(0)}$ Se $|A| = 0$, allora A necessariamente è l'insieme vuoto. Dunque $|A \cup B| = |B| = m$. Pertanto $\Psi(0)$ è vera.

$\boxed{\Psi(m+1)}$ Sappiamo che $|A| = m+1$. Sia $f : A \to m+1$ una bigezione. Se poniamo $A' = f^{-1}(m+1 \setminus \{m\}$, allora $|A'| = |m|$. Pertanto, per l'ipotesi induttiva esiste $k \in \omega$ tale per cui $|A' \cup B| = k$; in particolare esiste una bigezione $g : A' \cup B \to k$. Se $f^{-1}(\{m\}) \in B$, $A' \cup B = A \cup B$ e dunque $|A \cup B| = k$. Altrimenti, possiamo estendere g ad $h : A \cup B \to k+1$ ponendo $h|_{A' \cup B} = g$ e $h(f^{-1}(\{m\})) = k$. Dal momento che h è l'incollamento di due bigezioni, la cui seconda va da $\{f^{-1}(\{m\})\}$ in $\{k\}$, a dominio e immagini disgiunte, h è una bigezione, e dunque $|A \cup B| = k+1$. Pertanto $\Psi(m+1)$ vale se vale $\Psi(m)$.

Si conclude dunque per il principio di induzione che $A \cup B$ è sempre finito se A e B lo sono.

(c.) Se $|B| = n$, allora esiste una bigezione $f : n \to B$. Costruiamo allora $\sigma : n \to A \times B$ in modo tale che $\sigma(i) = A \times \{f(i)\}$. In particolare, dacché $|A| = |A \times \{f(i)\}|$ per ogni $i \in n$, $\sigma(i)$ è sempre finito. Osserviamo che $A \times B = \bigcup \operatorname{imm} \sigma = \bigcup_{i \in n} A \times \{f(i)\}$. Allora $A \times B$ è unione finita di insiemi finiti, e dunque è finita per il punto (b.)[4].

(d.) Dal momento che $|A| = m \longrightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(m)|$, è sufficiente mostrare che $\mathcal{P}(m)$ è finito. Mostriamo dunque per induzione che vale $\varphi(m)$ per ogni $m \in \omega$, dove:

$$\varphi(m) = \forall A((|A| = m) \longrightarrow \exists j(j \in \omega \wedge |\mathcal{P}(A)| = j)).$$

$\boxed{\varphi(0)}$ $|A| = 0$ è possibile se e solo se $A = 0$. Allora $\mathcal{P}(0) = 1$, che è finito.

$\boxed{\varphi(m+1)}$ È sufficiente mostrare la tesi per $m+1$ dacché, per il *Problema 11*, insiemi equipotenti hanno parti equipotenti. Si osserva che $\mathcal{P}(m+1) = \mathcal{P}(m \cup \{m\}) = \bigcup_{i \in m+1} \mathcal{P}(m \setminus \{i\} \cup \{m\})$. Ogni $m \setminus \{i\} \cup \{m\}$ ha la cardinalità di m, e dunque, per l'ipotesi induttiva, $\mathcal{P}(m \setminus \{i\} \cup \{m\})$ è finito. Allora, per (b.)[4], $\mathcal{P}(m+1)$ è finito. Dunque $\varphi(m+1)$ vale se vale $\varphi(m)$.

Si conclude dunque per il principio di induzione che $\mathcal{P}(A)$ è sempre finito se A è finito.

[4] In realtà il punto (b.) dimostra solo che l'unione di due insiemi finiti è finita, ma si può estendere la tesi a un numero finito di insiemi finiti applicando il principio di induzione.

Problema 28: La somma e il prodotto su ω sono ben definiti

Siano m e $n \in \omega$. Ricordiamo allora che, dati A e B insiemi qualsiasi tali per cui $|A| = m$, $|B| = n$ e $A \cap B = \varnothing$, si definiscono somma e prodotto come segue:

$$m + n = |A \cup B|, \quad m \cdot n = |m \times n|.$$

Si mostri che entrambe le definizioni sono ben poste.

Soluzione. Per il *Problema 27*, sia $A \cup B$ che $m \times n$ sono finiti, essendo A, B, m e n finiti. Pertanto il prodotto è già ben definito. Per il *Problema 11*, scambiando A e B con insiemi equipotenti ancora disgiunti, si ottiene ancora un insieme equipotente a $A \cup B$, e dunque anche la somma è ben definita.

Problema 29: Associatività della somma su ω

$+$ è associativa, cioè:

$$\forall x, y, z, (x + y) + z = x + (y + z).$$

Soluzione. Mostriamo la tesi per induzione su y, applicando ripetutamente gli assiomi di Peano e la commutatività di $+$.

$\boxed{y = 0}$ $(x + 0) + z = x + z = x + (0 + z)$, dove abbiamo usato la commutatività di $+$ e il primo assioma di Peano.

$\boxed{S(y)}$ $(x + S(y)) + z = S(x + y) + z = S((x + y) + z) = S(x + (y + z)) = x + S(y + z) = x + (S(y) + z)$.

Problema 30: Distributività della somma rispetto al prodotto su ω

$+$ è distributiva rispetto a $\cdot$, cioè:

$$\forall x, y, z, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Soluzione. Mostriamo la tesi per induzione su y, applicando ripetutamente gli assiomi di Peano e la commutatività di $+$.

$\boxed{y = 0}$ $x \cdot (0 + z) = x \cdot z = 0 + x \cdot z = x \cdot 0 + x \cdot z$.

$\boxed{S(y)}$ $x \cdot (S(y) + z) = x \cdot S(y + z) = x \cdot (y + z) + x$, quindi:

$$x \cdot (y + z) + x = x \cdot y + x \cdot z + x = x \cdot y + x \cdot S(z) = x \cdot (y + S(z)) = x \cdot (S(y) + z).$$

Problema 31: La somma e il prodotto di elementi non nulli è non nulla

Si dimostrino i seguenti due risultati.

(i.) Se x o y sono non nulli, allora $x+y \neq 0$.

(ii.) Se sia x che y sono non nulli, allora $x \cdot y \neq 0$.

Soluzione. Mostriamo i due risultati separatamente, applicando ripetutamente gli assiomi di Peano e la commutatività di $+$.

(i.) Mostriamo il risultato per $x \neq 0$: è sufficiente utilizzare la commutatività di $+$ per ricondursi a questo caso. Poiché $x \neq 0$, $x = S(z)$ per qualche y. Allora $x+y = S(z)+y = S(z+y)$. Essendo allora $x+y$ un successore, questo è diverso da zero.

(ii.) Mostriamo il risultato per induzione su x a partire da $S(0)$:

$\boxed{S(0)}$ $S(0) \cdot y = 0 \cdot y + y = 0 + y = y \neq 0$.

$\boxed{S(x)}$ $S(x) \cdot y = x \cdot y + y$. Per ipotesi induttiva $x \cdot y \neq 0$; poiché anche $y \neq 0$, si conclude per (i.).

Problema 32: Relazione d'ordine totale sui modelli di PA

Se $(N, 0, S, +, \cdot)$ è un modello di PA, ossia un modello degli assiomi di Peano al primo ordine, allora la relazione:

$$x < y \longleftrightarrow \exists z(z \neq 0 \land x + y = y)$$

è tale per cui:

(i.) $<$ è un ordine totale su N,

(ii.) $x < y$, allora $\forall z(z \in N \longrightarrow x + z < y + z)$.

(iii.) $x < y$, allora $\forall z(z \in N \land z \neq 0 \longrightarrow x \cdot z < y \cdot z)$.

(iv.) Su ω, $x < y$ se e solo se $x \in y$.

Soluzione. Mostriamo i vari risultati separatamente.

(i.) Mostriamo separatamente antiriflessività, transitività e confrontabilità.

$\boxed{\text{Antiriflessività}}$ Per induzione su x con la formula $P(x) = \forall x \neg \exists y(y \neq 0 \land x = x + y)$.

$\boxed{P(0)}$ $0 + y = y$, dunque la tesi è banale.

$\boxed{P(S(x))}$ Supponiamo sia $S(x) = S(x) + y = S(x+y)$. Se fosse $y \neq 0$, per ipotesi induttiva $x \neq x + y$, e questo violerebbe l'iniettività di $S(\cdot)$. Dunque $y = 0$.

$\boxed{\text{Transitività}}$ Per induzione su x con la formula $P(x) = \forall y \forall z (x < y < z \longrightarrow x < z)$.

$\boxed{P(0)}$ Poiché vale $0 < y$, allora esiste $y' \neq 0$ tale per cui $y = y' + 0 = y'$. Quindi $y' \neq 0$. Allora da $y < z$ si ricava invece $z = y + z'$ con $z' \neq 0$, e quindi $z = 0 + (y + z')$, dove $y + z' \neq 0$, e quindi $0 < z$.

$\boxed{P(S(x))}$ Sia $S(x) < y < z$. Allora esistono y', z' non nulli tali per cui $y = S(x) + y'$ e $z = y + z'$. Dunque, poiché $S(x) + y' = x + S(y)$, si ottiene $y > x$, e dunque $z > x$ per ipotesi induttiva, ovverosia esiste z'' non nullo tale per cui $z = x + z''$. Poiché z'' è non nullo, esiste m tale per cui $z'' = S(m)$. Quindi $z = x + S(m) = S(x) + m$. Se fosse $m = 0$, si avrebbe $S(x) + y' = y + z' = z = S(x)$, $\lightning$. Dunque $z > S(x)$.

$\boxed{\text{Confrontabilità}}$ Per induzione su x con la formula $P(x) = \forall y (x < y \vee x = y \vee x > y)$.

$\boxed{P(0)}$ Se $y \neq 0$, allora $0 < y$ dal momento che $y = 0 + y$.

$\boxed{P(S(x))}$ Per ipotesi induttiva, vale $y < x$, $y = x$ o $y > x$. Se vale $y < x$, allora, per transitività, $y < S(x)$. Se $y = x$, allora banalmente $y < S(x)$. Se invece $y > x$, esiste y' non nullo tale per cui $y = x + y'$. Poiché y' non è nullo, allora esiste t tale per cui $y' = S(t)$. Dunque $y = x + S(t) = S(x) + t$. Se $t = 0$, $y = S(x)$; altrimenti $y > S(x)$.

(ii.) Se $y > x$, allora esiste y' non nullo per cui $y = x + y''$. Allora:

$$y + z = (x + y'') + z = (x + z) + y'',$$

e quindi $y + z > x + z$.

(iii.) Se $y > x$, allora esiste y' non nullo per cui $y = x + y''$. Allora:

$$y \cdot z = (x + y'') \cdot z = x \cdot z + y'' \cdot z,$$

e quindi, poiché $y'' \cdot z$ (sia y'', che z sono non nulli, vd. *Problema 31*), $y \cdot z > x \cdot z$.

(iv.) Mostriamo le due implicazioni.

$\boxed{n \in m \longrightarrow n < m}$ Se $n \in m$, allora $m = n \sqcup \underbrace{\{n, \ldots\}}_{=A}$. Allora $m = n + |A|$, e $|A| \neq 0$ essendo A non vuoto. Dunque $n < m$.

$\boxed{n \in m \longleftarrow n < m}$ Usiamo il fatto che $\in$ è un ordine totale su ω. Se $n \in m$, si conclude. Non si può avere $n = m$ per antiriflessività. Se fosse $m \in n$, si avrebbe per l'implicazione inversa $m < n$, e quindi $m < m$, ancora contro l'antiriflessività.

Problema 33: $(\omega, \in)$ **è un insieme ben ordinato**

Si dimostri che $(\omega, \in)$ è un insieme ben ordinato.

Soluzione. La tesi deriva immediatamente dal fatto che ω è un insieme totalmente ordinato per il quale ogni elemento in $\omega \setminus \{0\}$ è un successore. Poiché su ω vale il principio di induzione (debole), allora ω è ben ordinato (vd. *Problema 35*).

Problema 34: Equivalenza tra l'induzione forte e il buon ordinamento

Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato avente minimo $0 := \min A$. Si mostri che sono equivalenti:

(i.) $(A, <)$ è ben ordinato.

(ii.) Se $P(\cdot)$ è una formula e vale $\forall x(x \in A \to ((\forall y((y \in A \land y < x) \to P(y))) \to P(x)))$, allora $\forall x(x \in A \to P(x))$ (induzione forte).

Soluzione. Mostriamo le due implicazioni.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ Assumiamo le ipotesi dell'induzione forte. Sia $B = \{a \in A \mid \neg P(a)\}$. Se B è vuoto, allora la tesi è dimostrata. Mostriamo che questa è l'unica possibilità.

Se per assurdo B non fosse vuoto, poiché A è ben ordinato, esiste $m := \min B$. Allora, essendo m il minimo a per cui non vale $P(a)$, per ogni $y < m$ vale $P(y)$; pertanto, per ipotesi dell'induzione forte, varrebbe $P(m)$, $\lightning$.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Sia X un sottinsieme di A che non ammette minimo. Consideriamo la formula $P(a) = a \notin X$, e mostriamo che $P(\cdot)$ vale in tutto A. Se infatti a è un elemento di A i cui minoranti stretti soddisfano $P(\cdot)$, allora necessariamente deve valere $P(a)$; se così non fosse, a sarebbe un minimo di X, $\lightning$. Dunque è soddisfatta l'ipotesi induttiva, e si conclude che vale $P(a)$ per ogni elemento $a \in A$. Quindi $A \setminus X = A$, da cui $X = \varnothing$.

Problema 35: Equivalenza tra l'induzione (debole) e il buon ordinamento su insiemi con tutti gli elementi eccetto il minimo successori

Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato avente minimo $0 := \min A$ tale per cui ogni elemento in $A \setminus \{0\}$ è successore. Si mostri che sono equivalenti:

(i.) $(A, <)$ è ben ordinato.

(ii.) Se $P(\cdot)$ è una formula, vale $P(0)$ e $\forall x(x \in A \to (P(x) \to P(x+1)))$, allora $\forall x(x \in A \to P(x))$ (induzione debole).

Soluzione. Mostriamo le due implicazioni, nello stesso spirito del *Problema 34*.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ Assumiamo le ipotesi dell'induzione (debole). Sia $B = \{a \in A \mid \neg P(a)\}$. Se B è vuoto, allora la tesi è dimostrata. Mostriamo che questa è l'unica possibilità.

Se per assurdo B non fosse vuoto, poiché A è ben ordinato, esiste $m := \min B$. Poiché vale $P(0)$, sicuramente $m \neq 0$. Allora, $m = m' + 1$ è un successore per ipotesi; tuttavia, essendo $m' < m$, vale $P(m')$, da cui, per ipotesi dell'induzione forte, varrebbe $P(m'+1)$, ossia $P(m)$, $\lightning$.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Sia X un sottinsieme di A che non ammette minimo. Consideriamo la formula $P(a) = \forall b(b \leq a \longrightarrow a \notin X)$, e mostriamo che $P(\cdot)$ vale in tutto A.

Essendo 0 il minimo di A, chiaramente vale $P(0)$ – altrimenti X ammetterebbe come minimo 0 stesso. Inoltre, se vale $P(x)$, $x+1$ è un elemento di A i cui minoranti stretti soddisfano $P(\cdot)$, e dunque necessariamente deve valere $P(x+1)$; se così non fosse, $x+1$ sarebbe un minimo di X, $\lightning$. Dunque è soddisfatta l'ipotesi induttiva, e si conclude che vale $P(a)$ per ogni elemento $a \in A$. Quindi $A \setminus X = A$, da cui $X = \varnothing$.

> **Problema 36: Caratterizzazione dei buon ordinamenti con i segmenti iniziali**
>
> Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato. Si dimostri che $(A, <)$ è ben ordinato se e solo se ogni suo segmento iniziale proprio è generato da un elemento $a \in A$.

Soluzione. Si supponga che $(A, <)$ è ben ordinato. Sia $X \subsetneq A$ un segmento iniziale proprio di A. Poiché X è proprio, $A \setminus X$ <u>non</u> è vuoto, quindi ne esiste il minimo, detto a. Mostriamo che $X = A_a$. Se $x \in A_a$, allora $x < a$, dunque $x \in X$; altrimenti x apparterrebbe a $X \setminus A$ e sarebbe contemporaneamente il suo minimo, $\lightning$. Viceversa, se $x \in X$, se fosse $a \leq x$, si avrebbe $a \in X$, essendo A un segmento iniziale, $\lightning$. Dunque $x < a$, ossia $x \in A_a$; si conclude allora che $X = A_a$.

Si supponga che ogni segmento iniziale proprio è generato da un elemento in A. Sia X un sottinsieme <u>non</u> vuoto di A. I minoranti stretti di X sono allora un segmento iniziale proprio di A, e dunque sono generati da un elemento $a \in A$. Mostriamo che $a = \min X$. Sia $x \in X$. Se fosse $x < a$, allora x apparterrebbe ad A_a, ovverosia sarebbe un minorante stretto di X, $\lightning$. Dunque $a \leq x$ per ogni $x \in X$. Se a non appartenesse ad X, allora sarebbe $a < x$ per ogni $x \in X$, e dunque si avrebbe $a \in A_a$, $\lightning$. Dunque x appartiene ad X e ne è minorante debole, ovverosia è il minimo di X.

> **Problema 37: Unicità dell'isomorfismo d'ordine tra insiemi ben ordinati**
>
> Siano $(A, <)$ e $(B, \prec)$ insiemi ben ordinati isomorfi tra loro. Si dimostri che esiste un solo isomorfismo tra i due.

Soluzione. Se φ e ψ sono due isomorfismi da A a B, allora $\varphi \circ \psi^{-1}$ è un automorfismo di A. Poiché l'unico automorfismo di A è l'identità, si ha allora $\varphi \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}_A$, ossia $\varphi = \psi$.

> **Problema 38: Gli insiemi totalmente ordinati finiti sono isomorfi a un $(n, \in)$**
>
> Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato e finito. Si dimostri che se $|A| \cong |n|$, allora $(A, <) \cong (n, \in)$, e che dunque ammette massimo e minimo.

Soluzione. Mostriamo la tesi per induzione su n.

$\boxed{n = 0}$ Se A è vuoto, la tesi è banale.

$\boxed{n+1}$ Sia $|A| \cong |n+1|$. Allora esiste un elemento $a \in A$ tale per cui $|A \setminus \{a\}| = |n|$. Allora, per ipotesi induttiva, dacché $A \setminus \{a\}$ è ancora totalmente ordinato e finito, $(A \setminus \{a\}, <) \cong (n, \in)$. Pertanto $A \setminus \{a\}$ ammette un massimo $a' := \max A \setminus \{a\}$. È immediato verificare che $a^* = \max\{a, a'\}$ è un massimo di A, e dunque si può estendere un isomorfismo tra $A \setminus \{a^*\}$ e n mandando a^* in $n \in n+1$, completando il passo induttivo.

> **Problema 39: La restrizione di un isomorfismo d'ordine ai segmenti generati è ancora un isomorfismo**
>
> Sia $\varphi : (A, <) \to (B, \prec)$ un isomorfismo tra due insiemi ben ordinati. Si dimostri che $\varphi|_{A_a} : (A_a, <|_{A_a}) \to \left(B_{\varphi(a)}, \prec|_{B_{\varphi(a)}}\right)$ è ancora un isomorfismo.

Soluzione. È sufficiente verificare che $\varphi|_{A_a}$ ha come immagine $B_{\varphi(a)}$ (essendo restrizione è necessariamente ancora iniettiva, e preserva l'ordine). Sia $b' < \varphi(a)$. Essendo φ un isomorfismo, esiste $a' \in A$ tale per cui $\varphi(a') = b'$. Se fosse $a' \geq a$, si avrebbe $b' \geq \varphi(a)$, dacché φ preserva l'ordine, $\lightning$. DUnque $a' \in A_a$, da cui la tesi.

> **Problema 40: Caratterizzazione degli insiemi totalmente ordinati isomorfi a $(\omega, \in)$**
>
> Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato e infinito. Si mostri che sono equivalenti:
>
> (i.) $(A, <) \cong (\omega, \in)$.
>
> (ii.) Ogni segmento iniziale proprio di A è finito.
>
> (iii.) Ogni sottinsieme infinito di A non ammette massimo.

Soluzione. Dimostriamo le implicazioni (i.) $\longrightarrow$ (ii.) $\longrightarrow$ (iii.) $\longrightarrow$ (i.), da cui deriva la tesi.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ È sufficiente verificare la tesi su $(\omega, \in)$, per il quale ogni segmento iniziale proprio è finito per definizione, dacché un tale segmento è necessariamente un elemento di ω.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(iii.)}}$ Mostriamo la contronominale. Se esistesse un sottoinsieme infinito di A con massimo M, allora il segmento iniziale $A_M \supseteq A$ sarebbe infinito. Non può essere $A_M = A$, dal momento che si avrebbe $M < M$, $\lightning$. Dunque A_M è un segmento iniziale proprio infinito.

$\boxed{\text{(iii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Sia $X \neq \varnothing$ un sottinsieme di A. Sia x un elemento di X. I minoranti deboli di x appartenenti a X ammettono massimo (x stesso), dunque formano un sottinsieme finito. Allora tali minoranti ammettono minimo (vd. *Problema 38*), e tale minimo è un minimo di X. Dunque A è ben ordinato. Essendo infinito, A non può essere isomorfo a un segmento iniziale di ω; né ω può essere isomorfo a un segmento iniziale di A, dato che altrimenti esisterebbe un sottinsieme infinito con massimo in A. Pertanto, per la tricotomia dei buoni ordini, l'unica possibilità rimasta è $(A, <) \cong (\omega, \in)$.

Problema 41: Il tipo d'ordine di $A + \{*\}$ è il più piccolo di quelli che maggiorano il tipo d'ordine di A

Si mostri che per ogni insieme ben ordinato $(B, \prec)$ con $\mathrm{ot}(A) < \mathrm{ot}(B)$ si ha $\mathrm{ot}(A + \{*\}) \leq \mathrm{ot}(B)$.

Soluzione. Poiché $\mathrm{ot}(A) < \mathrm{ot}(B)$, allora $A \cong B_b$ per un qualche $b \in B$ e con qualche isomorfismo φ. Allora $A + \{*\}$ è isomorfo a B_{b+1}, dove A viene mappato su $B_b \subsetneq B_{b+1}$ secondo φ e $*$ viene mandato in b. Da ciò si deriva immediatamente la tesi.

Problema 42: Una catena di insiemi totalmente ordinati induce un insieme totalmente ordinato limite

Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una catena di insiemi totalmente ordinati compatibili tra loro, su I totalmente ordinato. Si mostri che $\bigcup_{i \in I} A_i$ con l'ordinamento indotto dagli A_i è totalmente ordinato.

Soluzione. Si mostrano separatamente le varie proprietà.

$\boxed{\text{Riflessività}}$ Se $i \in I$ è tale per cui $a \in A_i$, allora $a \leq_i a$, e quindi $a \leq a$.

$\boxed{\text{Simmetria}}$ Se a e b sono elementi di $\bigcup_{i \in I} A_i$, detti i e j gli indici in I per cui $a \in A_i$ e $b \in A_j$, detto $k = \max\{i, j\}$, a e b sono entrambi elementi di A_k. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora, dalla compatibilità e dalla totalità di $\leq_k$, $a \leq_i b$ e $b \leq_i a$, dunque $a = b$ per la riflessività di $\leq_i$.

$\boxed{\text{Transitività}}$ Analogamente a prima, se a, b e c sono elementi di $\bigcup_{i \in I} A_i$ si può trovare un indice $k \in I$ per cui a, b, $c \in A_k$. Dunque, se $a \leq b$ e $b \leq c$, per compatibilità e totalità di $\leq_k$, $a \leq_k b$ e $b \leq_k c$, dunque $a \leq_k c$ per transitività di $\leq_k$, e infine $a \leq c$.

$\boxed{\text{Totalità}}$ Come prima, si può trovare un indice k per cui a, $b \in A_k$. Per la totalità di $\leq_k$, allora a e b sono confrontabili, e quindi lo sono anche su $\leq$.

Problema 43: Proprietà distributiva a destra dell'isomorfismo tra buoni ordini

Siano A, B e C tre insiemi ben ordinati. Si mostri che:

$$A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C).$$

Soluzione. L'isomorfismo naturale tra i due buoni ordini in esame è dato da $\varphi : A \times (B + C) \to (A \times B) + (A \times C)$ tale per cui $\varphi(a, (x, i)) = ((a, x), i)$, con $a \in A$, $x \in B \cup C$ e $i \in \{0, 1\}$. φ è chiaramente bigettiva, e preserva l'ordinamento.

Problema 44: $\mathrm{Fun}(\omega, \omega)$ **con l'ordine della minima differenza** <u>**non**</u> **è ben ordinato**

Si mostri che $\mathrm{Fun}(\omega, \omega)$ con l'ordine della minima differenza <u>non</u> è un insieme ben ordinato.

Soluzione. Per ogni $i \in \omega$, sia $d_i : \omega \to \omega$ tale per cui $d_i(j) = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è il delta di Dirac. Allora $d_0 > d_1 > d_2 > \cdots$ è una catena discendente infinita in $\mathrm{Fun}(\omega, \omega)$, che quindi <u>non</u> è ben ordinato.

Problema 45: Unione e intersezione di ordinali sono ordinali, e corrispondono all'estremo superiore e al minimo

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme di ordinali. Si mostri che $\bigcup A$ corrisponde all'estremo superiore $\sup A$ e che $\bigcap A$ corrisponde al minimo $\min A$.

Soluzione. Mostriamo i due risultati separatamente.

1. Sicuramente, $\forall \alpha \in A$, $\bigcap A \subseteq \alpha$, e quindi $\bigcap A$ è un minorante debole di A. Se A ha due elementi distinti, allora $\bigcap A$ necessariamente deve essere sottinsieme stretto di un elemento $\alpha \in A$, e quindi $\bigcap A \in \alpha$; pertanto, per transitività $\bigcap A \in A$, e dunque $\bigcap A$ è proprio il minimo cercato. Se A ha un solo elemento, la tesi è banale poiché $\bigcap A$ coincide con tale elemento.

2. $\bigcup A$ è ben ordinato su $\in$, essendo un insieme di ordinali, grazie al punto (i.) (gli ordinali sono insiemi di ordinali). Inoltre $\bigcup A$ è transitivo, dacché $x \in \bigcup A$ vuol dire che esiste un $\alpha \in A$ tale per cui $x \in \alpha$, e dunque, se $y \in x$, allora $y \in x \in \alpha$, da cui $y \in \alpha$ per la transitività di α, e quindi $y \in \bigcup A$. Mostriamo ora che è l'estremo superiore di A. Chiaramente $\bigcup A$ è un maggiorante debole; inoltre se $\alpha \subseteq B$ per ogni $\alpha \in B$, allora $\bigcup \alpha \subseteq B$, completando la dimostrazione.

Problema 46: ω_1 **è il più piccolo ordinale avente cardinalità maggiore di quella di** ω

Si mostri che $\omega_1 = \{\alpha \text{ ordinale} \mid |\alpha| \leq |\omega|\}$ è il più piccolo ordinale avente cardinalità maggiore di quella di ω.

Soluzione. Per rimpiazzamento, abbiamo visto che ω_1 è effettivamente un insieme. Inoltre, ω_1 è un insieme transitivo di ordinali: se $\alpha \in \beta \in \omega_1$, allora $\alpha \subseteq \beta \in \omega_1$, e dunque $|\alpha| \leq |\beta| \leq |\omega|$, da cui $\alpha \in \omega_1$. Pertanto ω_1 stesso è un ordinale.

Sia ora γ un ordinale con $|\omega| < |\gamma|$, e mostriamo che $\omega_1 \leq \gamma$. Se fosse $\gamma < \omega_1$, allora si avrebbe, per definizione di ω_1, $|\gamma| \leq |\omega|$, $\lightning$. Dunque, per tricotomia degli ordinali, l'unico caso possibile è $\omega_1 \leq \gamma$.

Problema 47: Sugli ordinali $0+\alpha=\alpha$

Sia α un ordinale. Si mostri che $0+\alpha=\alpha$.

Soluzione. Mostriamo la tesi per induzione transfinita sulla seguente formula:

$$\Psi(\alpha) = \forall x(x \in (0+\alpha) \longleftrightarrow x \in \alpha).$$

$\boxed{\Psi(0)}$ Banale, dal momento che entrambi gli insiemi in considerazione sono quelli vuoti.

$\boxed{\Psi(\alpha+1)}$ $0+(\alpha+1)$ è per definizione $(0+\alpha)+1$. Per ipotesi induttiva allora $(0+\alpha)+1=\alpha+1$.

$\boxed{\Psi(\lambda) \text{ limite}}$ $0+\lambda$ è definizione $\bigcup_{\alpha<\lambda}(0+\alpha)$. Per ipotesi induttiva, tali $0+\alpha$ sono uguali ad α, e quindi $0+\lambda$ coincide con $\bigcup_{\alpha<\lambda}\alpha = \bigcup\lambda = \lambda$.

Problema 48: La somma tra ordinali è associativa

Siano α, β e γ ordinali. Allora:

$$\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma.$$

Soluzione. La tesi è immediatamente implicata dal fatto che per gli ordinali $\alpha \cong \beta \longrightarrow \alpha = \beta$ e che la somma tra ordinali corrisponde alla somma tra insiemi ben ordinati, per i quali vale:

$$A+(B+C) \cong (A+B)+C.$$

Problema 49: Il prodotto tra ordinali è isomorfo al prodotto tra ordinali intesi come buoni ordini

Siano α e β ordinali. Allora:

$$\alpha \cdot \beta \cong \alpha \times \beta.$$

Soluzione. Mostriamo la tesi per induzione transfinita su β.

$\boxed{\beta=0}$ $\alpha \cdot 0$ per definizione è 0, che è isomorfo banalmente a $\alpha \times 0$.

$\boxed{\beta+1}$ $\alpha\cdot(\beta+1)$ è per definizione $\alpha\cdot\beta+\alpha$, che corrisponde all'usuale somma tra buoni ordini. Per ipotesi induttiva $\alpha\cdot\beta\cong\alpha\times\beta$. Se φ è una bigezione tra i due insiemi, allora una bigezione tra $\alpha\cdot(\beta+1)$ e $\alpha\times(\beta+1)$ si ottiene mappa il fattore $\alpha\cdot\beta$ in $\alpha\times\beta$ secondo φ, e mandando α in $\alpha\times 1$.

$\boxed{\beta=\lambda \text{ limite}}$ Per definizione $\alpha\cdot\lambda=\sup_{\gamma<\lambda}\alpha\cdot\gamma$. Poiché ogni $\alpha\cdot\gamma$ è isomorfo ad $\alpha\times\gamma$ per ipotesi induttiva, anche gli estremi superiori devono essere isomorfi: nel caso degli $\alpha\times\gamma$ questo è proprio $\alpha\times\lambda$, da cui la tesi.

> **Problema 50: Proprietà fondamentali dell'esponenziale di ordinali**
>
> Siano α, β e γ ordinali con $\alpha\neq 0$. Si mostri che:
>
> (i.) $\alpha^\beta\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$.
>
> (ii.) $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Soluzione. Sappiamo, anche per il *Problema 49*, che le operazioni tra ordinali corrispondono a quelle tra buoni ordini. Allora le tesi si verificano immediatamente usando le bigezioni naturali tra $A^B\times A^C$ e $A^{B\sqcup C}$, e tra $(A^B)^C$ e $A^{B\times C}$ (vd. *Problema 62* per la scrittura esplicita di tali bigezioni).

> **Problema 51: Alcune disuguaglianze sugli ordinali**
>
> Siano α e $\beta\neq 0$ ordinali. Allora si mostri che:
>
> (i.) $\alpha+\beta>\alpha$.
>
> (ii.) $\alpha+\beta\geq\beta$.
>
> (iii.) $\alpha+\beta+1>\beta$.
>
> (iv.) $\alpha\cdot\beta>\alpha$, se anche $\alpha\neq 0$.

Soluzione. Mostriamo i vari risultati separatamente.

(i.) Poiché $\beta>0$, α è un segmento iniziale proprio di $\alpha+\beta$ e quindi necessariamente $\alpha+\beta>\alpha$, dacché la somma tra ordinali corrisponde alla somma tra buoni ordini. Alternativamente, si può dimostrare la tesi per induzione transfinita, come fatto per il punto (ii.).

(ii.) Si mostra la tesi per induzione transfinita su β.

$\boxed{\beta=0}$ $\alpha+\beta=\alpha+0=\alpha$, banalmente.

$\boxed{\beta+1}$ $\alpha+(\beta+1)$ è per definizione $(\alpha+\beta)+1$. Impiegando l'ipotesi induttiva si ottiene allora $\alpha+\beta\geq\beta$, e dunque $(\alpha+\beta)+1\geq\beta+1$.

$\boxed{\beta = \lambda \text{ limite}}$ Per definizione: $\alpha + \lambda = \sup_{\gamma<\lambda} \alpha + \gamma$. Allora, per ipotesi induttiva, $\sup_{\gamma<\lambda} \alpha + \gamma \geq \sup_{\gamma<\lambda} \gamma = \lambda$, da cui la tesi.

(iii.) Deriva immediatamente dal punto (ii.): $\alpha + \beta + 1 > \alpha + \beta \geq \beta$.

(iv.) Si mostra per induzione transfinita in modo del tutto simile a come fatto per il punto (ii.), sfruttando l'identità $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ e sapendo che $\alpha \cdot \lambda = \sup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma$ per λ limite.

Problema 52: Disuguaglianze strette sugli ordinali con ordinale fisso a sinistro

Siano α e $\gamma < \gamma'$ ordinali. Allora si mostri che:

(i.) $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma'$.

(ii.) $\alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \gamma'$, se anche $\alpha \neq 0$.

Soluzione. Poiché $\gamma < \gamma'$, per il teorema della differenza a destra, esiste $\rho > 0$ tale per cui $\gamma + \rho = \gamma'$. Mostriamo ora i due risultati separatamente.

(i.) $\alpha + \gamma' = (\alpha + \gamma) + \rho > \alpha + \gamma$, dove si è usato la tesi del *Problema 51*.

(ii.) $\alpha \cdot \gamma' = \alpha \cdot (\gamma + \rho) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \rho$. Poiché ρ e α sono diversi da zero, $\alpha \cdot \rho > \alpha > 0$ per il *Problema 51*. Allora si conclude ancora utilizzando la tesi del *Problema 51*, analogamente al punto (i.).

Problema 53: Distributività a destra degli ordinali

Siano α, β e γ ordinali. Si mostri allora che:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Soluzione. La tesi è immediatamente implicata dal fatto che per gli ordinali $\alpha \cong \beta \longrightarrow \alpha = \beta$ e che il prodotto e la somma tra ordinali corrispondono al prodotto (vd. *Problema 49*) e alla somma tra insiemi ben ordinati, per i quali vale:

$$A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C),$$

per il *Problema 43*.

Problema 54: Forme normali di Cantor di $(\omega + 3) \cdot n$, $(\omega + 3)^2$, $(\omega + 3)^n$ e $(\omega + 3)^{\omega+3}$

Dato $n \in \omega$, si calcolino le forme normali di Cantor di:

(i.) $(\omega + 3) \cdot n$, (ii.) $(\omega + 3)^2$, (iii.) $(\omega + 3)^n$, (iv.) $(\omega + 3)^{\omega+3}$.

Soluzione. Mostriamo le varie richieste separatamente.

(i.) $(\omega+3)\cdot 0 = 0$, banalmente. Altrimenti n è un successore, e allora:

$$\begin{aligned}
(\omega+3)\cdot n &= \underbrace{(\omega+3)+\ldots+(\omega+3)}_{n \text{ volte}} \\
&= \omega + \underbrace{(3+\omega)+\ldots+(3+\omega)}_{n-1 \text{ volte}} + 3 \\
&= \omega + \underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{n-1 \text{ volte}} + 3 \\
&= \omega\cdot n + 3.
\end{aligned}$$

(ii.) Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
(\omega+3)^2 &= (\omega+3)(\omega+3) \\
&= (\omega+3)\omega + (\omega+3)3 \\
&= (\omega+3)\omega + \omega\cdot 3 + 3.
\end{aligned}$$

Inoltre vale che:

$$\omega^2 \le (\omega+3)\omega \le (\omega+\omega)\omega = (\omega\cdot 2)\cdot\omega = \omega\cdot(2\cdot\omega) = \omega^2,$$

da cui $(\omega+3)\omega = \omega^2$, dove si è usato che $2\cdot\omega = \omega$. Dunque $(\omega+3)^2 = \omega^2+\omega\cdot 3+3$.

(iii.) Mostriamo per induzione che:

$$(\omega+3)^n = \omega^n + \omega^{n-1}\cdot 3 + \omega^{n-2}\cdot 3 + \ldots + \omega\cdot 3 + 3,$$

per ogni $n \ge 2$. Per $n = 2$, la tesi è già stata dimostrata. Assumiamo ora la tesi per n e dimostriamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}
(\omega+3)^{n+1} &= (\omega+3)^{1+n} \\
&= (\omega+3)(\omega+3)^n \\
&= (\omega+3)(\omega^n + \omega^{n-1}\cdot 3 + \omega^{n-2}\cdot 3 + \ldots + \omega\cdot 3 + 3) \\
&= \omega^{n+1} + \omega^n\cdot 3 + \omega^{n-1}\cdot 3 + \ldots + \omega^2\cdot 3 + (\omega+3)3 \\
&= \omega^{n+1} + \omega^n\cdot 3 + \omega^{n-1}\cdot 3 + \ldots + \omega^2\cdot 3 + \omega\cdot 3 + 3,
\end{aligned}$$

dove si è usato che $(\omega+3)\omega^i = \omega^{i+1}$, analogamente a come fatto per il punto precedente.

(iv.) Calcoliamo innanzitutto $(\omega+3)^\omega$. Osserviamo che:

$$\omega^\omega \leq (\omega+3)^\omega \leq (\omega+\omega)^\omega \leq (\omega\cdot\omega)^\omega = (\omega^2)^\omega = \omega^{2\cdot\omega} = \omega^\omega,$$

da cui si deduce che $(\omega+3)^\omega = \omega^\omega$. Dunque:

$$\begin{aligned}
(\omega+3)^{\omega+3} &= (\omega+3)^\omega(\omega+3)^3 \\
&= \omega^\omega(\omega+3)^3 \\
&= \omega^\omega(\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 3+3) \\
&= \omega^{\omega+3}+\omega^{\omega+2}\cdot 3+\omega^{\omega+3}\cdot 3+\omega^\omega\cdot 3,
\end{aligned}$$

dove si è usato il punto precedente per calcolare $(\omega+3)^3$.

> **Problema 55: Equivalenza tra la ricorsione transfinita per casi e la ricorsione transfinita con una sola dichiarazione**
>
> Si mostri che sono equivalenti la ricorsione transfinita per casi e quella che impiega invece una sola funzione classe.

Soluzione. La ricorsione transfinita che impiega una sola funzione classe si deriva facilmente da quella per casi, dal momento che non esistono ordinali che siano sia limiti che successori; quindi se G_1 è la funzione classe che agisce sui successori, e G_2 è quella che agisce sui limiti, è ben definita la funzione classe G che sui successori agisce come G_1 e che sui limiti agisce come G_2, e tale G restituisce la stessa funzione della ricorsione transfinita per casi.

Analogamente la ricorsione transfinita per casi deriva da quella con una sola funzione classe: è sufficiente definire G_1 come la restrizione sui successori e G_2 come la restrizione sui limiti.

> **Problema 56: Assorbimento a sinistra per ordinali finiti di ω**
>
> Si mostri che $n+\omega = \omega$ per ogni $n \in \omega$.

Soluzione. Mostriamo la tesi per induzione su n. Innanzitutto $0+\omega = \omega$, per il *Problema 56*. Per $n = 1$, $1+\omega = \omega$; infatti un isomorfismo tra $\{*\}+\omega$ e ω è dato mappando $*$ a 0 e n a $S(n) = n+1$. Assumiamo ora la tesi per $n \geq 1$ e mostriamola per $n+1$:

$$(n+1)+\omega = n+(1+\omega) = n+\omega = \omega,$$

dove si è usata l'associatività della somma (vd. *Problema 48*).

Problema 57: Caratterizzazione degli ordinali che rispettano sulla somma la proprietà di assorbimento a sinistra per ordinali più piccoli

Sia $\alpha \neq 0$ un ordinale. Si mostri che sono equivalenti:

(i.) $\beta + \alpha = \alpha$ se $\beta < \alpha$ (α rispetta sulla somma la proprietà di assorbimento a sinistra per ordinali più piccoli).

(ii.) $\beta + \gamma < \alpha$ se β, $\gamma < \alpha$ (α è additivamente chiuso).

(iii.) $\exists \delta$ ordinale per cui $\alpha = \omega^\delta$.

Soluzione. Mostriamo la serie di implicazioni (i.) $\longrightarrow$ (ii.) $\longrightarrow$ (iii.) $\longrightarrow$ (i.) per ottenere tutte le equivalenze.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ Poiché $\gamma < \alpha$, allora $\beta + \gamma < \beta + \alpha$. Inoltre $\beta < \alpha$, dunque per assorbimento $\beta + \alpha = \alpha$, da cui $\beta + \gamma < \alpha$.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(iii.)}}$ Mostriamo la contronominale, ovverosia che se α non è un ω^δ, allora α non è additivamente chiuso. Esiste comunque un δ ordinale per cui $\omega^\delta < \alpha < \omega^{\delta+1}$. Dal momento che $\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega$, esiste $n \in \omega \setminus \{0\}$ tale per cui $\omega^\delta \cdot n < \alpha \leq \omega^\delta \cdot (n+1)$. Ma allora $\omega^\delta + \omega^\delta \cdot n = \omega^\delta \cdot (n+1) \geq \alpha$, mentre ω^δ, $\omega^\delta \cdot n < \alpha$, dunque α non è additivamente chiuso.

$\boxed{\text{(iii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Mostriamo la validità della tesi nel caso in cui δ è nullo, è successore o è limite non nullo.

$\boxed{\delta = 0}$ Se $\delta = 0$, allora $\alpha = 1$, per il quale ovviamente $0 + 1 = 1$ (vd. *Esercizio 47*).

$\boxed{\delta + 1}$ Se $\delta = \delta' + 1$ è un successore, allora, dato $\beta < \alpha = \omega^{\delta'} \cdot \omega$, si deve avere $\beta < \omega^{\delta'} \cdot n$ per qualche $n \in \omega$. Pertanto:

$$\omega^{\delta'+1} \leq \beta + \alpha \leq \omega^{\delta'}(n + \omega) = \omega^{\delta'+1},$$

da cui $\beta + \alpha = \omega^\delta$.

$\boxed{\delta = \lambda \text{ limite}}$ Se invece $\delta = \lambda$ è un limite, $\beta < \omega^\lambda$ implica che esiste $\gamma < \lambda$ per cui $\beta < \omega^\gamma$. Per il teorema della differenza a destra, esiste inoltre $\varepsilon < \lambda$ per cui $\gamma + \varepsilon = \lambda$. Pertanto si deduce che:

$$\omega^\lambda \leq \beta + \omega^\lambda \leq \omega^\gamma + \omega^\lambda = \omega^\gamma(1 + \omega^\varepsilon) = \omega^\lambda,$$

dove si è usato che $1 + \omega^\varepsilon = \omega^\varepsilon$, dal momento che ω^ε è infinito.

Problema 58: Caratterizzazione degli ordinali che rispettano <u>sul prodotto</u> la proprietà di assorbimento a sinistra per ordinali più piccoli

Sia $\alpha \neq 0$ un ordinale. Si mostri che sono equivalenti:

(i.) $\beta \cdot \alpha = \alpha$ se $0 < \beta < \alpha$ (α rispetta <u>sul prodotto</u> la proprietà di assorbimento a sinistra per ordinali più piccoli).

(ii.) $\beta \cdot \gamma < \alpha$ se β, $\gamma < \alpha$ (α è moltiplicativamente chiuso).

(iii.) $\exists \delta$ ordinale per cui $\alpha = \omega^{(\omega^\delta)}$.

Soluzione. Mostriamo la serie di implicazioni (i.) $\longrightarrow$ (ii.) $\longrightarrow$ (iii.) $\longrightarrow$ (i.) per ottenere tutte le equivalenze.

$\boxed{\text{(i.)} \longrightarrow \text{(ii.)}}$ Se $\beta = 0$, la tesi è banale. Sia ora invece $\beta > 0$. Poiché $\gamma < \alpha$ e $\beta \neq 0$, allora $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha$. Inoltre $\beta < \alpha$, dunque per assorbimento $\beta \cdot \alpha = \alpha$, da cui $\beta \cdot \gamma < \alpha$.

$\boxed{\text{(ii.)} \longrightarrow \text{(iii.)}}$ Mostriamo la contronominale, ovverosia che se α non è un $\omega^{(\omega^\delta)}$, allora α non è moltiplicativamente chiuso. Esiste comunque un δ ordinale per cui $\omega^{(\omega^\delta)} < \alpha < \omega^{(\omega^{\delta+1})}$. Dal momento che $\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega$, allora $\omega^{(\omega^{\delta+1})} = \omega^{(\omega^\delta \omega)} = \left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^\omega$. Esiste dunque $n \in \omega \setminus \{0\}$ tale per cui $\left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^n < \alpha \leq \left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^{n+1}$. Ma allora $\left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^n \omega^{(\omega^\delta)} = \left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^{n+1} \geq \alpha$, mentre $\omega^{(\omega^\delta)}$, $\left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^n < \alpha$, dunque α non è moltiplicativamente chiuso.

$\boxed{\text{(iii.)} \longrightarrow \text{(i.)}}$ Se $\beta = 0$, la tesi è banale. Supponiamo ora $\beta > 0$. Mostriamo la validità della tesi nel caso in cui δ è nullo, è successore o è limite non nullo.

$\boxed{\delta = 0}$ Se $\delta = 0$, la tesi è banale dato che non ha minoranti stretti non nulli.

$\boxed{\delta + 1}$ Se $\delta = \delta' + 1$ è un successore, allora, dato $\beta < \alpha = \left(\omega^{(\omega^{\delta'})}\right)^\omega$, si deve avere $\beta < \left(\omega^{(\omega^{\delta'})}\right)^n$ per qualche $n \in \omega$. Pertanto:

$$\alpha = \left(\omega^{(\omega^{\delta'})}\right)^\omega \leq \beta \cdot \alpha \leq \left(\omega^{(\omega^{\delta'})}\right)^n \cdot \left(\omega^{(\omega^{\delta'})}\right)^\omega = \left(\omega^{(\omega^{\delta'})}\right)^{n+\omega} = \alpha,$$

da cui $\beta + \alpha = \omega^\delta$ (si è usato che $n + \omega = \omega$, vd. *Esercizio 56*).

$\boxed{\delta = \lambda \text{ limite}}$ Se invece $\delta = \lambda$ è un limite, dacché $\omega^{(\omega^\lambda)} = \sup_{\gamma < \lambda} \omega^{(\omega^\gamma)}$, $\beta < \omega^{(\omega^\lambda)}$ implica che esiste $\gamma < \lambda$ per cui $\beta < \omega^{(\omega^\gamma)}$. Per il teorema della differenza a destra, esiste inoltre $\varepsilon < \lambda$ per cui $\gamma + \varepsilon = \lambda$. Pertanto si deduce che:

$$\omega^{(\omega^\lambda)} \leq \beta \cdot \omega^{(\omega^\lambda)} \leq \omega^{(\omega^\gamma)} \cdot \left(\omega^{(\omega^\gamma)}\right)^{\omega^\varepsilon} = \left(\omega^{(\omega^\gamma)}\right)^{1+\omega^\varepsilon} = \omega^{(\omega^\lambda)},$$

dove si è usato che $1 + \omega^\varepsilon = \omega^\varepsilon$, dal momento che ω^ε è infinito.

Problema 59: Moltiplicare a destra per ω trasforma l'ordinale nella più piccola potenza di ω che lo maggiora

Sia α un ordinale per cui $\omega^\delta \leq \alpha < \omega^{\delta+1}$. Allora $\alpha \cdot \omega = \omega^{\delta+1}$.

Soluzione. Sia $\alpha = \omega^\delta \cdot n + \rho$, dove n e $\rho < \omega^\delta$ sono rispettivamente il quoziente e il resto di α diviso ω^δ. n è necessariamente un naturale, altrimenti α maggiorerebbe debolmente $\omega^{\delta+1}$. Allora:

$$\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \omega \leq \alpha \cdot \omega = (\omega^\delta \cdot n + \rho)\omega \leq (\omega^\delta \cdot (n+1))\omega = \omega^\delta \omega = \omega^{\delta+1},$$

dove si è usato che $(n+1)\cdot\omega = \omega$ (vd. *Esercizio 58*).

Problema 60: $\alpha \cdot \omega = \beta \cdot \omega$ se e solo se α e β sono contenuti tra due stesse potenze successive di ω

Siano α, β ordinali. Se $\alpha \cdot \omega = \beta \cdot \omega$, allora esiste δ ordinale per cui $\omega^\delta \leq \alpha, \beta < \omega^{\delta+1}$.

Soluzione. La tesi deriva immediatamente dal *Problema 59*, dal momento che $\alpha \cdot \omega$ è la più piccola potenza di ω che maggiora α, e che lo stesso succede con $\beta \cdot \omega$.

Problema 61: Condizioni sull'assorbimento della somma

Siano α, $\beta \neq 0$ distinti. Allora vale una e una sola delle seguenti affermazioni:

(i.) $\alpha + \beta = \beta$.

(ii.) $\beta + \alpha = \alpha$.

(iii.) $\exists \delta$ con $\omega^\delta \leq \alpha, \beta < \omega^{\delta+1}$.

Soluzione. Mostriamo innanzitutto che al più una affermazione è vera. Se $\alpha + \beta = \beta$, sicuramente non può essere $\beta + \alpha = \alpha$, e viceversa, altrimenti:

$$\beta + \beta = \beta + \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Per il teorema della differenza a destra, allora si avrebbe $\alpha = \beta$, $\lightning$. Supponiamo ora senza perdita di generalità che valga $\alpha + \beta = \beta$. Non può esistere δ tale per cui $\omega^\delta \leq \alpha, \beta < \omega^{\delta+1}$: se così fosse si avrebbe:

$$\alpha + \beta$$

Supponiamo ora esista δ tale per cui $\omega^\delta \leq \alpha, \beta < \omega^{\delta+1}$, e mostriamo che né (i.), né (ii.) sono possibili. Poiché α, β sono compresi tra le stesse potenze successive di ω, esistono m, $n \in \omega \setminus \{0\}$ e ρ, $\rho' < \omega^\delta$

tali per cui:

$$\alpha = \omega^\delta \cdot m + \rho, \quad \beta = \omega^\delta \cdot n + \rho'.$$

Allora:

$$\alpha + \beta = \omega^\delta \cdot m + \rho + \omega^\delta \cdot n + \rho' = \omega^\delta \cdot (m+n) + \rho',$$

dove si è usato l'assorbimento di ω^δ e che $n > 0$. Allora $\alpha + \beta$ non può coincidere con β, infatti si avrebbe:

$$\omega^\delta \cdot n + \omega^\delta \cdot m + \rho' = \omega^\delta \cdot n + \rho',$$

e quindi per il teorema della differenza a destra i avrebbe $\omega^\delta \cdot m + \rho' = \rho'$, che è assurdo, $\lightning$. Analogamente $\beta + \alpha$ non può coincidere con α.

Mostriamo che una delle tre affermazioni è sempre vera. Se $\exists \delta$ con $\omega^\delta \leq \alpha$, $\beta < \omega^{\delta+1}$, la tesi è vera. Altrimenti, esiste δ tale per cui $\alpha < \omega^\delta \leq \beta$ o $\beta < \omega^\delta \leq \alpha$. Nel primo caso, allora β assorbe α; nel secondo α assorbe β. Per vederlo è sufficiente scrivere il maggiore dei due come $\omega^\delta \cdot n + \rho$, come prima, e calcolare la somma direttamente, impiegando l'assorbimento di ω^δ nei confronti del minore.

Problema 62: Proprietà fondamentali dell'algebra cardinale

Siano κ, μ, $\ni$ cardinali. Allora:

(i.) $(\kappa + \mu) + \nu = \kappa + (\mu + \nu)$.

(ii.) $(\kappa \cdot \mu) \cdot \nu = \kappa \cdot (\mu \cdot \nu)$.

(iii.) $\kappa + \mu = \mu + \kappa$.

(iv.) $\kappa \cdot \mu = \mu \cdot \kappa$.

(v.) $\kappa \cdot (\mu + \nu) = \kappa \cdot \mu + \kappa \cdot \nu$.

(vi.) $\kappa^\mu \cdot \kappa^\nu = \kappa^{\mu+\nu}$.

(vii.) $(\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu \cdot \nu}$.

Soluzione. Mostriamo i vari risultati separatamente su generici insiemi A, B, C, da cui la tesi deriva immediatamente.

(i.) $|(A \sqcup B) \sqcup C| = |A \sqcup (B \sqcup C)|$, dove una bigezione è data dalle seguenti relazioni:

$$((a,0),0) \mapsto (a,0),$$

$$((b,1),0) \mapsto ((b,0),1),$$

$$(c,1) \mapsto ((c,1),1).$$

(ii.) $|(A \times B) \times c| = |A \times (B \times C)|$, dove una bigezione è data da $((a,b),c) \mapsto (a,(b,c))$.

(iii.) $|A \sqcup B| = |B \sqcup A|$, dove una bigezione è data da $(x,i) \mapsto (x, 1-i)$.

(iv.) $|A \times B| = |B \times A|$, dove una bigezione è data da $(a,b) \mapsto (b,a)$.

(v.) $|A \times (B \sqcup C)| = |(A \times B) \sqcup (A \times C)|$, dove una bigezione è data da $(a,(x,i)) \mapsto ((a,x),i)$.

(vi.) $\left|A^C \times B^C\right| = \left|(A \times B)^C\right|$, dove una bigezione è data da $(f,g) \mapsto [c \mapsto (f(c), g(c))]$.

(vii.) $\left|(A^B)^C\right| = \left|A^{B \times C}\right|$, dove una bigezione è data da $f \mapsto [(b,c) \mapsto (f(c)(b))]$ (*currying*).

Problema 63: $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$ per ogni ordinale α

Sia α un ordinale. Si mostri che $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$.

Soluzione. Dimostriamo la tesi per induzione transfinita su α.

$\boxed{\alpha = 0}$ Per definizione $\aleph_0 = \beth_0 = \omega$, dunque la tesi è vera.

$\boxed{\alpha + 1}$ Per definizione $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$, e dunque $\aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha) \leq \mathbb{H}(\beth_\alpha)$. Poiché $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} > \beth_\alpha$, essendo il numero di Hartogs di $\beth_\alpha$ il più piccolo cardinale maggiore di $\beth_\alpha$, si ottiene infine:

$$\aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha) \leq \mathbb{H}(\beth_\alpha) \leq \beth_{\alpha+1}.$$

$\boxed{\alpha = \lambda \text{ limite}}$ Per definizione $\aleph_\lambda = \sup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta$ e $\beth_\lambda = \sup_{\beta<\lambda} \beth_\beta$. La tesi segue allora immediatamente dall'ipotesi induttiva.

Problema 64: Proprietà fondamentali della somma infinita di cardinali

Sia I un insieme. Si mostri allora che:

(i.) $\sum_{i \in I} 1 = |I|$.

(ii.) $\sum_{i \in I} \kappa = \kappa \cdot |I|$.

(iii.) $\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{i \in I} \kappa_{\sigma(i)}$ per ogni permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$.

(iv.) Se $\kappa_i \leq \mu_i$ per ogni $i \in I$, allora $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \mu_i$.

Soluzione. Mostriamo le varie richieste separatamente.

(i.) e (ii.) Deriva facilmente dal fatto che $\bigsqcup_{i \in I} A$ è definito proprio come $\bigcup_{i \in I} A \times \{i\}$, che risulta essere proprio $A \times I$; il punto (i.) si ottiene ponendo $A = 1$.

(iii.) Come prima, deriva facilmente dal fatto che $\left|\bigsqcup_{i\in I} A_i\right| = \left|\bigsqcup_{i\in I} A_{\sigma(i)}\right|$, dove la bigezione è data da $(a_i, i) \mapsto (a_i, \sigma(i))$.

(iv.) Ancora, deriva dal fatto che $\left|\bigsqcup_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigsqcup_{i\in I} B_i\right|$ se $|A_i| \leq |B_i|$ per ogni $i \in I$; se $\varphi_i : A_i \to B_i$ è una funzione iniettiva per ogni $i \in I$, allora la tesi è data da $\varphi : \bigsqcup_{i\in I} A_i \to \bigsqcup_{i\in I} B_i$ tale per cui $\varphi(a_i, i) = (\varphi_i(a_i), i)$, che è iniettiva.

Problema 65: Proprietà fondamentali del prodotto infinito di cardinali

Sia I un insieme. Si mostri allora che:

(i.) $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} \kappa_{\sigma(i)}$ per ogni permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$.

(ii.) $\prod_{i\in I} \kappa^{\mu_i} = \kappa^{\sum_{i\in I} \mu_i}$, e quindi $\prod_{i\in I} \kappa = \kappa^{|I|}$.

(iii.) $\left(\prod_{i\in I} \kappa_i\right)^{\mu} = \prod_{i\in I} \kappa_i^{\mu}$.

(iv.) Se $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$, allora $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} \prod_{i\in I_j} \kappa_i$ (associatività generalizzata).

Soluzione. Mostriamo le varie richieste separatamente.

(i.) Deriva facilmente dal fatto che $\left|\prod_{i\in I} A_i\right| = \left|\prod_{i\in I} A_{\sigma(i)}\right|$, dove la bigezione è data da $f \mapsto [i \to f(\sigma(i))]$.

(ii.) Come prima, deriva facilmente dal fatto che $\left|\prod_{i\in I} A^{B_i}\right| = \left|A^{\bigsqcup_{i\in I} B_i}\right|$, dove stavolta la bigezione è data da $f \mapsto [(b, i) \mapsto f(i)(b)]$.

(iii.) Ancora, deriva dal fatto che $\left|\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^B\right| = \left|\prod_{i\in I} A_i^B\right|$, dove la bigezione è data da $f \mapsto [i \mapsto [b \to f(b)(i)]]$.

(iv.) Per l'ultima volta, deriva dal fatto che $\left|\prod_{i\in I} A_i\right| = \left|\prod_{j\in J} \prod_{i\in I_j} A_i\right|$, dove la bigezione è data da $f \mapsto [j \mapsto [i \to f(i)]]$.

Problema 66: Le cofinalità sono cardinali regolari: $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(A)) = \mathrm{cof}(A)$

Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato. Si mostri allora che:

$$\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(A)) = \mathrm{cof}(A).$$

Soluzione. Se fosse $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(A)) < \mathrm{cof}(A)$, esisterebbe un sottinsieme cofinale in $\mathrm{cof}(A)$ di cardinalità strettamente minore di quella di $\mathrm{cof}(A)$. Questo sottinsieme sarebbe cofinale anche in A, essendo $\mathrm{cof}(A)$ cofinale in A. Allora A ammetterebbe un sottinsieme cofinale di cardinalità strettamente minore di $\mathrm{cof}(A)$, $\lightning$. Dunque $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(A)) \geq \mathrm{cof}(A)$, da cui la tesi, osservando che vale $\mathrm{cof}(A) \leq |A|$ per ogni insieme A.

Problema 67: $\mathrm{cof}(\alpha+\beta)=\mathrm{cof}(\beta)$

Siano α e β ordinali. Allora $\mathrm{cof}(\alpha+\beta)=\mathrm{cof}(\beta)$.

Soluzione. Sia $f:\mathrm{cof}(\beta)\to\beta$ una funzione cofinale. Allora $f*:\mathrm{cof}(\beta)\to\alpha+\beta$ definita da $f*(\gamma)=\alpha+f(\gamma)$ è una funzione cofinale, e dunque $\mathrm{cof}(\alpha+\beta)\geq\mathrm{cof}(\beta)$.

Se invece $g:\mathrm{cof}(\alpha+\beta)\to\alpha+\beta$ è una funzione cofinale, allora $g*:\mathrm{cof}(\alpha+\beta)\to\beta$ definita da $g*(\gamma)=g(\gamma)-\alpha$ è una funzione cofinale, dove $g(\gamma)-\alpha$ è il β tale per cui $g(\gamma)=\alpha+\beta$ (che esiste, per il teorema della differenza a destra). Quindi $\mathrm{cof}(\beta)\geq\mathrm{cof}(\alpha+\beta)$, da cui la tesi.

Problema 68: Ogni cardinalità regolare è la cofinalità di un ordinale arbitrariamente grande

Sia μ un cardinale regolare. Si mostri allora che per ogni cardinale κ esiste $\nu\geq\kappa$ (come ordinali) tale per cui $\mathrm{cof}(\nu)=\mu$.

Soluzione. La tesi è una diretta conseguenza del *Problema 67*. Infatti $\mathrm{cof}(\kappa+\mu)=\mathrm{cof}(\mu)=\mu$, dacché μ è regolare.

Problema 69: Per λ ordinale limite, $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)=\mathrm{cof}(\beth_\lambda)=\mathrm{cof}(\lambda)$

Sia λ un ordinale limite, si mostri allora che $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)=\mathrm{cof}(\beth_\lambda)=\mathrm{cof}(\lambda)$.

Soluzione. Mostriamo solo che $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)=\mathrm{cof}(\lambda)$, il caso di $\beth_\lambda$ è analogo.

Sia $f:\mathrm{cof}(\lambda)\to\lambda$ una funzione cofinale. Allora $g:\mathrm{cof}(\lambda)\to\aleph_\lambda$ definita da $g(\alpha)=\aleph_{f(\alpha)}$ è una funzione cofinale, dunque $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)\leq\mathrm{cof}(\lambda)$.

Sia ora $h:\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)\to\aleph_\lambda$ una funzione cofinale. Allora $g:\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)\to\lambda$ definita da $g(\alpha)=\min\{\beta\mid h(\beta)<\aleph_\alpha\}$ è una funzione cofinale, dunque $\mathrm{cof}(\lambda)\leq\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)$.

Dunque $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda)=\mathrm{cof}(\lambda)$.

Problema 70: V_α è chiuso per sottinsiemi, unioni e chiusure transitive

Sia V_α il livello α-esimo della gerarchia di von Neumann. Si mostri che:

(i.) Se $x\subseteq y\in V_\alpha$, allora $x\in V_\alpha$.

(ii.) Se $A\in V_\alpha$, allora $\bigcup A\in V_\alpha$.

(iii.) Se $A\in V_\alpha$, allora $\mathrm{TC}(A)\in V_\alpha$, dove $\mathrm{TC}(A)$ è la chiusura transitiva di A.

Soluzione. Mostriamo i vari risultati separatamente.

(i.) Distinguiamo i vari casi.

$\boxed{\alpha = 0}$ La tesi è banale per $\alpha = 0$, dal momento che non ammette elementi.

$\boxed{\alpha + 1}$ Sia $x \subseteq y \in V_{\alpha+1}$. Allora $x \subseteq y \subseteq V_\alpha$, da cui $x \subseteq V_\alpha$, e quindi $x \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$.

$\boxed{\alpha = \lambda \text{ limite}}$ Sia $x \subseteq y \in V_\lambda$. Allora esiste $\mu < \lambda$ successore per cui $x \subseteq y \in V_\mu$; da prima allora $x \in V_\mu \subseteq V_\lambda$.

(ii.) Distringuiamo ancora i vari casi.

$\boxed{\alpha = 0}$ La tesi è ancora banale.

$\boxed{\alpha + 1}$ Sia $A \in V_{\alpha+1}$. Allora $A \subseteq V_\alpha$. Per transitività $\bigcup A \subseteq V_\alpha$, e dunque $\bigcup A \in V_{\alpha+1}$.

$\boxed{\alpha = \lambda \text{ limite}}$ Sia $A \in V_\lambda$. Allora esiste $\mu < \lambda$ successore per cui $A \in V_\mu$; da prima allora $\bigcup A \in V_\mu \subseteq V_\lambda$.

(iii.) Distringuiamo per un'ultima volta i vari casi.

$\boxed{\alpha = 0}$ La tesi come sempre è banale.

$\boxed{\alpha + 1}$ Sia $A \in V_{\alpha+1}$. Allora $A \subseteq V_\alpha$. Dal momento che V_α è transitivo, si ha che $\mathrm{TC}(A) \subseteq V_\alpha$, e quindi $\mathrm{TC}(A) \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.

$\boxed{\alpha = \lambda \text{ limite}}$ Sia $A \in V_\lambda$. Allora esiste $\mu < \lambda$ successore per cui $A \in V_\mu$; da prima allora $\mathrm{TC}(A) \in V_\mu \subseteq V_\lambda$.

> **Problema 71: $V_* = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ORD}} V_\alpha$ è una classe propria**
>
> Sia $V_* := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ORD}} V_\alpha$. Si mostri che V_* è una classe propria.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che per ogni ordinale α, $\alpha \subseteq V_\alpha$, e quindi $\alpha \in V_{\alpha+1}$, Sia dunque $F : \mathrm{ORD} \to V_*$ la funzione-classe che associa un ordinale α a sé stesso in $V_{\alpha+1} \subseteq V_*$. F è iniettiva, e dunque se V_* fosse un insieme, lo sarebbe anche ORD, $\lightning$. Dunque V_* è una classe propria.

> **Problema 72: Caratterizzazione della validità degli assiomi di coppia, delle parti, dell'infinito e della scelta per i livelli della gerarchia di von Neumann**
>
> Sia α un ordinale. Si mostri che:
>
> (i.) Vale l'assioma della coppia in V_α se e solo se α è limite.
>
> (ii.) Vale l'assioma delle parti in V_α se e solo se α è limite.
>
> (iii.) Vale l'assioma dell'infinito in V_α se e solo se $\alpha > \omega$.
>
> (iv.) Vale l'assioma della scelta in V_α se e solo se α è limite.

Soluzione. Mostriamo i vari risultati separatamente.

(i.) Supponiamo che $\alpha = \lambda$ sia limite. Allora, dati a, $b \in V_\lambda$, esiste sicuramente $\mu < \lambda$ per cui a, $b \in V_\mu$ (basta prendere il massimo tra i due ordinali η, ξ per cui $a \in V_\eta$, $b \in V_\xi$). Per l'assioma della coppia, esiste $\{a, b\} \subseteq V_\mu$. Allora $\{a, b\} \in \mathcal{P}(V_\mu) = V_{\mu+1} \subseteq V_\lambda$.

Viceversa supponiamo ora che valga in V_α l'assioma della coppia. Se per assurdo α fosse un successore $\delta + 1$, allora, dacché 0, $\delta \in V_{\delta+1} = V_\alpha$, si avrebbe $\{0, \delta\} \in V_\alpha = \mathcal{P}(V_\delta)$, e quindi $\delta \in \{0, \delta\} \subseteq V_\delta$, che è assurdo dal momento che un ordinale non può appartenere al livello della gerarchia di von Neumann che indicizza, $\lightning$. Dunque α è limite.

(ii.) Supponiamo che $\alpha = \lambda$ sia limite. Allora dato $a \in V_\lambda$, esiste sicuramente $\mu < \lambda$ per cui $a \in V_\mu$. Poiché V_μ è transitivo, $a \subseteq V_\mu$, dunque $\mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(V_\mu) = V_{\mu+1}$, e dunque $\mathcal{P}(a) \in V_{\mu+2}$. Poiché λ è limite, $V_{\mu+2} \subseteq V_\lambda$, e dunque è verificato l'assioma delle parti.

Viceversa supponiamo ora che valga in V_α l'assioma delle parti. Se per assurdo α fosse un successore $\delta + 1$, allora, dacché $\delta \in V_{\delta+1} = V_\alpha$, si avrebbe $\mathcal{P}(\delta) \in V_\alpha$, e quindi $\delta \in \mathcal{P}(\delta) \subseteq V_\delta$, che è assurdo dal momento che un ordinale non può appartenere al livello della gerarchia di von Neumann che indicizza, $\lightning$. Dunque α è limite.

(iii.) Poiché $V_n = n$ per ogni n naturale, $V_\omega = \bigcup_{n \in \omega} V_n$ è esattamente ω. Dunque per $\alpha \leq \omega$ non può essere vero l'assioma dell'infinito in V_α: per $\alpha = \omega$, perché altrimenti si avrebbe $\omega \in V_\omega$, assurdo dal momento che un ordinale non può appartenere al livello della gerarchia di von Neumann che indicizza, $\lightning$; per $\alpha < \omega$, V_α è finito, e dunque non può ammettere per transitività un elemento infinito. Per $\alpha > \omega$, invece $\omega = V_\omega \subseteq V_\alpha$.

(iv.) Supponiamo che $\alpha = \lambda$ sia limite. Sia $X \in V_\lambda \setminus \{\varnothing\}$. In ZFC esiste dunque per scelta una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$, appartenente a $\mathcal{P}((\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}) \times X)$, che è un elemento di V_λ dal momento che soddisfa l'assioma delle parti (vd. (ii.)), di unione e di separazione (essendo transitivo), e dunque V_λ soddisfa l'assioma di scelta.

Viceversa supponiamo che V_α soddisfi scelta. Allora esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ per ogni $X \in V_\alpha \setminus \{\varnothing\}$. Pertanto il dominio di f, $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, deve appartenere a V_α, e quindi $\mathcal{P}(X) \in V_\alpha$. Dunque V_α soddisfa l'assioma delle parti, da cui necessariamente α è limite.