

Teoria del corso di  
*Geometria e topologia differenziale*  
(senza dimostrazioni)

A cura di Gabriel Antonio Videtta<sup>1</sup>  
g.videtta1@studenti.unipi.it

Testo basato sul contenuto del corso del prof. Lisca  
tenutosi presso l'Università di Pisa.

A.A. 2025-2026

<sup>1</sup>Basato su un layout di [Luca Lombardo](#) e di [Francesco Sorce](#).

# Indice

<b>Notazioni impiegate</b>	<b>2</b>	<b>2 Teoria delle superfici</b>	<b>11</b>
Algebra lineare . . . . .	2	2.1 Definizioni preliminari . . . . .	11
Analisi matematica . . . . .	2	2.1.1 Parametrazioni regolare . . . . .	11
Geometria differenziale delle curve e delle superfici	2	2.1.2 Superficie . . . . .	11
Teoria della misura . . . . .	3	2.2 Classi fondamentali di superfici . . . . .	11
Teoria delle varietà . . . . .	3	2.2.1 Superfici di rotazione . . . . .	11
Topologia . . . . .	4	2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello . . . . .	11
<b>Prerequisiti matematici</b>	<b>5</b>	2.3 Piano tangente e orientabilità . . . . .	12
Algebra lineare . . . . .	5	2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse . . . . .	12
Analisi matematica . . . . .	5	2.3.2 Versori normali e orientabilità . . . . .	12
Teoria della misura . . . . .	5	<b>3 Curve su superfici</b>	<b>13</b>
<b>1 Teoria delle curve</b>	<b>6</b>	3.1 Piano tangente e derivata direzionale . . . . .	13
1.1 Definizioni preliminari . . . . .	6	3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare . . . . .	13
1.1.1 Curve, tracce e velocità . . . . .	6	3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve . . . . .	13
1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica . . . . .	6	3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale . . . . .	13
1.2 (Ri)parametrazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a. . . . .	6	3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale . . . . .	13
1.2.1 Riparametrazione e prime proprietà	6	3.2.1 Operatore forma e prime proprietà . . . . .	13
1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco . . . . .	6	3.2.2 I e II forma fondamentale . . . . .	13
1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.) . . . . .	7	3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale . . . . .	14
1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva . . . . .	7	3.2.4 Direzioni e curvatures principali, formula di Eulero . . . . .	15
1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale . . . . .	7	3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti . . . . .	15
1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet . . . . .	7	3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium . . . . .	15
1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametrazioni p.l.a. di una stessa curva . . . . .	8	3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche . . . . .	15
1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale) . . . . .	8	3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze . . . . .	16
1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.	8	3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali . . . . .	16
1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale . . . . .	8	3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante	16
1.5 Proprietà di curvatura e torsione . . . . .	9	3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo . . . . .	16
1.5.1 Torsione e piano osculatore . . . . .	9	3.5 Geodetiche . . . . .	17
1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore . . . . .	9	3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo . . . . .	17
1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve . . . . .	10	3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale . . . . .	17
		3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze . . . . .	17
		3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione . . . . .	17
		3.5.5 Curvatura geodetica . . . . .	18
		3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet . . . . .	18
		3.6.1 Prime definizioni . . . . .	18
		3.6.2 Regione di una superficie e area . . . . .	18
		3.6.3 Integrazione rispetto a una regione . . . . .	18
		3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario . . . . .	19
		3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione . . . . .	19

3.6.6	Teorema di Radó e caratteristica di Eulero-Poincaré . . . . .	19	4.7.3	Passaggio per omotopia e buona definizione del grado intero di una mappa . . . . .	29
3.6.7	Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse . . . . .	19	4.7.4	Grado di $z^k$ , delle riflessioni e della mappa antipodale su $S^1$ . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Varietà e teoria del grado</b>	<b>21</b>	4.7.5	Campi vettoriali tangenti su $S^n$ e pettinabilità . . . . .	30
4.1	Varietà differenziabili e prime definizioni . . .	21	4.8	Indici di campi vettoriali su aperti di $\mathbb{R}^m$ . .	30
4.1.1	Mappe $C^\infty$ e diffeomorfismi . . . . .	21	4.8.1	Zero isolato e indice di un campo in uno zero . . . . .	30
4.1.2	Varietà differenziabili, varietà chiuse, carte, atlanti, parametrizzazioni locali e funzioni di transizione . . . . .	21	4.8.2	Lemma di Hopf e teorema fondamentale dell'algebra . . . . .	30
4.1.3	Prodotto di varietà . . . . .	21	4.9	Campi vettoriali su varietà . . . . .	30
4.2	Spazio tangente e differenziale su mappe tra varietà . . . . .	22	4.9.1	Indice di un campo vettoriale tangente su una varietà . . . . .	30
4.2.1	Differenziale su aperti di $\mathbb{R}^n$ . . . . .	22	4.9.2	Simplessi e caratteristica di Eulero . .	31
4.2.2	Spazio tangente in un punto di una varietà . . . . .	22	4.9.3	Teorema di Poincaré-Hopf . . . . .	31
4.2.3	Differenziale per mappe lisce tra varietà	22			
4.3	Valori regolari e critici . . . . .	23			
4.3.1	Prime definizioni . . . . .	23			
4.3.2	Teorema di invertibilità locale per varietà e lemma della pila di dischi . .	23			
4.3.3	Misura nulla e teoremi di Sard e Brown	23			
4.3.4	Varietà a partire da valori regolari . .	23			
4.4	Varietà con bordo . . . . .	24			
4.4.1	Semispazio superiore e varietà con bordo . . . . .	24			
4.4.2	Proprietà del bordo di una varietà con bordo . . . . .	24			
4.4.3	Differenziale e spazio tangente su varietà con bordo . . . . .	24			
4.4.4	Varietà con bordo da valori regolari .	25			
4.4.5	Classificazione delle 1-varietà, lemma di non retrazione sul bordo e teorema del punto fisso di Brouwer . . . . .	25			
4.5	Teoria del grado modulo 2 . . . . .	25			
4.5.1	Omotopie $C^\infty$ . . . . .	25			
4.5.2	Isotopie e lemma di omogeneità . . . .	25			
4.5.3	Grado modulo 2 e buona definizione .	26			
4.6	Varietà orientate . . . . .	26			
4.6.1	Orientazione di basi su spazi vettoriali, orientazione canonica di $\mathbb{R}^n$ . . . .	26			
4.6.2	Orientazione su prodotti di spazi vettoriali . . . . .	26			
4.6.3	Orientazione su varietà e prime proprietà . . . . .	26			
4.6.4	Orientabilità di $m$ -varietà immerse in $\mathbb{R}^m$ . . . . .	27			
4.6.5	Orientazione nel prodotto di due varietà orientate . . . . .	27			
4.6.6	Semispazio interno o esterno . . . . .	27			
4.6.7	Orientazione sul bordo della varietà .	28			
4.7	Teoria del grado su $\mathbb{Z}$ . . . . .	28			
4.7.1	Grado intero rispetto a un valore regolare . . . . .	28			
4.7.2	Grado di una mappa estendibile dal bordo . . . . .	29			

# Notazioni impiegate

Cercheremo di impiegare caratteri latini ( $x, y, z$ ) per indicare quantità reali; caratteri latini sottolineati ( $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ ) per indicare vettori o campi vettoriali; caratteri greci minuscoli ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) per indicare curve; e caratteri greci maiuscoli ( $\Sigma$ ) per indicare superfici.

## Algebra lineare

- $\text{rk}$  – rango di un'applicazione lineare o di una matrice.
- $M(n)$  – matrici  $n \times n$  a elementi reali.
- $S(n)$  – matrici simmetriche  $n \times n$  a elementi reali.

## Analisi matematica

- $\text{mult}(p, z)$  – molteplicità algebrica della radice  $z$  nel polinomio  $p$ .
- $\text{deg}(p(x))$  – grado del polinomio  $p$ .
- $\{f \text{ op } a\}$  – data una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  a valori reali,  $\{f \text{ op } a\}$  denota l'insieme  $\{x \in X \mid f(x) \text{ op } a\}$ , dove  $a \in \mathbb{R}$ .
- $f \times g$  – date due funzioni  $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow D$ , la funzione  $f \times g : (A \times B) \rightarrow (C \times D)$  è definita in modo tale che  $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$ .
- $f|_A$  – restrizione di una funzione  $f$  al sottinsieme  $A$  del dominio.
- $f_i$  – nel caso di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la proiezione di  $f$  sulla  $i$ -esima coordinata, ovvero  $\pi_i \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $\frac{df}{dt}(x), f'(x), \dot{f}$  – derivata di una funzione  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nel caso  $n > 1$ , coincide con il vettore  $(f_i'(t))_i$ . La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- $\partial_{x_i} f(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}), f_{x_i}(\underline{x})$  – derivata parziale nella  $i$ -esima coordinata di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nel punto  $\underline{x}$ . La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- $\underline{x}_i$  – derivate parziali nella  $i$ -esima coordinata di un campo  $\underline{x}$  da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ , ovvero  $((x_1)_i, \dots, (x_m)_i)^\top$ .

- $\nabla f(\underline{x}), \nabla f_{\underline{x}}$  – gradiente di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ovvero il vettore  $(\partial_{x_i} f(\underline{x}))_i^\top$ .
- $Jf(\underline{x}), Jf_{\underline{x}}$  – jacobiano di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nel punto  $\underline{x}$ , ovvero la matrice  $(\partial_{x_j} f_i(\underline{x}))_{i,j} = (\nabla f_i(\underline{x}))_i$ .
- $J_{\underline{y}} f(\underline{p})$  – nel caso di una funzione  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la sottomatrice  $n \times n$  quadrata di  $Jf(\underline{p})$  date dalle ultime  $n$  colonne. Coincide con  $J(\pi_{\mathbb{R}^n} \circ f)(\underline{p})$ .
- $C^n$  – classe delle funzioni dotate di derivate parziali continue fino all'ordine  $n$ . Per  $n = 0$ , coincide con la classe delle funzioni continue ( $C^0$ ).
- $C^\infty$ , liscio – classe delle funzioni derivabili parzialmente per un numero arbitrario di volte con continuità.
- diffeomorfismo di classe  $C^k$  – funzione di classe  $C^k$  con inversa di classe  $C^k$ .

## Geometria differenziale delle curve e delle superfici

- $B_R(P, \mathbb{R}^n), B_R(P)$  – la palla  $n$ -dimensionale di raggio  $R$  e centro  $P$ . Ometteremo  $\mathbb{R}^n$  quando la dimensione si deduce dal contesto.
- $S_a^i(P)$  – l'ipersfera  $i$ -dimensionale di raggio  $a$  e centro  $P$ , ovvero  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{i+1} \mid \|\underline{x} - P\| = a\}$ .
- $\mathbb{T}_{a,b}$  – toro di raggio maggiore  $a$  e raggio minore  $b$ .
- $\ell(\alpha)$  – lunghezza di una curva  $\alpha$ .
- p.l.a. – parametrizzata a lunghezza d'arco, ovvero con velocità unitaria.
- $\kappa_\alpha$  – curvatura di una curva  $\alpha$  in un punto.
- $\tau_\alpha$  – torsione di una curva  $\alpha$  in un punto.
- $T_\alpha$  – versore tangente di una curva regolare in un punto.
- $N_\alpha$  – versore normale di una curva di Frenet in un punto.
- $B_\alpha$  – versore binormale di una curva di Frenet in un punto.

- $\Pi_\alpha$  – piano osculatore di  $\alpha$  in un punto.
- $R_\alpha$  – raggio di curvatura di  $\alpha$  in un punto.
- $T_P\Sigma$  – piano tangente di  $P$  rispetto a  $\Sigma$ .
- $\underline{n}, n_{\underline{x}}$  – (versore) normale (eventualmente locale) di una superficie o di una parametrizzazione regolare.
- $D_\xi f(P)$  – derivata direzionale con direzione  $\xi$  della funzione  $f$  nel punto  $P$  di una superficie.
- $S_P$  – operatore forma nel punto  $P$  di una superficie.
- $I_P$  – I forma fondamentale nel punto  $P$  di una superficie.
- $\Pi_P$  – II forma fondamentale nel punto  $P$  di una superficie.
- $E, F, G$  – elementi della rappresentazione matriciale della I forma fondamentale:  $I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ .
- $\ell, m, n$  – elementi della rappresentazione matriciale della II forma fondamentale:  $\Pi_P = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$ .
- $a, b, c, d$  – elementi della rappresentazione matriciale dell'operatore forma:  $S_P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .
- $\kappa_n$  – curvatura normale di una superficie in un punto  $P$  secondo un dato vettore unitario.
- $\kappa_{\alpha,n}$  – curvatura normale di  $\alpha$  rispetto a una superficie.
- $\kappa_1, \kappa_2$  – curvatures principali di una superficie in un punto.
- $\kappa$  – curvatura gaussiana di una superficie in un punto.
- $H$  – curvatura media di una superficie in un punto.
- $\Gamma_{ij}^k$  – simbolo di Christoffel, ovverosia coefficiente di  $\underline{x}_k$  in  $\underline{x}_{ij}$ .
- $\nabla_v X(P)$  – derivata covariante di un campo vettoriale  $X$  tangente alla superficie  $\Sigma$  in direzione  $v$  nel punto  $P$ .
- $(\cdot)^\top$  – proiezione di  $\cdot$  sul piano tangente  $T_P\Sigma$ .
- $\gamma_v$  – geodetica locale di direzione  $v$ .
- $U_P$  – intorno di definizione della mappa esponenziale in un punto  $P$ .
- $\exp_P$  – mappa esponenziale in un punto  $P$ .
- $v_k$  – data una base ortonormale  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ , la mappa  $t \mapsto k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2)$ .
- $N_P$  – intorno normale di un punto  $P$ .
- $\varphi(\gamma(t))$  – angolo tra la curva  $\gamma$  e il parallelo di  $\gamma(t)$  al tempo  $t$ .
- $r(\gamma(t))$  – distanza di  $\gamma(t)$  dall'asse di rotazione.
- $k_{\alpha,g}$  – curvatura geodetica di una curva  $\alpha$  rispetto a una superficie  $\Sigma$ .
- $A(R)$  – area di una regione  $R$  di una superficie  $\Sigma$ .
- $\int_R \varphi dA$  – integrazione rispetto all'area in una regione  $R$ , equivalente a  $\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv$ .
- $\varepsilon_i$  – angolo esterno  $i$ -esimo di una regione o superficie con bordo.
- $\iota_i$  – angolo interno  $i$ -esimo di una regione o superficie con bordo.
- $\partial\Sigma$  – bordo di una superficie con bordo, come unione delle tracce delle regioni con cui è definita per differenza.
- $\chi(\Sigma)$  – caratteristica di Eulero-Poincaré di una superficie con bordo.

## Teoria della misura

- vol – applicazione per calcolare il volume di un rettangolo in  $\mathbb{R}^n$ ; tale per cui  $\text{vol}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_i (b_i - a_i)$ .
- $m$  – misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ .

## Teoria delle varietà

- $\dim M$  – dimensione di una varietà  $M$ .
- $(f, W \cap M)$  – carta locale di una varietà  $M$ ; si sottintende che  $W$  sia un aperto dello spazio ambiente in cui è contenuto  $M$  e che  $f$  sia un diffeomorfismo con dominio  $W \cap M$  verso un aperto di  $\mathbb{R}^{\dim M}$ .
- $T_x M$  – spazio tangente di un punto  $x$  di una varietà  $M$ .
- $df_x$  – differenziale di una mappa liscia  $f : M \rightarrow N$  tra varietà nel punto  $x$ .
- $\text{crit}(f)$  – insieme dei punti critici di una mappa liscia  $f : M \rightarrow N$  tra varietà.
- $S^n$  – sfera  $n$ -dimensionale reale, ovverosia  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\underline{x}\| = 1\}$ .
- $D^n$  – disco  $n$ -dimensionale reale, ovverosia  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$ .
- $H^n$  – semispazio  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$ .
- $\partial H^n$  – bordo del semispazio  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$ , ovverosia  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ .
- $\partial M$  – bordo di una varietà bordata  $M$ .
- $\text{deg}_2 f$  – grado modulo 2 di una mappa liscia  $f : M \rightarrow N$ , con  $M$  compatta e  $N$  connessa.

- $\text{sgn}$  – segno di un'orientazione rispetto a una “standard”; per una mappa lineare, funzione che restituisce  $+1$  in caso di orientazione preservata e  $-1$  altrimenti.
- $\text{deg}(f; y)$  – grado intero di  $f$  in  $y$ , dove  $f : M \rightarrow N$  è una mappa liscia con  $M$  chiusa e orientata, e  $N$  connessa e orientata.
- $\text{deg } f$  – grado intero di una mappa liscia  $f : M \rightarrow N$ , con  $M$  chiusa e orientata, e  $N$  connessa e orientata.
- $\text{ind}(v, z)$  – indice del campo vettoriale  $v$  in  $z$ .
- $\Delta^{(m)}$  –  $m$ -simpleso.
- $s_i(C)$  – numero di  $i$ -simplessi nel complesso simpliciale  $C$ .
- $\chi(M)$  – caratteristica di Eulero-Poincaré di una varietà compatta  $M$ .

## Topologia

- $\text{II-numerabile}$  – spazio topologico che ammette una base numerabile.
- $\text{T1}$  – spazio topologico i cui singoletti sono insiemi chiusi.
- $\text{T2}$  – spazio topologico per cui due punti distinti ammettono l'esistenza di una coppia di intorni disgiunti.
- $\overline{X}$  – chiusura di un insieme.
- $\text{int}(X)$  – parte interna di un insieme.
- $\partial X$  – frontiera di un insieme, ovvero  $\overline{X} \setminus \text{int}(X)$ .

# Prerequisiti matematici

## Algebra lineare

- **Caratterizzazione del rango di una matrice** – Sia  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice. Allora  $\text{rk}(M) = k$  se e solo se i minori di taglia superiore a  $k$  in  $M$  hanno tutti determinante nullo ed esiste un minore di taglia  $k$  con determinante non nullo.

## Analisi matematica

- **Teorema di Schwarz** – Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che ammette derivate seconde miste continue in  $\underline{x}$ . Allora  $\partial_{x_i x_j} f(\underline{x}) = \partial_{x_j x_i} f(\underline{x})$  per ogni variabile  $x_i, x_j$ .
- **Teorema della funzione implicita** – Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$ . Sia  $\underline{p} = (x_0, y_0)$  un punto in  $U$  con  $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{a}$  e  $J_y f(\underline{p})$  invertibile.

Allora esiste un intorno  $A = I_{\underline{x}} \times I_{\underline{y}}$  di  $\underline{p}$  in  $U$  all'interno del quale esiste un'unica funzione  $g : I_{\underline{x}} \rightarrow I_{\underline{y}}$  di classe  $C^k$  per cui:

$$\underline{y} = g(\underline{x}) \iff f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{a}, \quad (\text{in } A).$$

Inoltre per tale  $g$  vale:

$$Jg(\underline{x}_0) = -J_y f(\underline{p})^{-1} J_x f(\underline{p}).$$

- **Teorema di invertibilità locale** (o della funzione inversa) – Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$ . Sia  $\underline{x}_0$  un punto in  $U$  con  $Jf(\underline{x}_0)$  invertibile.

Allora esiste un intorno  $A$  di  $\underline{x}_0$  in  $U$  dentro al quale  $f|_A$  ha un'inversa  $g$ , anch'essa di classe  $C^k$ , per la quale  $Jg(f(\underline{x})) = Jf(\underline{x})^{-1}$ .

- **Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali** – Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto e siano date due funzioni continue:

$$A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{e} \quad \underline{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Fissato  $(t_0, \underline{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ , esiste un'unica soluzione  $\underline{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t), \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale** – Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e sia  $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Si supponga inoltre che  $\underline{f}$  sia *localmente lipschitziana* rispetto alla seconda variabile.

Allora, per ogni  $(t_0, \underline{y}_0) \in \Omega$ , esistono  $\delta > 0$  e un'unica funzione  $\underline{y} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  che risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali** – Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e sia  $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$ . Indichiamo con  $\Phi(t, t_0, \underline{y}_0)$  la soluzione massimale del problema di Cauchy con dato iniziale  $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ .

Allora l'insieme di definizione del flusso:

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, t_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \begin{array}{l} \text{la soluzione } \underline{y}(t, t_0, \underline{y}_0) \\ \text{esiste al tempo } t \end{array} \right\}$$

è un aperto di  $\mathbb{R} \times \Omega$  e l'applicazione  $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^k$ .

- **Teorema di Sard sugli aperti di  $\mathbb{R}^n$**  – Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa liscia. Allora l'insieme  $\text{crit}(f)$  dei valori critici di  $f$  ha misura nulla.
- **Teorema di approssimazione di Weierstrass** – Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un compatto, e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una mappa continua. Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una funzione polinomiale  $P : K \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui  $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ .

## Teoria della misura

- **Caratterizzazione dell'annullamento della misura di Lebesgue** – Sia  $A$  un sottinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $A$  ha misura nulla se e solo se, per ogni scelta di  $\varepsilon > 0$ , esiste una famiglia numerabile  $\{B_i\}_{i \geq 0}$  di rettangoli  $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$  tali per cui:

$$A \subseteq \bigcup_{i \geq 0} B_i, \quad \sum_{i \geq 0} \text{vol}(B_i) < \varepsilon.$$

- **Lemma per la nullità della misura su un'unione numerabile di insiemi di misura nulla** – Se  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  è una famiglia di sottinsiemi di misura nulla di  $\mathbb{R}^n$ , allora anche  $\bigcup_{k \geq 0} A_k$  ha misura nulla.

# Parte 1

## Teoria delle curve

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe  $C^\infty$ .

Se  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  e  $f$  è una funzione relativa a una curva  $\alpha$ , ammettiamo l'abuso di notazione  $f(\underline{x})$ , intendendo  $f(\alpha^{-1}(\underline{x}))$ ; per esempio useremo  $\kappa(P)$  per intendere  $\kappa(\alpha^{-1}(P))$ .

### 1.1 Definizioni preliminari

#### 1.1.1 Curve, tracce e velocità

**Definizione 1.1** (Curva parametrizzata).

Una **curva parametrizzata** (o semplicemente *curva*) è una mappa  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^\infty$ , dove  $I$  è un intervallo.

**Definizione 1.2** (Traccia di una curva).

Si dice **traccia** (o *supporto*) di una curva parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la sua immagine  $\alpha(I)$ .

**Definizione 1.3** (Velocità di una curva).

Si definisce la **velocità** di una curva parametrizzata  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  come la curva indotta dalla derivata di  $\alpha$ :

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

#### 1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica

**Definizione 1.4** (Lunghezza di una curva).

Si definisce la **lunghezza**  $\ell(\alpha)$  di una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  come:

$$\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

*Osservazione 1.5.*

La definizione data per la lunghezza di una curva corrisponde alla nostra idea intuitiva di lunghezza tramite i seguenti due risultati:

1. **Validità sul segmento:** Su un segmento lineare  $\alpha(t) = A + t(B - A)$  con  $I = [0, 1]$ ,  $\ell(\alpha) = \|B - A\|$ .
2. **Approssimazione poligonale:** La lunghezza  $\ell(\alpha)$  è il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte nella curva. In termini teorici:

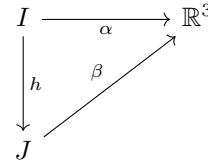
Sia dato  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale per cui, per ogni partizione  $\{t_i\}_{i=0}^n$  di  $I$  di finezza inferiore a  $\delta$  (i.e.,  $\max |t_{i+1} - t_i| < \delta$ ), vale  $\|S - \ell(\alpha)\| < \varepsilon$ , dove  $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$ .

### 1.2 (Ri)parametrizzazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a.

#### 1.2.1 Riparametrizzazione e prime proprietà

**Definizione 1.6** (Riparametrizzazione di una curva).

Data una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , una **riparametrizzazione**  $\beta$  di  $\alpha$  è una curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui esiste un diffeomorfismo liscio  $h : I \rightarrow J$  con  $\alpha = \beta \circ h$ .



Se  $h' > 0$ , si dice che  $h$  mantiene l'orientazione di  $\alpha$ ; se  $h' < 0$ ,  $h$  inverte l'orientazione.

**Proposizione 1.7.**

Se  $\beta$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ , allora  $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$ .

#### 1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco

**Definizione 1.8** (Curva regolare).

Si dice che una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è **regolare** se  $\alpha'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .

**Definizione 1.9** (Curva parametrizzata a lunghezza d'arco).

Si dice che una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è **parametrizzata a lunghezza d'arco (p.l.a.)** se  $\alpha'$  è un vettore unitario (i.e.,  $\|\alpha'\| = 1$ ). In tal caso,  $\ell(\alpha|_{[a,b]}) = b - a$ .

**Proposizione 1.10** (Riparametrizzazione a lunghezza d'arco).

Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva regolare, allora  $\alpha$  ammette una riparametrizzazione a lunghezza d'arco, ossia ammette una riparametrizzazione  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui  $\beta$  sia p.l.a.

*Osservazione 1.11.*

Tutte le riparametrizzazioni p.l.a. di una curva regolare  $\alpha$  sono ottenibili da una singola riparametrizzazione p.l.a.  $\beta$  come  $\beta(\pm t + v)$ , al variare di  $v \in \mathbb{R}$ . In particolare, le riparametrizzazioni che mantengono l'orientazione sono quelle della forma  $\beta(t + v)$ , mentre quelle che la invertono sono della forma  $\beta(-t + v)$ .

Se infatti  $\gamma$  è una riparametrizzazione p.l.a. di  $\beta$  (e quindi di  $\alpha$ ), deve valere  $\beta = \gamma \circ f$  per  $f$  diffeomorfismo. Quindi, per ogni tempo possibile di  $\beta$ , vale:

$$\beta'(s) = \gamma'(f(s))f'(s).$$

Dal momento che  $\beta'(s)$  e  $\gamma'(f(s))$  sono vettori unitari per ipotesi,  $f'(s)$  può assumere solo  $\pm 1$  come valore. Dacché il dominio di  $f$  è connesso e  $f'$  è liscia,  $f'$  è costantemente 1 o  $-1$ , e dunque  $f(t)$  è della forma  $\pm t + v$  con  $v \in \mathbb{R}$ .

## 1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.)

In tutta questa sezione consideriamo una curva p.l.a.  $\beta$ .

Se implicito, tralascieremo  $\beta$  nella notazione.

### 1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva

**Definizione 1.12** (Versore tangente).

Sia  $\beta$  una curva p.l.a., allora si definisce il suo **versore tangente**  $T_\beta$  come  $\beta'$ .

**Definizione 1.13** (Curvatura).

Sia  $\beta$  una curva p.l.a., allora si definisce la **curvatura**  $\kappa_\beta(s)$  di  $\beta$  al tempo  $s$  come  $\|\dot{T}_\beta(s)\|$ .

Laddove è chiaro dal contesto quale sia  $\beta$ , scriviamo solo  $\kappa(s)$ .

### 1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale

**Definizione 1.14** (Curva di Frenet p.l.a.).

Una curva p.l.a.  $\beta$  si dice **curva di Frenet** se ad ogni tempo  $s$ , la curvatura è positiva ( $\kappa_\beta(s) > 0$ ).

**Definizione 1.15** (Versore normale).

Se  $\beta$  è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo  $s$  il **versore normale**  $N_\beta(s)$  così definito:

$$N_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{T}_\beta(s)}{\|\dot{T}_\beta(s)\|}.$$

**Definizione 1.16** (Versore binormale).

Se  $\beta$  è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo  $s$  il **versore binormale**  $B_\beta(s)$  così definito:

$$B_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_\beta(s) \times N_\beta(s).$$

*Osservazione 1.17* (Triedito di Frenet).

Se  $\beta$  è di Frenet, allora, dacché  $\dot{T}_\beta \perp T_\beta$ ,  $N_\beta$  e  $T_\beta$  sono linearmente indipendenti. Dunque  $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$  formano una base ortonormale a ogni tempo  $s$ . Tale base è detta **triedro di Frenet**.

### 1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet

Assumiamo in questa sottosezione di star lavorando con curve di Frenet p.l.a.

**Proposizione 1.18** (Prima equazione di Frenet).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{T}_\beta(s) = \kappa_\beta(s) \cdot N_\beta(s). \quad (\text{F1})$$

*Osservazione 1.19.*

Osserviamo che  $\dot{N}_\beta$  è ortogonale in ogni tempo a  $N_\beta$ , e dunque  $\dot{N}_\beta$  sarà contenuto in  $\text{span}(T_\beta, B_\beta)$ .

Inoltre, derivando  $N_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = 0$ , otteniamo:

$$\dot{N}_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = -N_\beta(s) \cdot \dot{T}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s).$$

**Definizione 1.20** (Torsione).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora definiamo la **torsione**  $\tau_\beta(s)$  come il coefficiente di  $\dot{N}_\beta(s)$  in  $B_\beta(s)$ , ovverosia:

$$\tau_\beta(s) = \dot{N}_\beta(s) \cdot B_\beta(s).$$

**Proposizione 1.21** (Seconda equazione di Frenet).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{N}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s) T_\beta(s) + \tau_\beta(s) B_\beta(s). \quad (\text{F2})$$

**Proposizione 1.22** (Terza equazione di Frenet).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{B}_\beta(s) = -\tau_\beta(s) N_\beta(s), \quad (\text{F3})$$

e quindi  $\tau_\beta(s) = -\dot{B}_\beta(s) \cdot N_\beta(s)$ .

*Osservazione 1.23.*

Dal momento che  $B_\beta = T_\beta \times N_\beta$ , derivando  $B_\beta$  otteniamo:

$$\dot{B}_\beta = \dot{T}_\beta \times N_\beta + T_\beta \times \dot{N}_\beta,$$

dal quale, applicando le prime due equazioni di Frenet, ricaviamo (F3).

*Osservazione 1.24.*

In termini matriciali, le tre equazioni di Frenet possono scriversi in modo più compatto come:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

### 1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametrazioni p.l.a. di una stessa curva

#### Proposizione 1.25.

Sia  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una riparametrazione p.l.a. di una curva p.l.a.  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Allora le curvatures delle due curve coincidono nei punti delle tracce.

In altre parole, se  $f : J \rightarrow I$  è il diffeomorfismo per cui  $\gamma = \beta \circ f$ , allora:

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\beta(f(s)).$$

Inoltre, se  $\beta$  è di Frenet, anche  $\gamma$  è di Frenet, e se  $f$  preserva l'orientazione, allora i triedri di Frenet e la torsione coincidono nei punti delle tracce, ossia:

$$T_\gamma(s) = T_\beta(f(s)), \quad N_\gamma(s) = N_\beta(f(s)),$$

$$B_\gamma(s) = B_\beta(f(s)), \quad \tau_\gamma(s) = \tau_\beta(f(s)).$$

Qualora  $f$  non preservasse l'orientazione, le quantità sopracitate di  $\gamma$  coincidono con quelle di  $\beta$  nei punti, ma sono cambiate di segno (eccetto per la normale  $N_\gamma$ , che invece ha stesso verso).

## 1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale)

### 1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.

#### Definizione 1.26 (Curva di Frenet).

Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora si dice che  $\alpha$  è una **curva di Frenet** se una sua qualsiasi riparametrazione p.l.a. è di Frenet.

#### Osservazione 1.27.

Per la Proposizione 1.25, se  $\alpha$  è di Frenet, allora ogni sua riparametrazione p.l.a. è di Frenet.

Possiamo estendere questa idea anche per definire il triedro di Frenet e la torsione.

#### Definizione 1.28 (Versore tangente).

Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora si definisce il **versore tangente** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$T_\alpha(t) = T_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

#### Osservazione 1.29.

Se  $t$  è un tempo in cui  $\alpha'(t) \neq 0$ , allora, per continuità, esiste un intorno di  $t$  in cui  $\alpha$  è regolare (i.e.,  $\alpha$  è localmente regolare in  $t$ ). Questo ci permette di definire la curvatura come segue:

#### Definizione 1.30 (Curvatura).

Sia  $\alpha$  una curva regolare al tempo  $t$ . Allora si definisce la **curvatura** al tempo  $t$  come:

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrazione locale p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo.

Qualora  $\alpha$  non fosse regolare in  $t$  (i.e.,  $\alpha'(t) = 0$ ), si pone  $\kappa_\alpha(t) = 0$ .

#### Proposizione 1.31.

Una curva  $\alpha$  è regolare e di Frenet se e solo se  $\kappa_\alpha(t) > 0$  per ogni  $t$ .

#### Definizione 1.32 (Versore normale).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore normale** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$N_\alpha(t) = N_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo.

#### Definizione 1.33 (Versore binormale).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore binormale** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$B_\alpha(t) = B_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

#### Definizione 1.34 (Torsione).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce la **torsione** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

#### Proposizione 1.35.

Valgono le equazioni di Frenet ( $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$ ) anche nel caso generale.

### 1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale

#### Osservazione 1.36.

Se  $\alpha$  è una curva regolare e  $\alpha = \beta \circ f$ , dove  $\beta$  è una sua riparametrazione p.l.a. e  $f$  è un diffeomorfismo, allora:

$$\alpha'(t) = \beta'(f(t))f'(t) = T_\alpha(t)f'(t), \quad (1.1)$$

da cui si ricava applicando  $f'(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$  la seguente proposizione:

#### Proposizione 1.37 (Formula per il versore tangente).

Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora vale:

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

ovverosia il versore tangente è dato dalla normalizzazione della derivata al tempo  $t$ .

*Osservazione 1.38.*

Derivando ulteriormente l'eq. (1.1), si ottiene:

$$\alpha''(t) = \dot{T}_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^2 + T_\alpha(t) f''(t). \quad (1.2)$$

Applicando  $\alpha'(t) \times -$  all'eq. (1.2) e sfruttando che  $\alpha' \parallel T_\alpha$  si ricava:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \|\alpha''(t)\|^2 (\alpha'(t) \times \dot{T}_\alpha(t)), \quad (1.3)$$

dalla quale, usando che  $\alpha'(t) \perp \dot{T}_\alpha$ , e prendendo le norme, si ottiene la seguente proposizione:

**Proposizione 1.39** (Formula per la curvatura).

*Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora vale:*

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

*Osservazione 1.40.*

Assumendo che  $\alpha$  sia di Frenet, applicando (F1) all'eq. (1.3), si ottiene:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^3 (T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)),$$

dalla quale equazione, usando che  $B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)$ , si ottengono subito la seguente proposizione:

**Proposizione 1.41** (Formula per il versore binormale).

*Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora vale:*

$$B_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|},$$

ovverosia il versore binormale è dato dalla normalizzazione di  $\alpha' \times \alpha''$  al tempo  $t$ .

*Osservazione 1.42* (Formula per il versore normale).

Per calcolare  $N_\alpha(t)$  si sfrutta la relazione:

$$N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \times T_\alpha(t).$$

*Osservazione 1.43.*

Deriviamo per l'ultima volta l'eq. (1.2), e sostituendovi (F2), otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= (f'''(t) - \kappa_\alpha(t) f'(t)^3) \underline{\mathbf{T}}_\alpha(t) \\ &+ (\kappa_\alpha'(t) f'(t)^3 + 3\kappa_\alpha(t) f'(t) f''(t)) \underline{\mathbf{N}}_\alpha(t) \\ &+ \kappa_\alpha(t) \tau_\alpha(t) f'(t)^3 \underline{\mathbf{B}}_\alpha(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Applicando  $(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot -$  all'eq. (1.4), e usando che  $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$  è ortogonale a  $T_\alpha$ ,  $N_\alpha$ , ma parallelo a  $B_\alpha$ , ricaviamo la seguente proposizione:

**Proposizione 1.44** (Formula per la torsione).

*Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora vale:*

$$\tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

## 1.5 Proprietà di curvatura e torsione

### 1.5.1 Torsione e piano osculatore

La torsione rappresenta “quanto una curva è distante dall'essere un piano”. Più  $\tau_\alpha(t)$  si avvicina a 0 e più la curva  $\alpha$  in 0 è localmente simile a un piano, in particolare il piano osculatore:

**Definizione 1.45** (Piano osculatore).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **piano osculatore**  $\Pi_\alpha(t)$  al tempo  $t$  di  $\alpha$  come il seguente piano affine:

$$\Pi_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t) + \text{span}(T_\alpha(t), N_\alpha(t)).$$

L'intuizione presentata precedentemente è formalizzata dal seguente risultato:

**Proposizione 1.46.**

*Sia  $\alpha$  una curva di Frenet con  $\tau_\alpha \equiv 0$ . Allora  $\Pi_\alpha(t)$  è costante e la traccia di  $\alpha$  è contenuta in  $\Pi_\alpha$ .*

### 1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore

La curvatura rappresenta “quanto una curva è distante dall'essere una retta”. Più  $\kappa_\alpha(t)$  si avvicina a 0 e più la curva  $\alpha$  in 0 è localmente simile a una retta.

I due seguenti risultati formalizzano proprio questa intuizione.

**Proposizione 1.47.**

*Sia  $\alpha$  una curva regolare con  $\kappa_\alpha \equiv 0$ . Allora  $\alpha$  è contenuta in una retta affine. Viceversa, una retta affine si parametrizza con una curva avente curvatura nulla.*

**Definizione 1.48** (Raggio di curvatura).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **raggio di curvatura**  $R_\alpha(t)$  al tempo  $t$  di  $\alpha$  come:

$$R_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}.$$

**Definizione 1.49** (Cerchio osculatore).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Si definisce il **cerchio osculatore**  $\mathcal{C}_\alpha(t)$  al tempo  $t$  di  $\alpha$  come il cerchio di raggio  $R_\alpha(t)$  e centro  $\alpha(t) + R_\alpha(t)N_\alpha(t)$  contenuto nel piano osculatore  $\Pi_\alpha(t)$ .

**Proposizione 1.50** (Il raggio di curvatura è il raggio del cerchio che meglio approssima  $\alpha$  in un punto).

*Sia  $\alpha$  una curva p.l.a. di Frenet. Si ponga:*

$$f_{P,R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha(t) - P\|^2 - R^2.$$

*Consideriamo i cerchi di raggio  $P$  e  $R$  nel piano  $\Pi_\alpha(t_0)$ , denotati con  $\mathcal{C}(P, R)$ . Si pongano le seguenti condizioni:*

- $f_{P,R}(t_0) = 0$ , ovverosia il cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  passa per  $\alpha(t_0)$ ;

- $f'_{P,R}(t_0) = f''_{P,R}(t_0) = 0$ , ovvero il cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  approssima  $\alpha$  in  $t_0$  fino al secondo ordine.

Allora l'unico cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  soddisfacente le sopracitate condizioni è il cerchio osculatore  $\mathcal{C}_\alpha(t_0)$  al tempo  $t_0$  di  $\alpha$ .

### 1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve

La curvatura e la torsione delimitano essenzialmente un'unica curva:

**Teorema 1.51** (fondamentale della teoria delle curve).

Due curve p.l.a. di Frenet  $\alpha, \hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  hanno curvatura e torsione coincidente se e solo se la traccia di una curva è ottenibile dall'altra tramite movimento rigido dello spazio (i.e., isometria con parte lineare in  $\text{SO}(3)$ ).

## Parte 2

# Teoria delle superfici

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe  $C^\infty$ .

Se  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare o una funzione con dominio un sottinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , ammettiamo l'abuso di notazione  $\underline{x}(P)$  per sottintendere  $\underline{x}(\underline{y}^{-1}(P))$ , dove  $\underline{y}$  è una parametrizzazione regolare di  $P$  sulla superficie studiata.

## 2.1 Definizioni preliminari

### 2.1.1 Parametrazioni regolare

**Definizione 2.1** (Parametrizzazione regolare).

Si dice **parametrizzazione regolare** una mappa  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $U$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  tale che:

- $\underline{x}$  è iniettiva;
- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$  per ogni  $(u, v) \in U$  (**regolarità**);
- $\underline{x}^{-1}$  è continua.

*Osservazione 2.2.*

Osserviamo che  $J\underline{x} = [\underline{x}_u \ \underline{x}_v]$ . Allora richiedere la regolarità è equivalente a richiedere che  $\text{rk}(J\underline{x})$  sia sempre massimo, ovvero:

$$\text{rk}(J\underline{x}) = 2.$$

**Proposizione 2.3.**

Ogni parametrizzazione regolare è un diffeomorfismo  $C^\infty$ .

### 2.1.2 Superficie

**Definizione 2.4** (Superficie).

Una **superficie** è un sottinsieme  $\Sigma$  di  $\mathbb{R}^3$  tale per cui ogni punto  $P$  di  $\Sigma$  ammette una parametrizzazione regolare  $\underline{x}_P$  la cui immagine sia contenuta in  $\Sigma$  e che sia intorno di  $P$  in  $\Sigma$ . Ci riferiremo a  $\underline{x}_P$  come a una **parametrizzazione regolare per  $P$** .

*Osservazione 2.5.*

Chiaramente, se  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\underline{x}(U)$  è una superficie.

**Proposizione 2.6.**

$\Sigma$  è una superficie se e solo se ogni suo punto ammette una parametrizzazione regolare della forma  $\underline{x} : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ .

**Proposizione 2.7.**

Se  $\Sigma$  è una superficie, una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  è continua se e solo se  $f \circ \underline{x}$  è una funzione continua per ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  di un punto di  $\Sigma$ .

## 2.2 Classi fondamentali di superfici

### 2.2.1 Superfici di rotazione

**Definizione 2.8** (Superficie di rotazione).

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata della forma  $(a(t), 0, b(t))$  tale che  $\alpha$  è regolare e omeomorfismo locale. Si definisce allora la **superficie di rotazione** (intorno all'asse  $z$ ) di  $\alpha$  come l'immagine della seguente parametrizzazione canonica:

$$\underline{x}(u, v) = (a(u) \cos(v), a(u) \sin(v), b(u)).$$

**Definizione 2.9** (Paralleli e meridiani).

Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica  $\underline{x}$ . Allora l'immagine della curva  $\alpha_{u_0}(t) = \underline{x}(u_0, t)$  è detta **parallelo**, mentre quella della curva  $\gamma_{v_0}(t) = \underline{x}(t, v_0)$  è detta **meridiano**.

I paralleli sono dunque le intersezioni della superficie con i piani della forma  $\{z = k\}$ , mentre i meridiani lo sono rispetto ai piani della forma  $\{ax + by = 0\}$ .

**Proposizione 2.10.**

Una superficie di rotazione è effettivamente una superficie, poiché la sua parametrizzazione canonica è regolare.

### 2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello

**Proposizione 2.11** (Il grafico di una funzione  $C^\infty$  a valori reali con dominio  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  è una superficie).

Il grafico  $\Gamma_f$  di una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  è parametrizzato come  $\underline{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , ed è dunque una superficie.

**Definizione 2.12.**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  una funzione liscia. Allora si dice che  $a \in f(A)$  è un **valore regolare** per  $f$  se:

$$\nabla f(p) \neq 0, \quad \forall p \in f^{-1}(a).$$

**Proposizione 2.13.**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  una funzione liscia. Allora, se  $a$  è un valore regolare per  $f$ ,  $f^{-1}(a)$  è una superficie ed è detta **superficie di livello a rispetto a  $f$** .

## 2.3 Piano tangente e orientabilità

### 2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse

**Definizione 2.14** (Funzione di transizione).

Siano  $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \mathbb{R}^3$  due parametrizzazioni regolari per  $P$  su una superficie  $\Sigma$  aventi stessa immagine. Si definisce allora la **funzione di transizione**  $f_{\underline{x}, \underline{y}} : U \rightarrow U'$  da  $\underline{x}$  a  $\underline{y}$  come:

$$f_{\underline{x}, \underline{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{y}^{-1} \circ \underline{x},$$

in modo tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma & \\ \underline{x} \nearrow & & \nwarrow \underline{y} \\ U & \xrightarrow{f_{\underline{x}, \underline{y}}} & U' \end{array}$$

**Proposizione 2.15.**

Una funzione di transizione  $f_{\underline{x}, \underline{y}}$  è un diffeomorfismo  $C^\infty$ .

**Proposizione 2.16.**

Siano  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  due parametrizzazioni regolari per  $P$  su una superficie  $\Sigma$ . Allora vale:

$$\text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)) = \text{span}(\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)).$$

**Definizione 2.17** (Piano tangente).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Allora, se  $P$  è un punto di  $\Sigma$ , si definisce il **piano tangente**  $T_P \Sigma$  di  $P$  rispetto a  $\Sigma$  come:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)),$$

dove  $\underline{x}$  è una qualsiasi parametrizzazione regolare di  $P$ .

### 2.3.2 Versori normali e orientabilità

**Definizione 2.18** (Versore normale su  $\underline{x}$ ).

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di un punto  $P$  su una superficie  $\Sigma$ . Definiamo il **versore normale**  $n_{\underline{x}}(P)$  come:

$$n_{\underline{x}}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}.$$

**Proposizione 2.19.**

Due parametrizzazioni regolari  $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$  con stessa immagine hanno stessa normale in ogni punto se e solo se la funzione di transizione ha in ogni punto jacobiano di determinante positivo.

**Definizione 2.20** (Parametrizzazioni regolari compatibili).

Due parametrizzazioni regolari  $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$  si dicono **compatibili** se l'intersezione delle immagini è vuota o se hanno stessa normale sull'intersezione delle immagini.

**Definizione 2.21** (Superficie orientabile).

Una superficie  $\Sigma$  si dice **orientabile** se è ricoperta da parametrizzazioni regolari a due a due compatibili.

**Proposizione 2.22.**

Una superficie  $\Sigma$  è orientabile se e solo se esiste una funzione continua  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui  $\underline{n}(P)$  sia unitario e perpendicolare a  $T_P \Sigma$  per ogni punto  $P$  di  $\Sigma$ .

**Corollario 2.23.**

Ogni superficie  $\Sigma$  di livello  $\ell$  rispetto a  $f$ , per  $f$  liscia e  $\ell$  regolare, è orientabile.

**⚠ Attenzione.** Ogni superficie è localmente orientabile!

È sufficiente prendere per ogni punto come ricoprimento la sua stessa parametrizzazione regolare.

## Parte 3

# Curve su superfici

### 3.1 Piano tangente e derivata direzionale

#### 3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare

**Proposizione 3.1.**

Sia  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare e sia  $\alpha : I \rightarrow \underline{x}(U)$  una curva. Allora  $\alpha$  si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t)),$$

con  $u(t), v(t) : I \rightarrow U$  funzioni di classe  $C^\infty$ .

#### 3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve

**Proposizione 3.2** (Il piano tangente è l'insieme delle velocità delle curve sulla superficie considerata).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Allora vale:

$$T_P\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha'(P) \mid \alpha : I \rightarrow \Sigma \text{ curva con } P \in \alpha(I)\}.$$

#### 3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale

**Definizione 3.3** (Funzioni  $C^\infty$  sulla superficie).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice di classe  $C^\infty$  se per ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  di ogni punto  $P \in \Sigma$ ,  $f \circ \underline{x}$  è di classe  $C^\infty$ .

**Proposizione 3.4.**

Sia  $\Sigma$  una superficie. Sia  $P \in \Sigma$  e venga dato  $\xi \in T_P\Sigma$ . Sia data una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $\alpha, \beta$  sono due curve su  $\Sigma$  passanti per  $P$  al tempo 0 con  $\alpha'(0) = \beta'(0) = \xi$ , allora:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

**Definizione 3.5** (Derivata direzionale).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Sia  $P \in \Sigma$  e venga dato  $\xi \in T_P\Sigma$ . Allora, data una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la derivata direzionale  $D_\xi f(P)$  è definita come:

$$D_\xi f(P) \stackrel{\text{def}}{=} (f \circ \alpha)'(0),$$

dove  $\alpha$  è una qualsiasi curva su  $\Sigma$  passante per  $P$  al tempo 0 con  $\alpha'(0) = \xi$ .

### 3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale

#### 3.2.1 Operatore forma e prime proprietà

**Proposizione 3.6.**

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di un punto  $P$  su  $\Sigma$ . Allora  $D_\xi \underline{n}(P) \in T_P\Sigma$ , dove  $\underline{n}$  è la normale indotta da  $\underline{x}$  localmente.

**Definizione 3.7** (Operatore forma).

Data una  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di un punto  $P$  su  $\Sigma$ , si definisce **operatore forma** l'endomorfismo  $S_P(\xi) : T_P\Sigma \rightarrow T_P\Sigma$  tale per cui:

$$S_P(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -D_\xi \underline{n}(P).$$

*Osservazione 3.8.*

Osserviamo che l'operatore forma è "essenzialmente unico", dal momento che, al variare delle parametrizzazioni, può solo cambiare segno (quello della normale). Tutte le proprietà che ci interessano sono invarianti per cambio di segno, e quindi la scrittura  $S_P$  è "ben definita".

**Lemma 3.9.**

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione di  $P$ . Allora per  $\{i, j\} \subseteq \{u, v\}$  vale:

$$S_P(\underline{x}_i) \cdot \underline{x}_j(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{ij}(P).$$

**Proposizione 3.10** (L'operatore forma è autoaggiunto).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Allora l'operatore forma  $S_P$  è autoaggiunto.

#### 3.2.2 I e II forma fondamentale

**Definizione 3.11** (I forma fondamentale).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Si definisce **I forma fondamentale** di  $\Sigma$  in  $P$  il prodotto scalare  $I_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definito come:

$$I_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot w,$$

ovverosia è il prodotto canonico di  $\mathbb{R}^3$  ristretto a  $T_P\Sigma$ .

**Definizione 3.12** (II forma fondamentale).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Si definisce **II forma fondamentale** di  $\Sigma$  in  $P$  il prodotto scalare  $\Pi_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definito come:

$$\Pi_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} I_P(S_P(v), w) = S_P(v) \cdot w.$$

*Osservazione 3.13.*

Osserviamo che la II forma fondamentale è ben definita dal momento che  $S_P$  è autoaggiunto per la Proposizione 3.10

*Osservazione 3.14.*

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$ , le due forme fondamentali e l'operatore forma si rappresentano canonicamente come matrici  $2 \times 2$  nella base  $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ .

**Definizione 3.15** (I forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$  e data la rappresentazione matriciale di  $I_P$  rispetto a  $\underline{x}$ , definiamo  $E$ ,  $F$  e  $G$  (relativi a  $P$ ) di modo che:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \\ \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v & \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

**Definizione 3.16** (II forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$  e data la rappresentazione matriciale di  $\Pi_P$  rispetto a  $\underline{x}$ , definiamo  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  (relativi a  $P$ ) di modo che:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u & S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v & S_P(\underline{x}_v) \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 3.17** (Formula per  $\ell$ ,  $m$  e  $n$ ).

Gli elementi della rappresentazione matriciale di  $\Pi_P$  rispetto a  $\underline{x}$  si calcolano come segue:

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}, \quad m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}, \quad n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv},$$

dove  $\underline{n}$  è la normale indotta da  $\underline{x}$ .

**Proposizione 3.18.**

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$ , le rappresentazioni matriciali di  $I_P$ ,  $\Pi_P$  e  $S_P$  rispetto a  $\underline{x}$  soddisfano la seguente relazione:

$$\Pi_P = I_P \cdot S_P.$$

In particolare vale:

$$\det(S_P) = \frac{\det(\Pi_P)}{\det(I_P)} = \frac{\ell n - m^2}{EF - G^2}.$$

### 3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale

**Proposizione 3.19.**

Sia  $\pi$  un piano in  $\mathbb{R}^3$  passante per un punto  $p$  di una superficie  $\Sigma$ . Se  $\pi \neq P + T_P\Sigma$ , allora  $\pi \cap \Sigma$  è localmente parametrizzato come una curva regolare intorno a  $P$ .

*Osservazione 3.20.*

Se  $\pi$  è un piano con  $\pi \neq P + T_P\Sigma$ , allora la curva che parametrizza localmente in  $P$  l'intersezione  $\pi \cap \Sigma$  ha come versore tangente uno dei due possibili vettori unitari della giacitura di  $\pi \cap (P + T_P\Sigma)$ .

In particolare esiste una curva p.l.a.  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  che parametrizza l'intersezione  $\pi \cap \Sigma$  localmente in  $P$  con  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = w$ , dove  $w$  è il versore sopracitato.

Per tale curva  $\alpha$  vale  $\underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0$ , dove  $\underline{n}$  è una normale (locale). Quindi, derivando:

$$S_w P \cdot w = \underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0),$$

e quindi la quantità  $\underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0)$  non dipende da  $\alpha$ .

Scegliendo la normale di  $\pi$  in  $T_P\Sigma$ ,  $\dot{T}_\alpha(0)$  è parallelo a  $\underline{n}(P)$ . Ora possono esservi tre casi:

1. Se  $\dot{T}_\alpha(0)$  è nullo, allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P) = 0.$$

2. Se  $\dot{T}_\alpha(0)$  è parallelo positivamente a  $\underline{n}(P)$ , allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P).$$

3. Se  $\dot{T}_\alpha(0)$  è parallelo negativamente a  $\underline{n}(P)$ , allora:

$$S_w P \cdot w = -\kappa_\alpha(P).$$

Queste osservazioni ci permettono di dare un'ottima interpretazione geometrica al prodotto  $S_w P \cdot w$ , come segue:

**Definizione 3.21** (Curvatura normale).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Dato un vettore unitario  $w \in T_P\Sigma$ , si definisce la **curvatura normale**  $\kappa_n(P, w)$  in  $P$  di direzione  $w$  come:

$$\kappa_n(P, w) \stackrel{\text{def}}{=} S_w P \cdot w,$$

che è quindi, a meno di segno, per l'osservazione precedente, la curvatura di una curva  $\alpha$  passante per  $P$  e ottenuta come intersezione del piano tangente affine  $P + T_P\Sigma$  e di un piano  $\pi$  ad esso ortogonale, in modo tale che la giacitura di  $\pi \cap P + T_P\Sigma$  sia generata da  $w$ .

Data  $\alpha$  su  $\Sigma$ , definiamo la sua curvatura normale  $\kappa_n$  in  $P$  come:

$$\kappa_{\alpha, n} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_n(P, T_\alpha(P)).$$

*Osservazione 3.22.*

È immediato osservare che le curvature normali sono "invarianti per rototraslazioni", ovvero sono le stesse nei punti e nei vettori associati.

### 3.2.4 Direzioni e curvatures principali, formula di Eulero

**Definizione 3.23** (Direzioni e curvatures principali).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Gli autospazi dell'operatore forma  $S_P$  sono detti **direzioni principali** in  $P$ , mentre gli autovalori sono detti **curvatures principali** in  $P$ , e sono usualmente denotati come  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ .

*Osservazione 3.24.*

Calcolare la curvatura normale  $\kappa_n(P, v) = S_P v \cdot v$  su un  $S_P$ -autovettore unitario  $v$  restituisce la curvatura principale ad esso relativo.

*Osservazione 3.25.*

Poiché  $S_P$  è autoaggiunto,  $S_P$  è ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero esiste una base ortonormale di  $T_P \Sigma$  composta da  $S_P$ -autovettori.

Osserviamo inoltre che le curvatures principali in  $P$  sono distinte se e solo se  $S_P$  non è un multiplo dell'identità.

**Proposizione 3.26** (Formula di Eulero).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$  con  $S_P$ -autospazi distinti. Se  $\{v_1, v_2\}$  è una base ortonormale di  $S_P$ -autovettori con  $v_1$  relativo alla curvatura  $\kappa_1$  e  $v_2$  relativo a  $\kappa_2$ , allora vale la **formula di Eulero**:

$$\kappa_n(P, w_\theta) = \cos(\theta)^2 \kappa_1 + \sin(\theta)^2 \kappa_2, \quad (\text{Eulero})$$

dove  $w_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\theta) \kappa_1 + \sin(\theta) \kappa_2$ .

**Proposizione 3.27.**

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Se  $\kappa_1 \leq \kappa_2$  sono le due curvatures principali di  $P$  (eventualmente coincidenti), allora tutte le curvatures normali relative a  $P$  sono contenute in  $[\kappa_1, \kappa_2]$ .

### 3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti

**Definizione 3.28** (Curvatura gaussiana).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Si definisce allora la **curvatura gaussiana**  $\kappa(P)$  nel punto  $P$  come il prodotto delle sue curvatures principali, ovvero sia:

$$\kappa(P) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(S_P).$$

**Proposizione 3.29** (Formula per la curvatura gaussiana).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Vale allora la seguente formula:

$$\kappa(P) = \frac{\ell n - m}{EG - F^2}.$$

**Proposizione 3.30** (Curvatura media).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Si definisce allora la **curvatura media**  $H(p)$  nel punto  $P$  come la media delle sue curvatures principali, ovvero sia:

$$H(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr}(S_P).$$

*Osservazione 3.31.*

La curvatura gaussiana rimane invariata cambiando la "normale locale" presa, mentre quella media può cambiare al massimo di segno. In particolare, che una delle due sia nulla è invariante per cambio di parametrizzazione locale.

**Definizione 3.32** (Superfici piatte e minimi).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Una superficie si dice **piatta** se  $K \equiv 0$  su tutta  $\Sigma$ , e **minima** se invece  $H \equiv 0$ .

**Definizione 3.33** (Punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Allora  $P$  si dice:

- **ellittico**: se  $\kappa(P) > 0$  (tutte le curvatures normali sono concordi),
- **iperbolico**: se  $\kappa(P) < 0$  (esistono curvatures normali discordi),
- **parabolico**: se  $\kappa(P) = 0$ , ma  $S_P \neq 0$  (tutte le curvatures normali sono concordi, e ne esiste una nulla),
- **planare**: se  $S_P = 0$  (tutte le curvatures normali sono nulle).

**Proposizione 3.34.**

Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie compatta non vuota. Allora  $\Sigma$  ammette un punto ellittico.

**Proposizione 3.35.**

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ .

Se  $P$  è un punto ellittico, allora esiste un intorno di  $P$  su  $\Sigma$  contenuto interamente in uno dei due semispazi indotti dal taglio di  $\mathbb{R}^3$  tramite  $T_P \Sigma$ .

Se  $P$  è iperbolico, allora un tale intorno invece non può esistere.

## 3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium

### 3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche

**Proposizione 3.36.**

Data una parametrizzazione  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si ha  $\ell(\bar{\alpha}) = \ell(\underline{x} \circ \bar{\alpha})$  per ogni curva  $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow U$  se e solo se  $I_P = I_2$  per ogni punto  $P$  in  $\underline{x}(U)$ .

In altre parole,  $\underline{x}$  preserva le lunghezze delle curve se e solo se  $E \equiv G \equiv 1$  e  $F \equiv 0$ .

**Definizione 3.37** (Isometria locale).

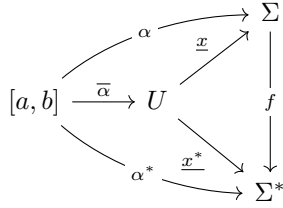
Una parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  si dice **isometria locale** se su tutti i punti di  $\underline{x}(U)$  si ha  $E \equiv G \equiv 1$  e  $F \equiv 0$  tramite  $\underline{x}$ .

**Definizione 3.38** (Superfici localmente isometriche).

Siano  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  due superfici di  $\mathbb{R}^3$ . Siano  $P \in \Sigma$  e  $P^* \in \Sigma^*$ . Si dice che  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  sono **localmente isometriche** intorno a  $P$  e  $P^*$  se esistono  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  parametrizzazione di  $P$ , e  $\underline{x}^* : U \rightarrow \Sigma^*$  parametrizzazione di  $P^*$  con  $E \equiv E^*$ ,  $F \equiv F^*$  e  $G \equiv G^*$  su  $U$ .

*Osservazione 3.39.*

Passare da un intorno di una superficie a un intorno di una superficie ad essa localmente isometrica conserva le lunghezze.



Se  $\alpha$  è una curva su  $\Sigma$ , allora si può fattorizzare come  $\underline{x} \circ \bar{\alpha}$  con  $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$  (vd. Proposizione 3.1); analogamente si fattorizza la curva ottenuta sulla superficie  $\Sigma^*$  come  $\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \bar{\alpha}$ .

La tesi è equivalente a mostrare che  $f \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \underline{x}$  conserva le velocità delle curve. Ma questo è vero, infatti:

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \bar{\alpha}'(t)^\top I_P \bar{\alpha}'(t) = \bar{\alpha}'(t)^\top I_P^* \bar{\alpha}'(t) = \|(\alpha^*)'(t)\|^2,$$

e  $I_P = I_P^*$ .

*Osservazione 3.40.*

Una superficie  $\Sigma^*$  ottenuta come rototraslazione o riflessione di una superficie  $\Sigma$  è localmente isometrica a  $\Sigma$  nei punti associati.

### 3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze

*Osservazione 3.41.*

Osserviamo che, se  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n}\}$  – dove  $\underline{n}$  è la normale indotta da  $\underline{x}$  – è una base di  $\mathbb{R}^3$  in ogni punto. Pertanto anche  $\underline{x}_{uu}$ ,  $\underline{x}_{uv}$  e  $\underline{x}_{vv}$  dovranno scriversi in questa base.

**Definizione 3.42** (Simbolo di Christoffel).

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare. Si indica con il **simbolo di Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$  il coefficiente di  $\underline{x}_k$  del vettore  $\underline{x}_{ij}$ , dove  $\{i, j, k\} \subseteq \{u, v\}$ .

*Osservazione 3.43.*

Si osserva subito che vale la seguente formula:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ij} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{ij} \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^u \\ \Gamma_{ij}^v \end{pmatrix},$$

dove  $I$  è la I forma fondamentale in forma matriciale.

**Teorema 3.44** (Theorema egregium di Gauss).

Sia  $\Sigma$  una superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Allora la sua curvatura gaussiana  $\kappa$  è localmente esprimibile in funzione di  $E, F, G$  e le loro derivate.

**Corollario 3.45.**

Due superfici localmente isometriche hanno stessa curvatura gaussiana nei punti associati.

**Corollario 3.46.**

Un piano e la sfera non sono localmente isometrici.

## 3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali

### 3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante

**Definizione 3.47** (Campo vettoriale (tangente)).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Un **campo vettoriale** (tangente) su  $\Sigma$  è una mappa liscia  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui  $X(P) \in T_P \Sigma$  per ogni  $P \in \Sigma$ .

**Definizione 3.48** (Derivata covariante).

Sia  $X$  un campo vettoriale di  $\Sigma$ . Si definisce allora la sua **derivata covariante** in direzione  $v$  su un punto  $P$  come:

$$\nabla_v X(P) \stackrel{\text{def}}{=} (D_v X(P))^\top \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{T_P \Sigma}(D_v X(P)).$$

*Osservazione 3.49.*

In realtà, per definire la derivata covariante di  $X$  in direzione  $v$  è sufficiente che  $X$  sia definita lungo una curva  $\alpha$  passante per  $P$  con velocità  $v$ .

### 3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo

**Definizione 3.50** (Campo parallelo).

Un campo vettoriale (tangente)  $X$  su  $\Sigma$  si dice **parallelo lungo una curva**  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  se:

$$\nabla_{\alpha'(t)} X(\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

*Osservazione 3.51.*

Sia  $X$  un campo vettoriale e sia  $\alpha$  una curva su  $\Sigma$ . Poiché  $X$  è una mappa liscia sulla superficie  $\Sigma$ ,  $X \circ \alpha$  si scrive come:

$$X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\underline{x}_v(\alpha(t)).$$

Dunque, usando la definizione di campo parallelo,  $X$  è parallelo lungo  $\alpha$  se e solo se soddisfa il seguente sistema, detto **sistema delle equazioni del trasporto parallelo**:

$$\text{(TP): } \begin{cases} a' + a(\Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v') + b(\Gamma_{vv}^u v' + \Gamma_{uv}^u u') = 0, \\ b' + a(\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') + b(\Gamma_{vv}^v v' + \Gamma_{uv}^v u') = 0, \end{cases}$$

dove  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ .

**Proposizione 3.52** (Esistenza e unicità del trasporto parallelo).

Sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una curva su una superficie  $\Sigma$ . Sia  $X_0$  un vettore di  $T_{\alpha(0)} \Sigma$ . Allora esiste un unico campo vettoriale  $X$  parallelo lungo  $\alpha$  tale per cui  $X(\alpha(0)) = X_0$ .

**Definizione 3.53.**

L'immagine in  $\alpha(1)$  del campo  $X$  ottenuto dalla proposizione precedente per estensione parallela da un vettore  $X_0 \in T_{\alpha(0)} \Sigma$  si dice ottenuta per **trasporto parallelo** sulla curva  $\alpha$ .

*Osservazione 3.54.*

Dal momento che il sistema delle equazioni del trasporto parallelo è lineare e omogeneo, combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni, e quindi l'operazione di trasporto parallelo è lineare.

**Proposizione 3.55** (Il trasporto parallelo conserva le distanze).

L'operazione di trasporto parallelo conserva il prodotto scalare dei vettori, e quindi anche le distanze. Inoltre, manda basi di un piano tangente all'altro mantenendone l'orientazione.

## 3.5 Geodetiche

### 3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo

**Definizione 3.56.**

Una curva  $\alpha$  su una superficie  $\Sigma$  si dice **geodetica** se il campo  $\alpha'$  è parallelo lungo  $\alpha$ , ovvero sia se:

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = (\alpha'')^\top = 0.$$

*Osservazione 3.57.*

Per le geodetiche è necessario specializzare correttamente le equazioni del trasporto parallelo. Ponendo  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , otteniamo:

$$\text{(Geo): } \begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2 = 0, \end{cases}$$

**Proposizione 3.58.**

Sia  $\alpha$  una geodetica su  $\Sigma$ . Allora  $\|\alpha'\|$  è costante.

### 3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale

**Proposizione 3.59.**

Sia  $\Sigma$  una superficie e  $q$  un suo punto. Allora per ogni  $v \in T_q \Sigma$  esiste  $\varepsilon > 0$  e un'unica geodetica  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  tale per cui  $\gamma_v(0) = q$  e  $\gamma_v'(0) = v$ .

*Osservazione 3.60.*

Possiamo in realtà assumere che  $\gamma_v(t)$  sia definita su  $[0, 1]$  senza alcuna perdita di generalità. Infatti, se  $\gamma_v(t)$  è definita su  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , la curva  $\gamma_v(st)$  è ben definita per  $t \in [0, 1]$ , dove  $s \in (0, \varepsilon)$ . Per unicità di  $\gamma_{sv}(t)$ , dal momento che  $\gamma_v(st)$  ne rispetta le condizioni iniziali, si ha  $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$ .

*Osservazione 3.61.*

Per compattezza di  $\{v \in T_P \Sigma \mid \|v\| = 1\}$ , esiste un  $\varepsilon_{\min}$  per il quale per ogni vettore  $v$  di norma  $\|v\| < \varepsilon_{\min}$  possiamo considerare la geodetica  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ .

Dal Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali è ben definita e liscia allora l'applicazione  $v \mapsto \gamma_v(1)$ , dove  $\|v\| < \varepsilon_{\min}$ .

**Definizione 3.62** (Mappa esponenziale).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$  e sia  $\underline{x}$  una sua parametrizzazione. Sia:

$$U_P = \{v \in T_P \Sigma \mid \|v\| < \varepsilon_{\min}\},$$

dove  $\varepsilon_{\min}$  è definito secondo l'Osservazione 3.61.

Si definisce allora la **mappa esponenziale**  $\exp_P : U_P \rightarrow \underline{x}(U_P)$  come l'applicazione con la seguente proprietà:

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

**Definizione 3.63** (Intorno normale).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$  e sia  $\underline{x}$  una sua parametrizzazione. Si dice che l'immagine  $N_P \stackrel{\text{def}}{=} \exp_P(U_P)$  è un **intorno normale** di  $P$ .

*Osservazione 3.64.*

Una volta ben definita la mappa esponenziale  $\exp_P$ , possiamo riparametrizzare  $\Sigma$  utilizzando  $\exp_P$ , definendo sul suo dominio naturale l'applicazione:

$$\underline{y}(u, v) = \exp_P(u\underline{e}_1 + v\underline{e}_2),$$

dove  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  è una base ortonormale di  $T_P \Sigma$ .

Questa mappa, detta indotta dalle **coordinate normali**, soddisfa alcune importanti proprietà:

- $\underline{y}(0, 0) = P$ ,
- $\underline{y}_u(0, 0) = \frac{d}{dt} \exp_P(t\underline{e}_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{t\underline{e}_1}(1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{\underline{e}_1}(u) \Big|_{t=0} = \underline{e}_1$ ,
- $\underline{y}_v(0, 0) = \dots = \underline{e}_2$ .

### 3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze

**Lemma 3.65** (Gauss, le geodetiche sono ortogonali ai cerchi indotti dalla mappa esponenziale).

Sia  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  una base ortonormale di  $T_P \Sigma$ . Sia  $\varepsilon$  lo stesso valore che definisce  $U_P$ . Sia  $v_k : [0, 2\pi] \rightarrow U_P$  la curva definita come:

$$v_k(t) = k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2), \quad k < \varepsilon.$$

Allora ogni geodetica  $\gamma_w$  è ortogonale a  $\exp_P \circ v_k$  per  $k < \varepsilon$  e  $w \in U_P$ .

**Corollario 3.66** (Le geodetiche minimizzano localmente le distanze).

Sia  $P' = \gamma_v(1)$  con  $v \in U_P$  un punto distinto da  $P$ . Se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow N_P$  è una curva liscia con  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha(1) = P'$ , allora:

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma_v).$$

### 3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione

**Definizione 3.67** (Angolo di una curva con il parallelo).

Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica  $\underline{x}$ . Data una curva  $\gamma$  su di essa, si definisce  $\varphi(\gamma(t))$  come segue:

$$\varphi(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\gamma'(t), \underline{x}_v(\gamma(t))),$$

ovverosia  $\varphi(\gamma(t))$  è l'**angolo tra la curva  $\gamma$  in  $\gamma(t)$  e il parallelo a cui appartiene  $\gamma(t)$** .

**Definizione 3.68** (Raggio di una curva rispetto all'asse  $z$ ). Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione. Sia data una curva  $\gamma$  su di essa. Si definisce allora il **raggio di  $\gamma$  rispetto all'asse di rotazione  $z$**  come la distanza di  $\gamma$  dall'asse  $z$ , ovvero sia:

$$r(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_{xy}(\gamma(t))\|.$$

**Proposizione 3.69** (Relazione di Clairaut).

Sia  $\gamma$  una geodetica su una superficie di rotazione  $\Sigma$ . Allora  $\gamma$  soddisfa la **relazione di Clairaut**:

$$r(\gamma(t)) \cdot \cos(\varphi(\gamma(t))) = \text{cost.} \quad (\text{Clairaut})$$

Inoltre una curva soddisfacente la relazione di Clairaut che non parametrizza un parallelo è una geodetica.

*Osservazione 3.70.*

Sono geodetiche anche le curve soddisfacenti (Clairaut) che parametrizzano paralleli, a patto che, se  $\Sigma$  è una rotazione sulla funzione  $f$ , valga  $f' = 0$  sui punti della geodetica; ovvero sia, in un certo senso, sono geodetiche i "paralleli stazionari".

### 3.5.5 Curvatura geodetica

*Osservazione 3.71.*

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet su una superficie  $\Sigma$ . Osserviamo che  $N_\alpha$  è perpendicolare a  $T_\alpha$ , e quindi dovrà scriversi in una qualche combinazione lineare della base ortonormale  $\{\underline{n}, \underline{n} \times T_\alpha\}$  di  $(T_\alpha)^\perp$ , dove  $\underline{n}$  è una normale (locale).

Sappiamo già dall'Osservazione 3.20 che  $\dot{T}_\alpha \cdot \underline{n}$  è la curvatura normale  $\kappa_{\alpha, n}$ . Ha quindi senso definire il seguente oggetto matematico:

**Definizione 3.72** (Curvatura geodetica).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet su una superficie  $\Sigma$ . Si definisce la **curvatura geodetica** di  $\alpha$  nel punto  $P$  come:

$$\kappa_{\alpha, g} = \dot{T}_\alpha(P) \cdot (\underline{n}(P) \times T_\alpha(P)),$$

dove  $\underline{n}$  è una normale (locale) su  $\Sigma$ .

*Osservazione 3.73.*

Quindi  $N_\alpha$  si scrive come:

$$N_\alpha = \kappa_{\alpha, n} \underline{n} + \kappa_{\alpha, g} (\underline{n} \times T_\alpha),$$

da cui si ricava immediatamente la seguente relazione:

$$\kappa_\alpha^2 = \kappa_{\alpha, n}^2 + \kappa_{\alpha, g}^2.$$

**Proposizione 3.74** (In una geodetica curvatura normale e curvatura della curva coincidono).

Sia  $\alpha$  una curva p.l.a. di Frenet su una superficie  $\Sigma$ . Allora  $\alpha$  è una geodetica se e solo se:

$$\kappa_{\alpha, g} \equiv 0,$$

ovvero sia se e solo se:

$$\kappa_\alpha \equiv \kappa_{\alpha, n}.$$

## 3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet

### 3.6.1 Prime definizioni

**Definizione 3.75** (Curva chiusa).

Una curva (non necessariamente liscia)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si dice **chiusa** se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

**Definizione 3.76** (Curva semplice).

Una curva (non necessariamente liscia)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si dice **semplice** se  $\alpha(t) = \alpha(t')$  può avvenire solo sugli estremi  $a, b$ , ovvero sia non è autointersecante.

**Definizione 3.77** (Curva regolare a tratti).

Una curva (non necessariamente liscia)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si dice **regolare a tratti** se esiste una partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$  di  $[a, b]$  tale per cui  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  è regolare per ogni  $i < \ell$ .

### 3.6.2 Regione di una superficie e area

**Definizione 3.78** (Regione).

Un sottinsieme  $R$  di una superficie  $\Sigma$  si dice **regione** se è un chiuso nella topologia di  $\Sigma$ , il cui bordo è traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.

*Osservazione 3.79.*

Dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16 segue  $\underline{x}_s \times \underline{x}_t = \det(Jf_{\underline{x}, \underline{y}})(\underline{y}_u \times \underline{y}_v)$ . Da ciò segue facilmente tramite un cambio di variabili che:

$$\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_s \times \underline{x}_t\| ds dt = \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_u \times \underline{y}_v\| du dv.$$

**Definizione 3.80** (Area di una regione).

Sia  $R$  una regione di  $\Sigma$  contenuta dentro l'immagine di una parametrizzazione  $\underline{x}$ . Si definisce allora la sua **area** come:

$$A(R) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv,$$

che, per l'Osservazione 3.79, è invariante al cambio di parametrizzazione.

**Proposizione 3.81** (Formola per  $\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|$ ).

Per ogni coppia di vettori  $v, w$  si vale la seguente relazione:

$$\|v \times w\|^2 + \|v \cdot w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Applicando questa identità a  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$ , si ottiene la seguente formola (relativa a  $\underline{x}$ ):

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

### 3.6.3 Integrazione rispetto a una regione

**Definizione 3.82** (Integrazione rispetto all'area).

Se  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione liscia, si definisce il suo integrale rispetto a una regione  $R$  di  $\Sigma$  come segue:

$$\int_R \varphi dA \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv.$$

Osservazione 3.83.

Ponendo  $\varphi \equiv 1$ , si ottiene:

$$\int_R dA = A(R).$$

### 3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario

**Definizione 3.84** (Angoli esterni).

Sia  $R$  una regione di una superficie  $\Sigma$ . Se  $\alpha$  ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità  $t_1, t_2, \dots, t_n$  si definiscono gli **angoli esterni** di  $R$  come:

$$\varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\alpha'_+(t_i), \alpha'_-(t_{i+1})),$$

dove  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

**Teorema 3.85** (Gauss-Bonnet locale).

Sia  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una regione semplicemente connessa con angoli esterni  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R \kappa dA + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi. \quad (\text{GBL})$$

**Definizione 3.86** (Angoli interni).

Sia  $R$  una regione di una superficie  $\Sigma$ . Se  $\alpha$  ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità  $t_1, t_2, \dots, t_n$  si definiscono gli **angoli interni** di  $R$  come:

$$\iota_i \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \varepsilon_i,$$

dove  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

**Corollario 3.87.**

Sia  $T \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una triangolo su  $\Sigma$ , ovvero sia una regione con tre punti non regolari sul bordo, collegati tramite geodetiche. Allora vale:

$$\int_R \kappa dA = \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 - \pi.$$

**Corollario 3.88.**

In un piano, la somma degli angoli interni di un triangolo è esattamente  $\pi$ . Sulla sfera, invece è strettamente maggiore di  $\pi$ . Su una sella è invece strettamente minore.

### 3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione

**Definizione 3.89** (Superficie orientata con bordo).

Si dice che  $\Sigma$  è una **superficie orientata con bordo** (eventualmente sconnesso) se:

$$\Sigma = \widehat{\Sigma} \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n R_i \right),$$

dove  $\widehat{\Sigma}$  è una superficie orientata, compatta con  $\partial\widehat{\Sigma} = \emptyset$ , e le  $R_i$  sono regioni di  $\widehat{\Sigma}$ .

In tal caso si pone:

$$\partial\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \partial R_i,$$

mentre i suoi angoli interni/esterni diventano quelli delle singole regioni.

**Definizione 3.90** (Triangolarizzazione).

Una **triangolarizzazione** di una superficie  $\Sigma$  è una famiglia  $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$  di insiemi tali per cui valgono le seguenti proprietà:

- $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^n \Delta_\lambda$ ,
- $\Delta_\lambda$  è l'immagine di un triangolo euclideo tramite una parametrizzazione regolare compatibile con l'orientazione di  $\Sigma$ .
- Se  $\lambda \neq \mu$ , allora  $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$  può essere vuoto, un lato comune e un singolo vertice.
- Se  $\Delta_\lambda$  e  $\Delta_\mu$  hanno in comune un lato, allora lo percorrono con orientazioni opposte.
- $\Delta_\lambda \cap \partial\Sigma$  può essere vuoto, un lato o un vertice.

### 3.6.6 Teorema di Radó e caratteristica di Eulero-Poincaré

**Teorema 3.91** (Radó).

Ogni superficie orientata con bordo ammette una triangolarizzazione.

**Definizione 3.92** (Caratteristica di Eulero-Poincaré).

Sia  $\tau = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$  una triangolarizzazione di una superficie orientata con bordo. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero-Poincaré** come:

$$\chi(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} V - L + T,$$

dove  $V$  è il numero di vertici di  $\tau$ ,  $L$  è il numero di lati e  $T$  è il numero di triangoli.

**Fatto 3.93.**

La caratteristica di Eulero-Poincaré non dipende dalla triangolarizzazione scelta.

### 3.6.7 Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse

**Teorema 3.94** (Gauss-Bonnet globale).

Sia  $\Sigma$  una superficie orientata con bordo con angoli esterni  $\{\varepsilon_i\}_i$ . Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds + \int_\Sigma \kappa dA + \sum_i \varepsilon_i = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (\text{GBG})$$

**Corollario 3.95.**

Se  $\Sigma$  è una superficie orientata compatta con  $\partial\Sigma = \emptyset$ , allora:

$$\int_{\Sigma} \kappa \, dA = 2\pi\chi(\Sigma).$$

**Definizione 3.96** (Superficie chiusa).

Una superficie  $\Sigma$  si dice **chiusa** se è compatta e  $\partial\Sigma = \emptyset$ .

**Teorema 3.97** (classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse).

A meno di omeomorfismo, le superfici chiuse, orientabili e connesse sono le superfici di genere, tali per cui  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ .

**Corollario 3.98.**

Sia  $\Sigma$  una superficie chiusa e orientabile non omeomorfa alla sfera. Allora su  $\Sigma$  esistono sia punti ellittici, che iperbolici, che parabolici.

# Parte 4

## Varietà e teoria del grado

### 4.1 Varietà differenziabili e prime definizioni

#### 4.1.1 Mappe $C^\infty$ e diffeomorfismi

**Definizione 4.1** (Mappe lisce tra due sottinsiemi).

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$  sottinsiemi qualsiasi. Allora una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice di **classe  $C^\infty$**  (o *liscia*) se per ogni  $x \in X$  esistono un aperto  $W_x$  e una funzione  $F : W_x \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ , chiamata **estensione**, di classe  $C^\infty$  per cui:

$$F|_{W_x \cap X} = f|_{W_x \cap X}.$$

*Osservazione 4.2.*

Osserviamo che i sottinsiemi di  $X$  della forma  $W \cap X$  con  $W$  aperto sono esattamente gli aperti per la topologia di sottospazio di  $X$ .

**Definizione 4.3** (Diffeomorfismo).

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$  sottinsiemi qualsiasi. Allora una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice **diffeomorfismo** se è un omeomorfismo, è liscia e ammette inversa liscia.

*Osservazione 4.4.*

Le definizioni di mappa liscia e diffeomorfismo date sono chiaramente compatibili con le usuali definizioni date su aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 4.5.**

La composizione di mappe lisce è liscia. La restrizione di una mappa liscia è liscia.

#### 4.1.2 Varietà differenziabili, varietà chiuse, carte, atlanti, parametrizzazioni locali e funzioni di transizione

**Definizione 4.6** (Varietà differenziabile liscia senza bordo).

Un insieme  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  si dice **varietà (differenziabile liscia senza bordo) di dimensione  $m > 0$**  (o  $m$ -varietà) se per ogni suo punto  $x$  esistono un intorno aperto  $W_x$  in  $\mathbb{R}^k$  e un diffeomorfismo  $f_x : W_x \cap M \rightarrow U$  verso un aperto  $U$  in  $\mathbb{R}^m$ . Per  $m = 0$ , si richiede invece che ogni  $W_x \cap M$  sia un singolo punto.

Le coppie della forma  $(f_x, W_x \cap M)$  si dicono **carte locali**, e formano un **atlante** della varietà. L'inversa di  $f_x$  si dice invece **parametrizzazione locale** di  $x$  in  $M$ .

**Definizione 4.7** (Varietà chiusa).

Si dice **varietà chiusa** una varietà (senza bordo) che è compatta.

*Osservazione 4.8.*

Le varietà di dimensione zero sono esattamente le unioni di punti isolati.

*Osservazione 4.9.*

Le carte locali inducono un ricoprimento aperto di  $M$ , e quindi, qualora  $M$  fosse compatta, si potrebbe sempre prendere un atlante finito.

Inoltre, poiché  $\mathbb{R}^k$  è II-numerabile, si può sempre prendere un atlante numerabile.

*Osservazione 4.10.*

Ogni aperto di  $\mathbb{R}^k$  è una varietà di dimensione  $k$ . Le superfici sono invece varietà di dimensione 2 immerse in  $\mathbb{R}^3$ , le cui parametrizzazioni locali sono indotte dalle parametrizzazioni regolari.

*Osservazione 4.11* (Gli aperti di varietà sono sottovarietà).

Se  $N$  è un aperto di una  $m$ -varietà  $M$ ,  $N$  eredita da  $M$  una struttura di  $m$ -varietà per la quale l'atlante è dato dalle intersezioni delle carte locali con  $N$  stesso. Infatti  $N$  è aperto, e dunque l'immagine di una carta locale sarà anch'esso un aperto su  $\mathbb{R}^m$ .

**Definizione 4.12** (Funzione di transizione).

Date due parametrizzazioni locali  $f : U \rightarrow f(U)$  e  $g : V \rightarrow g(V)$  con intersezione delle immagini non vuota, si definisce la **funzione di transizione da  $f$  a  $g$**  come la seguente funzione:

$$g^{-1} \circ f : f^{-1}(g(V)) \rightarrow g^{-1}(f(U)).$$

#### 4.1.3 Prodotto di varietà

**Proposizione 4.13** (Prodotto di varietà).

Siano  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$  varietà di dimensione  $m$  e  $n$ . Allora  $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$  è una varietà di dimensione  $m + n$ .

Un atlante per  $M \times N$  è dato da:

$$\{(f_i \times g_j, (W_i \times Q_j) \cap (M \times N))\}_{i,j},$$

dove  $\{(f_i, W_i \cap M)\}_i$  è un atlante di  $M$  e  $\{(g_j, Q_j \cap N)\}_j$  è un atlante di  $N$ .

## 4.2 Spazio tangente e differenziale su mappe tra varietà

### 4.2.1 Differenziale su aperti di $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo la definizione di differenziale per mappe su aperti di spazi reali:

**Definizione 4.14** (Differenziale per  $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ).  
Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^k$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  una funzione liscia. Allora il **differenziale**  $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  nel punto  $x \in U$  è la funzione tale per cui:

$$df_x(h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Equivalentemente  $df_x$  è l'unica funzione lineare tale per cui:

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

*Osservazione 4.15.*

Il differenziale  $df_x$  rispetta alcune proprietà fondamentali:

- (i.) La matrice di  $df_x$  è data dallo jacobiano  $Jf(x) = (\partial_{x_j} f_i(x))_{i,j}$ .
- (ii.) Il differenziale rispetta la *regola della catena* (chain rule):  
$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$
- (iii.) Data  $\text{id}_U$  su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ , allora  $d(\text{id}_U)_x = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$  per ogni  $x \in U$ .
- (iv.) Dati  $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$  con  $U'$  aperto, l'inclusione  $\iota : U' \rightarrow U$  è tale per cui  $d\iota_x = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$  per ogni  $x \in U'$ .
- (v.) Se  $L : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  è lineare, allora  $dL_x = L$  per ogni  $x \in U$ .

**Proposizione 4.16.**

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$  aperti. Sia  $f : U \rightarrow V$  un diffeomorfismo. Allora  $k = \ell$  e  $df_x$  è un isomorfismo di  $\mathbb{R}^k$  per ogni  $x \in U$ .

### 4.2.2 Spazio tangente in un punto di una varietà

*Osservazione 4.17* (Lo spazio tangente è ben definito).

Sia  $M$  una varietà di dimensione  $m$ . Siano  $g : U \rightarrow W \cap M$  e  $h : U' \rightarrow W' \cap M$  due parametrizzazioni locali di  $x \in M$  con  $g(u) = h(u') = x$ .

Supponiamo senza perdita di generalità che  $W' = W$  (è sufficiente restringere le immagini). La funzione  $g \circ h^{-1}$  è un diffeomorfismo in quanto composizione di diffeomorfismi (vd. Proposizione 4.5). Allora per la Proposizione 4.16  $d(h^{-1} \circ g)_u$  è un isomorfismo.

Osserviamo che:

$$dg_u = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u = dh_{u'} \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Dal momento che  $d(h^{-1} \circ g)_u$  è in particolare surgettiva, si ha:

$$dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_{u'}(\mathbb{R}^m).$$

**Definizione 4.18** (Spazio tangente).

Sia  $x$  un punto di una varietà  $M$  di dimensione  $m$ . Presa una parametrizzazione locale  $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$  di  $x$  con  $g(u) = x$ , si definisce lo **spazio tangente di  $M$  in  $x$**  come:

$$T_x M \stackrel{\text{def}}{=} dg_u(\mathbb{R}^m).$$

**Proposizione 4.19.**

Sia  $x$  un punto di una varietà  $M$  di dimensione  $m$ . Allora:

$$\dim T_x M = m.$$

*Osservazione 4.20* (Spazio tangente in un prodotto di varietà).

Siano  $M$  e  $N$  due varietà di dimensione  $m$  e  $n$ . Se  $f_i \times g_j$  è una carta locale di  $M \times N$ , come ottenuto nella Proposizione 4.13, allora:

$$\begin{aligned} T_{(m,n)}(M \times N) &= d(f_i^{-1} \times g_j^{-1})_{(m,n)}(\mathbb{R}^{m+n}) \\ &\cong d(f_i^{-1})(\mathbb{R}^m) \times d(g_j^{-1})(\mathbb{R}^n) \\ &= T_m M \times T_n N \end{aligned}$$

Quindi vale il seguente isomorfismo canonico, ottenuto proiettando sulle componenti:

$$T_{(m,n)}(M \times N) \cong T_m M \times T_n N.$$

### 4.2.3 Differenziale per mappe lisce tra varietà

*Osservazione 4.21* (Il differenziale per mappe lisce è ben definito).

Siano  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  una varietà di dimensione  $m$ ,  $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$  un'altra varietà, e sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà.

Sia  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  un'estensione di  $f$  per un intorno aperto di  $x \in M$ . Siano  $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$  una parametrizzazione locale di  $x$  e  $h : V \rightarrow N$  una parametrizzazione locale di  $f(x)$  con  $g(u) = x$  e  $h(v) = f(x)$ .

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{F} & N \\ \uparrow g & & & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ F \circ g} & & & V \end{array}$$

Dal diagramma commutativo si deduce che:

$$dF_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ F \circ g)_u.$$

Pertanto  $dF_x(T_x M)$  non dipende dalla scelta dell'estensione  $F$  e vale:

$$dF_x(T_x M) \subseteq T_{f(x)} N.$$

**Definizione 4.22** (Differenziale su mappe tra varietà).

Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa tra varietà. Se  $F$  è un'estensione di  $f$  in  $x$ , si definisce il **differenziale di  $f$  in  $x$**   $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  come segue:

$$df_x \stackrel{\text{def}}{=} dF_x|_{T_x M}.$$

Osservazione 4.23.

Le proprietà del differenziale su aperti di  $\mathbb{R}^n$  si trasferiscono facilmente al differenziale su mappe tra varietà:

- (i.) Il differenziale rispetta la *regola della catena* (chain rule):

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$

- (ii.) Data  $\text{id}_M$  per una varietà  $M$ , allora  $d(\text{id}_M)_x = \text{id}_{T_x M}$  per ogni  $x \in M$ .

- (iii.) Dati  $M'$  e  $M$  sono varietà con  $M' \subseteq M$ , l'inclusione  $\iota : M' \rightarrow M$  è liscia,  $d_x \iota : T_x M' \rightarrow T_x M$  è iniettiva e  $T_x M'$  è un sottospazio di  $T_x M$ .

- (iv.) Se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, allora  $df_x$  è un isomorfismo per ogni  $x \in M$ .

**Proposizione 4.24** (Differenziale per prodotti di varietà). *Sia  $f : M \rightarrow N \times O$  una mappa liscia, dove  $M$ ,  $N$  e  $O$  sono varietà. Se  $f(x) = (g(x), p(x))$ , allora  $g$  e  $p$  sono lisce e vale:*

$$\boxed{df_x(h) = (dg_x(h), dp_x(h)).}$$

## 4.3 Valori regolari e critici

### 4.3.1 Prime definizioni

**Definizione 4.25** (Punti regolari o critici).

Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà, con  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$ .

Sia  $x \in M$ . Si dice che  $x$  è un **punto critico** se  $\text{rk}(df_x) < n$ , e altrimenti si dice che è un **punto regolare**.

Indichiamo con  $\text{crit}(f)$  l'insieme dei punti critici di  $f$ .

**Definizione 4.26** (Valori regolari o critici).

Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà, con  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$ .

Sia  $y \in N$ . Si dice che  $y$  è un **valore critico** se è immagine di almeno un punto critico, e altrimenti si dice che è un **valore regolare** (in particolare lo è se  $f^{-1}(y) = \emptyset$ ).

Osservazione 4.27.

È immediato osservare che l'insieme dei valori critici di  $f$  è esattamente  $f(\text{crit}(f))$ .

Osservazione 4.28 (I punti regolari formano un aperto).

Se  $x$  è un punto regolare di una mappa liscia  $f : M \rightarrow N$ , esiste sempre un intorno aperto  $U$  di  $x$  in  $M$  composto di soli punti regolari.

Scelta una parametrizzazione locale  $g : U \rightarrow g(U)$  di un intorno aperto di  $x$ , si può scegliere infatti una base "comune" per ogni  $T_y M$  al variare di  $y$  in  $g(U)$ , e così si può rappresentare  $df_y$  matricialmente.

Poiché  $x$  è regolare,  $df_x$  è surgettiva. Allora  $df_x$  ammette un minore di taglia massima di determinante non nullo. Il determinante di questo minore, al variare di  $y \in g(U)$ , varia continuamente; in particolare, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di  $x$  in cui continua a essere non nullo.

Equivalentemente esiste un intorno aperto di  $x$  in cui tutti i punti sono regolari.

### 4.3.2 Teorema di invertibilità locale per varietà e lemma della pila di dischi

**Teorema 4.29** (di invertibilità locale per varietà).

*Siano  $M$  e  $N$  due varietà di stessa dimensione. Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia. Se  $x \in M$  è regolare, allora esiste un intorno  $A$  di  $x$  in  $M$  tale per cui  $f|_A : A \rightarrow f(A)$  è un diffeomorfismo.*

**Proposizione 4.30.**

*Sia  $M$  una varietà compatta. Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà della stessa dimensione. Se  $y \in N$  è un valore regolare, allora  $f^{-1}(y)$  è un insieme finito.*

**Lemma 4.31** (della pila dei dischi).

*Siano  $M$  e  $N$  varietà della stessa dimensione. Sia  $M$  compatta. Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia con  $y \in N$  valore regolare. Allora esiste un intorno  $V$  di  $y$  tale per cui:*

$$|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|, \quad \forall y' \in V.$$

### 4.3.3 Misura nulla e teoremi di Sard e Brown

**Definizione 4.32** (Sottinsiemi di varietà di misura nulla).

Sia  $A$  un sottinsieme di una varietà  $M$  di dimensione  $m$ . Si dice che  $A$  ha **misura nulla (rispetto a  $M$ )** se per ogni carta locale  $(f, W \cap M)$ ,  $f(A \cap W)$  ha misura nulla in  $\mathbb{R}^m$ .

**Teorema 4.33** (di Sard, per le varietà).

*Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra due varietà. Allora l'insieme dei valori critici  $f(\text{crit}(f))$  ha misura nulla in  $N$ .*

**Corollario 4.34** (di Brown).

*Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra due varietà. Allora l'insieme dei valori regolari di  $f$  è denso in  $N$ .*

### 4.3.4 Varietà a partire da valori regolari

**Teorema 4.35.**

*Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà con  $\dim M = m \geq n = \dim N$ . Se  $y \in N$  è regolare, allora  $f^{-1}(y)$  è una varietà di dimensione  $m - n$  (codimensione  $n$ ).*

**Proposizione 4.36.**

*Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà con  $\dim M = m \geq n = \dim N$ . Se  $y \in N$  è regolare, posto  $P \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y)$ , si ha:*

$$\boxed{T_x P = \ker df_x, \quad \forall x \in P.}$$

*Inoltre  $df_x|_{(T_x P)^\perp}$  è un isomorfismo.*

**Corollario 4.37.**

*$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è una varietà di dimensione  $n$  e  $T_x S^n = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ .*

**Corollario 4.38.**

*$O(n) \subseteq M(n)$  è una varietà di dimensione  $\frac{n(n-1)}{2}$ .*

## 4.4 Varietà con bordo

### 4.4.1 Semispazio superiore e varietà con bordo

**Definizione 4.39** (Semispazio superiore).

Si definisce il **semispazio superiore**  $H^n$  in  $\mathbb{R}^n$  come:

$$H^n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

*Osservazione 4.40.*

Osserviamo che in modo naturale vale il seguente diffeomorfismo:

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

**Definizione 4.41** ( $m$ -varietà con bordo).

Si dice che  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  è una  **$m$ -varietà con bordo** se ogni punto di  $M$  ammette un intorno diffeomorfo ad un aperto del semispazio superiore  $H^n$ . Gli intorni e i diffeomorfismi citati formano le **carte locali** della varietà, e le inverse di tali diffeomorfismi sono dette **parametrizzazioni locali**. Analogamente si definiscono le **funzioni di transizione**.

Si dice **bordo** della varietà  $M$  l'insieme dei punti che è immagine di un punto di  $\partial H^n$  tramite qualche parametrizzazione locale, e si indica con  $\partial M$ .

*Osservazione 4.42.*

La definizione data è coerente con la definizione di varietà senza bordo: una varietà senza bordo  $M$  è esattamente una varietà con bordo  $M$  tale per cui  $\partial M = \emptyset$ .

Utilizzeremo dunque indistintamente le due caratterizzazioni.

### 4.4.2 Proprietà del bordo di una varietà con bordo

**Lemma 4.43** (I punti di bordo sono sempre immagini di elementi di bordo).

*Sia  $x$  un punto del bordo  $\partial M$  di una  $m$ -varietà con bordo  $M$ . Se  $g$  è una parametrizzazione locale di  $x$ , allora  $x$  è immagine di un punto di bordo di  $H^n$  tramite  $g$ . Equivalentemente,  $x$  è un punto di  $\partial M$  se e solo se è immagine di un valore di bordo per ogni sua parametrizzazione locale.*

**Corollario 4.44** (Il bordo si trasporta naturalmente tramite parametrizzazione locale).

*Sia  $g : U \rightarrow g(U)$  una parametrizzazione locale di una  $m$ -varietà con bordo  $M$ . Allora:*

$$g(\partial U) = g(U) \cap \partial M.$$

**Proposizione 4.45.**

*Sia  $M$  una  $m$ -varietà con bordo. Allora  $\partial M$  è una varietà senza bordo di dimensione  $m - 1$ .*

### 4.4.3 Differenziale e spazio tangente su varietà con bordo

*Osservazione 4.46* (Il differenziale sul bordo di  $H^n$  è ben definito).

ia  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa liscia da un aperto  $U \subseteq H^n$ . Supponiamo  $\tilde{g}$  e  $\hat{g}$  siano due estensioni di  $g$  in un intorno aperto di  $x \in U \cap \partial H^n$ . Supponiamo a meno di restringimento che  $\tilde{g}$  e  $\hat{g}$  condividano lo stesso dominio.

Il differenziale  $d\tilde{g}_x$  coincide allora con  $d\hat{g}_x$ . Sia infatti  $u_{ii \geq 0}$  è una successione in  $H^n \setminus \partial H^n$  con  $u_i \rightarrow x$ . Poiché  $\tilde{g}$  e  $\hat{g}$  sono lisce, il differenziale vara con continuità, ovvero sia:

$$d\tilde{g}_x = \lim_{i \rightarrow \infty} d\tilde{g}_{u_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} d\hat{g}_{u_i} = d\hat{g}_x,$$

dove si è usato che sugli  $u_i$  i differenziali certamente coincidono, potendoci restringere a un aperto in  $U$  non intersecante il bordo.

**Definizione 4.47** (Differenziale su  $H^n$ ).

Sia  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa liscia da un aperto  $U \subseteq H^n$ .

Per  $x \in U \setminus \partial H^n$ , il differenziale  $dg_x$  è definito come l'usuale differenziale dato dalla restrizione di  $g$  a un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

Per  $x \in U \cap \partial H^n$ , il differenziale  $dg_x$  è indotto dal differenziale di una qualsiasi estensione  $\tilde{g}$  di  $g$  in un intorno aperto di  $x$ , ovvero sia:

$$dg_x \stackrel{\text{def}}{=} d\tilde{g}_x.$$

*Osservazione 4.48.*

Come nel caso di una parametrizzazione locale da un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , anche il differenziale di una parametrizzazione locale di una varietà con bordo è iniettiva per motivi analoghi.

**Definizione 4.49** (Spazio tangente per varietà con bordo).

Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  una  $m$ -varietà con bordo. Sia  $x$  un punto di  $M$ . Si definisce allora lo **spazio tangente di  $x$  su  $M$**  come:

$$T_x M \stackrel{\text{def}}{=} dg_u(\mathbb{R}^m),$$

dove  $g$  è una parametrizzazione locale di un intorno di  $x$  in  $M$  con  $g(u) = x$ .

*Osservazione 4.50.*

Come per il caso di una varietà senza bordo, si dimostra che il differenziale è ben definito. Valgono inoltre ancora le usuali proprietà del differenziale, inclusa la regola della composizione (*chain rule*).

*Osservazione 4.51.*

A partire da queste definizioni, si definiscono in modo analogo i concetti di punto regolare/critico e di valore regolare/critico.

Si generalizza facilmente in questo senso il Teorema di Sard (Teorema 4.33), così come quello di Brown (Corollario 4.34).

*Osservazione 4.52* ( $T_x \partial M$  è un iperpiano di  $T_x M$ ).

Sia  $M$  una  $m$ -varietà con bordo. Grazie alla Proposizione 4.45 sappiamo che  $\partial M$  è una  $(m - 1)$ -varietà.

Consideriamo l'inclusione  $\iota : \partial M \rightarrow M$ . Chiaramente  $\iota$  è una mappa liscia tra varietà con differenziale l'inclusione  $T_x \partial M \hookrightarrow T_x M$ . In particolare vale:

$$T_x \partial M \subseteq T_x M$$

per ogni punto  $x \in \partial M$ .

#### 4.4.4 Varietà con bordo da valori regolari

##### Teorema 4.53.

Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una mappa liscia tra varietà, dove  $M$  è una  $m$ -varietà senza bordo. Se  $0$  è un valore regolare per  $f$ , allora  $\{f \geq 0\}$  è una  $m$ -varietà con bordo  $f^{-1}(0) = \{f = 0\}$ .

Osservazione 4.54.

Chiaramente il Teorema 4.53 si generalizza a qualsiasi insieme della forma  $\{f \text{ op } a\}$  con  $\text{op} \in \{\leq, \geq\}$  e  $a$  valore regolare di  $f$ .

##### Corollario 4.55.

$D^n$  è una varietà  $n$ -dimensionale con bordo  $S^{n-1}$ .

##### Lemma 4.56.

Sia  $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $m > n$  una mappa liscia.

Se  $y \in \mathbb{R}^n$  è un valore regolare sia per  $f$  che per  $f|_{\partial H^m}$  con  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ , allora  $f^{-1}(y)$  è una  $(m - n)$ -varietà con bordo  $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial H^m$ .

##### Teorema 4.57.

Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia tra varietà, dove  $M$  è una  $m$ -varietà con bordo  $\partial M$  non vuoto,  $N$  è una  $n$ -varietà senza bordo e  $m > n$ .

Se  $y \in N$  è un valore regolare sia per  $f$  che per  $f|_{\partial M}$  con  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ , allora  $f^{-1}(y)$  è una  $(m - n)$ -varietà con bordo  $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$ .

#### 4.4.5 Classificazione delle 1-varietà, lemma di non retrazione sul bordo e teorema del punto fisso di Brouwer

##### Teorema 4.58 (Classificazione delle 1-varietà con bordo).

Una 1-varietà con bordo è diffeomorfa a unioni disgiunte di copie di  $S^1$  e di intervalli di  $\mathbb{R}$ .

##### Corollario 4.59 (Classificazione delle 1-varietà compatte con bordo).

Una 1-varietà compatta con bordo è necessariamente un'unione disgiunta e finita di copie di  $S^1$  e di intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$ .

##### Corollario 4.60.

Una 1-varietà compatta con bordo ha un numero pari di punti sul bordo

##### Lemma 4.61 (di non retrazione sul bordo).

Sia  $M$  una varietà compatta con bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Allora non esistono mappe lisce  $f$  da  $M$  in  $\partial M$  che fissano il bordo, ovvero sia con  $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$ .

##### Lemma 4.62.

Ogni mappa liscia  $f : D^n \rightarrow D^n$  ammette almeno un punto fisso.

##### Teorema 4.63 (del punto fisso di Brouwer).

Ogni mappa continua  $f : D^n \rightarrow D^n$  ammette almeno un punto fisso.

## 4.5 Teoria del grado modulo 2

### 4.5.1 Omotopie $C^\infty$

Osservazione 4.64 ( $M \times [0, 1]$  è una varietà con bordo).

Sia  $M$  una  $m$ -varietà senza bordo. Allora, per la Proposizione 4.13,  $M \times \mathbb{R}$  è una  $(m + 1)$ -varietà senza bordo.

Consideriamo la mappa liscia  $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui  $f(x, t) = t(t - 1)$ . Allora per il Teorema 4.53  $\{f \leq 0\} = M \times [0, 1]$  è una  $(m + 1)$ -varietà con bordo  $\{f = 0\} = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$ .

##### Definizione 4.65 (Omotopia $C^\infty$ e funzioni $C^\infty$ -omotope).

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni da una varietà  $M$  in una  $N$ . Un'omotopia  $C^\infty$  da  $f$  a  $g$  è una funzione liscia  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tale per cui:

- $H(-, 0) = f$ ,
- $H(-, 1) = g$ .

Definiamo inoltre:

$$H_t \stackrel{\text{def}}{=} H(-, t).$$

Due funzioni  $f$  e  $g$  per le quali esiste un'omotopia da  $f$  a  $g$  si dicono  $C^\infty$ -omotope.

Osservazione 4.66.

È immediato verificare che “essere  $C^\infty$ -omotope” è una relazione di equivalenza per le funzioni lisce da  $M$  a  $N$ .

##### Lemma 4.67 (di omotopia).

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni  $C^\infty$ -omotope da una varietà  $M$  in una  $N$ , con  $M$  compatta e  $\dim M = \dim N$ . Se  $y \in N$  è un valore regolare sia per  $f$  che per  $g$ , allora:

$$|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \pmod{2}.$$

### 4.5.2 Isotopie e lemma di omogeneità

##### Definizione 4.68 (Isotopia).

Una omotopia  $C^\infty$   $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  si dice **isotopia** se per ogni  $t \in [0, 1]$ ,  $H(-, t)$  è un diffeomorfismo liscio.

##### Definizione 4.69 (Isotopia a supporto compatto).

Un'isotopia  $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$  si dice **a supporto compatto** se esiste un compatto  $K \subseteq N$  tale per cui  $H(-, t)|_{N \setminus K} = \text{id}_{N \setminus K}$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

##### Definizione 4.70 (Punti isotopi di una varietà).

Due punti  $y, z \in N$ , dove  $N$  è una varietà, si dicono **isotopi** se esiste un diffeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  con  $h(y) = z$  e un'isotopia a supporto compatto da  $h$  a  $\text{id}_N$ .

Osservazione 4.71.

È immediato osservare che la relazione “essere isotopi” sui punti di una varietà è una relazione di equivalenza.

##### Lemma 4.72.

Le classi di equivalenza della relazione “essere isotopi” sui punti di una varietà (senza bordo)  $M$  sono aperti della varietà.

**Lemma 4.73** (di omogeneità).

Sia  $N$  una varietà connessa e siano  $y, z$  due suoi punti. Allora  $y$  e  $z$  sono isotopi.

### 4.5.3 Grado modulo 2 e buona definizione

**Teorema 4.74.**

Siano  $M$  e  $N$  varietà della stessa dimensione. Sia  $M$  chiusa (ovverosia anche compatta) e  $N$  connessa. Siano  $y$  e  $z$  due valori regolari di una funzione  $f : M \rightarrow N$  liscia. Allora:

$$|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)| \pmod{2}.$$

**Definizione 4.75** (Grado modulo 2 di una funzione liscia). Sia  $f : M \rightarrow N$  una funzione liscia da una varietà compatta  $M$  a una di stessa dimensione e connessa  $N$ . Allora si definisce il **grado modulo 2** di  $f$  come:

$$\deg_2 f \stackrel{\text{def}}{=} |f^{-1}(y)| \pmod{2},$$

dove  $y$  è un qualsiasi valore regolare di  $f$ .

**Lemma 4.76.**

Siano  $M$  e  $N$  varietà della stessa dimensione. Sia  $M$  chiusa (ovverosia anche compatta) e  $N$  connessa. Se  $f : M \rightarrow N$  è liscia, allora i valori regolari di  $f$  formano un aperto di  $N$ .

**Teorema 4.77.**

Siano  $M$  e  $N$  varietà della stessa dimensione. Sia  $M$  chiusa (ovverosia anche compatta) e  $N$  connessa. Se  $f$  e  $g$  sono due mappe lisce  $C^\infty$ -omotope da  $M$  in  $N$ , allora:

$$\deg_2 f = \deg_2 g.$$

**Corollario 4.78.**

La mappa costante  $c_{x_0} : S^n \rightarrow S^n$  non è  $C^\infty$ -omotopa a  $\text{id}_{S^n}$ .

## 4.6 Varietà orientate

### 4.6.1 Orientazione di basi su spazi vettoriali, orientazione canonica di $\mathbb{R}^n$

**Definizione 4.79** (Stessa orientazione).

Si dice che due basi (ordinate)  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  di un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale finito-dimensionale **hanno la stessa orientazione** se la matrice del cambio di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  ha determinante positivo.

*Osservazione 4.80.*

È immediato verificare che “avere la stessa orientazione” è una relazione d’equivalenza sulle basi dello spazio in esame avente solo due classi di equivalenza per le orientazioni.

**Definizione 4.81** (Orientazione).

Definiamo **orientazione** una classe di equivalenza per la relazione “avere la stessa orientazione”.

Data un’orientazione  $\Theta$  indichiamo con  $-\Theta$  l’unica altra classe di equivalenza.

**Definizione 4.82** (Orientazione canonica).

Si definisce l’**orientazione canonica**  $\Theta_0$  di  $\mathbb{R}^n$  come la classe di equivalenza indotta dall’orientazione della base canonica.

*Osservazione 4.83.*

Un isomorfismo  $L : V \rightarrow V'$  induce una bigezione dalle orientazioni di  $V$  a quelle di  $V'$  tramite:

$$[\mathcal{B}] \mapsto [L(\mathcal{B})].$$

Infatti la matrice di cambio di base è invariante per isomorfismo.

Indicheremo tale mappa con il simbolo dell’isomorfismo da cui è indotta.

**Definizione 4.84** (Segno di una base).

Dato uno spazio vettoriale  $V$  orientato con  $\Theta$ , si definisce il **segno** di una base  $\mathcal{B}$  come:

$$\text{sgn}_\Theta(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \mathcal{B} \sim \Theta, \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

### 4.6.2 Orientazione su prodotti di spazi vettoriali

**Definizione 4.85** (Orientazione prodotto).

Siano  $V$  e  $W$  due  $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali di dimensione finita. Se  $\Theta^V$  è un’orientazione di  $V$  e  $\Theta^W$  lo è di  $W$ , allora si definisce l’**orientazione prodotto**  $\Theta^V \times \Theta^W$  su  $V \times W$  come l’orientazione indotta dalla giustapposizione di  $\mathcal{B}_V$  e  $\mathcal{B}_W$ :

$$\mathcal{B}_V \sqcup \mathcal{B}_W \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_V \times \{0_W\} \cup \{0_V\} \times \mathcal{B}_W,$$

dove  $\mathcal{B}_V$  e  $\mathcal{B}_W$  sono basi di  $V$  e  $W$  con  $[\mathcal{B}_V] = \Theta^V$  e  $[\mathcal{B}_W] = \Theta^W$ .

*Osservazione 4.86* (Regola dei segni per l’orientazione prodotto).

Siano  $V$  e  $W$   $\mathbb{R}$ -spazi orientati con  $\Theta^V$  e  $\Theta^W$ . Siano  $\mathcal{B}_V$  e  $\mathcal{B}_W$  basi di  $V$  e  $W$ . Sia  $M_V$  la matrice di cambio di base da una base positiva di  $V$  a  $\mathcal{B}_V$ . Sia  $M_W$  l’analogo per  $W$ .

La matrice di cambio di base dalla giustapposizione delle basi positive alla giustapposizione di  $\mathcal{B}_V$  e  $\mathcal{B}_W$  è esattamente:

$$M = \left( \begin{array}{c|c} M_V & 0 \\ \hline 0 & M_W \end{array} \right).$$

Quindi vale la seguente *regola dei segni*:

$$\text{sgn}_{\Theta^V \times \Theta^W}(\mathcal{B}_V \sqcup \mathcal{B}_W) = \text{sgn}_{\Theta^V}(\mathcal{B}_V) \text{sgn}_{\Theta^W}(\mathcal{B}_W).$$

### 4.6.3 Orientazione su varietà e prime proprietà

**Definizione 4.87** ( $m$ -varietà orientata,  $m > 1$  o  $\partial M = \emptyset$ ).

Una **varietà orientata di dimensione  $m$**  (con  $\underline{m} \geq 1$  o  $\partial M = \emptyset$ ) è una coppia  $(M, \Theta)$ , dove  $M$  è una  $m$ -varietà, eventualmente con bordo, e  $\Theta = \{\Theta_x\}_{x \in M}$  è una famiglia di orientazioni degli spazi tangenti dei punti di  $M$  tale per cui:

Per ogni  $x \in M$  esiste una parametrizzazione locale  $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U) \subseteq M$  con  $dg_u(\Theta_0) = \Theta_{g(U)}$  per ogni  $u \in U$  (**condizione di compatibilità di  $g$  con  $\Theta$** ).

Una varietà  $M$  per cui esiste una famiglia di orientazioni tali per cui  $(M, \Theta)$  è orientata si dice **orientabile**.

*Osservazione 4.88.*

Sia  $(M, \Theta = \{\Theta_x\}_{x \in M})$  una  $m$ -varietà orientata (con  $\dim M > 1$  o  $\partial M = \emptyset$ ). Allora si può definire l'**orientazione opposta**  $-\Theta$ :

$$-\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{-\Theta_x\}_{x \in M}.$$

In effetti  $(M, -\Theta)$  è orientata: presa una parametrizzazione locale  $g$  compatibile con  $\Theta$ , ristretta e traslata eventualmente a una palla di centro  $0$ , è sufficiente precomporla con una riflessione rispetto a un asse della palla per ottenere una parametrizzazione locale compatibile con  $-\Theta$ .

Questo ragionamento non è attuabile sul bordo di una 1-varietà: su  $H^1$  una riflessione come quella sopracitata non è possibile. Questo ci suggerisce di modificare la definizione per il caso delle 1-varietà bordate:

**Definizione 4.89** (1-varietà compatta orientata bordata).

Sia  $M$  una 1-varietà connessa compatta con bordo (questo succede, per il Corollario 4.59, se e solo se  $M \cong [0, 1]$ ). Allora un'orientazione su  $M$  è per definizione una famiglia  $\Theta = \{d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0, 1]}$  dove  $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$  è un diffeomorfismo.

Se  $M$  è sconnessa, un'orientazione è un'orientazione su ciascuna componente connessa.

*Osservazione 4.90.*

Se  $M$  è una 1-varietà connessa compatta con bordo, e  $\Theta = \{d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0, 1]}$  è una sua orientazione, allora

$$-\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{-d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0, 1]}$$

è una sua altra orientazione, indotta dalla precomposizione del diffeomorfismo  $\varphi$  con una riflessione di  $[0, 1]$  (e.g.,  $\psi(x) = 1 - x$ ).

**Proposizione 4.91.**

*Una varietà orientata e connessa, eventualmente con bordo, ammette esattamente due orientazioni.*

**Definizione 4.92** (Base positiva o negativa per  $T_x M$ ).

Sia  $(M, \Theta)$  una varietà orientata. Allora una base per  $T_x M$  si dice **positiva** se è della stessa orientazione di  $\Theta_x$ ; altrimenti si dice **negativa**.

**Definizione 4.93** (Varietà di orientazione opposta).

Data  $(M, \Theta)$  una varietà orientata, indichiamo con  $-M$  la varietà  $(M, -\Theta)$ , dove  $-\Theta$  è l'unica altra orientazione possibile.

*Osservazione 4.94.*

Una varietà è sempre "localmente orientabile": è sufficiente prendere l'orientazione indotta da un'unica parametrizzazione locale.

#### 4.6.4 Orientabilità di $m$ -varietà immerse in $\mathbb{R}^m$

**Proposizione 4.95** ( $m$ -varietà immerse in  $\mathbb{R}^m$  sono orientabili).

*Sia  $M$  una  $m$ -varietà immersa in  $\mathbb{R}^m$ . Allora  $M$  è orientabile secondo l'orientazione canonica di  $\mathbb{R}^m$ .*

#### 4.6.5 Orientazione nel prodotto di due varietà orientate

**Definizione 4.96** (Orientazione prodotto per varietà).

Siano  $(M, \Theta^M)$  e  $(N, \Theta^N)$  due varietà orientate. Si definisce l'**orientazione prodotto** su  $M \times N$  come l'orientazione  $\Theta^{M \times N}$  tale per cui:

$$\Theta_{(x,y)}^{M \times N} = \Theta_x^M \times \Theta_y^N, \quad \forall x \in M, y \in N$$

dove  $\Theta_x^M \times \Theta_y^N$  è l'orientazione prodotto su  $T_{(x,y)}M \times N \cong T_x M \times T_y N$  indotta da  $\Theta_x^M$  e  $\Theta_y^N$ .

Il prodotto di parametrizzazioni locali compatibili induce parametrizzazioni locali compatibili con l'orientazione prodotto appena definita.

#### 4.6.6 Semispazio interno o esterno

*Osservazione 4.97* (Il semispazio interno è ben definito).

L'orientazione locale di una  $m$ -varietà  $M$  con bordo determina sempre la scelta di uno dei semispazi di  $T_x M \setminus T_x \partial M$  per ogni  $x$  sul bordo  $\partial M$ .

Se infatti  $g : U \rightarrow g(U)$  è una parametrizzazione di un punto  $x \in \partial M$  con  $g(u) = x$ , il semispazio scelto è proprio:

$$dg_u(H^m \setminus \partial H^m).$$

Questo semispazio non dipende dalla parametrizzazione scelta. Se infatti  $h : V \rightarrow h(V)$  è un'altra parametrizzazione con  $h(v) = x$ , a meno di restringere le mappe possiamo considerare la funzione di transizione  $h^{-1} \circ g$ . Osserviamo che:

$$dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Mostrando allora che  $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m \setminus \partial H^m) = H^m \setminus \partial H^m$ , otteniamo la tesi.

Osserviamo che  $h^{-1} \circ g$  è una funzione da un aperto intersecante il bordo di  $H^m$  in un altro aperto dello stesso tipo. Pertanto  $d(h^{-1} \circ g) : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$  deve mandare lo spazio tangente  $T_u \partial U = \partial H^m$  in  $T_v \partial V = \partial H^m$ , dal momento che  $h^{-1} \circ g$  si restringe a una parametrizzazione di  $\partial V$  a partire da  $\partial U$ .

Quindi  $J(h^{-1} \circ g)_u$  deve essere della seguente forma:

$$J(h^{-1} \circ g)_u = \begin{pmatrix} * & | & * \\ \hline 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se  $h^{-1} \circ g = (\Psi_1, \Psi_2)$ , con  $\Psi_1$  funzione a valori in  $\mathbb{R}^{m-1}$  e  $\Psi_2$  a valori in  $\mathbb{R}$ , allora:

$$\lambda = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_m}(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\Psi_2(x + \varepsilon x_m)}^{\geq 0} - \overbrace{\Psi_2(x)}^{=0}}{\varepsilon} \geq 0.$$

Inoltre, non può valere  $\lambda = 0$  dacché  $J(h^{-1} \circ g)_u$  è invertibile. Quindi  $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m \setminus \partial H^m) = H^m \setminus \partial H^m$ , da cui segue poi facilmente la tesi.

**Definizione 4.98.**

Data una  $m$ -varietà bordata  $M$  e un punto  $x$  appartenente al bordo  $\partial M$ , si definisce il **semispazio interno** riferito a  $x$  come:

$$\boxed{dg_u(H^m \setminus \partial H^m)},$$

dove  $g$  è una parametrizzazione locale di  $x$  con  $g(u) = x$ . I suoi vettori sono detti **interni**.

Si dice **semispazio esterno** il semispazio complementare a quello interno rispetto al taglio dell'iperpiano  $T_x \partial M$  in  $T_x M$ , e i suoi vettori sono detti **esterni**.

**Lemma 4.99.**

Sia  $M \cong [0, 1]$ . Si fissi un diffeomorfismo  $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ . Allora  $d\varphi_0(1)$  è un vettore interno, mentre  $d\varphi_1(1)$  è esterno.

### 4.6.7 Orientazione sul bordo della varietà

*Osservazione 4.100* (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – *esistenza*).

Sia  $x \in \partial M$  un punto della  $m$ -varietà orientata  $(M, \Theta)$ , con  $m > 1$ . Sia  $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U)$  una parametrizzazione locale di  $x$  con  $g(u) = x$  che sia compatibile con l'orientazione  $\Theta$ . Allora:

- per definizione,  $dg_u(-e_m)$  è un vettore *esterno* per  $x$ ;
- $\{dg_u(e_i)\}_{i=1 \dots m-1}$  è una base di  $T_x \partial M$ , dacché  $g|_{\partial H^m}$  si identifica come una parametrizzazione locale di  $x$  in  $\partial M$ ;
- $\{dg_u(e_i)\}_{i=1 \dots m}$  è una base positiva di  $T_x M$ , dacché  $g$  è compatibile e  $\{e_i\}_i$  ha l'orientazione canonica in  $\mathbb{R}^m$ .

*Osservazione 4.101* (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – *unicità*).

Sia  $x \in \partial M$  un punto della  $m$ -varietà orientata  $(M, \Theta)$ , con  $m > 1$ . Sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $T_x M$  tale per cui  $v_1$  un vettore esterno per  $x \in \partial M$  e  $\{v_2, \dots, v_n\}$  è base di  $T_x \partial M$ .

Sia  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$  un'altra tale base di  $T_x M$ . Sia  $g : U \rightarrow g(U)$  una parametrizzazione locale di  $x$  con  $g(u) = x$ . Allora  $dg_u$  è un isomorfismo, e in quanto tale lascia invariate le relazioni di orientazioni delle basi di  $T_u U = \mathbb{R}^m$  quando portate in  $T_x M$ .

Sia  $w_i = dg_u^{-1}(v_i)$  e sia  $w'_i = dg_u^{-1}(v'_i)$ . Dal momento che  $v_1$  e  $v'_1$  sono vettori esterni, si deve avere necessariamente  $(w_1)_m, (w'_1)_m < 0$ . Dal momento che  $g|_{\partial H^m}$  si identifica naturalmente come una parametrizzazione locale di  $x$  in  $\partial M$ , e che i  $v_i$  e i  $v'_i$  per  $i > 1$  formano una base di  $T_x \partial M$ , si ha  $(w_i)_m = (w'_i)_m = 0$  per ogni  $i > 1$ .

Dunque la matrice di cambio di base da  $\{v_1, \dots, v_n\}$  a  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$  è della seguente forma:

$$M = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline * & A \end{array} \right),$$

dove  $\lambda > 0$  affinché  $w_1$  e  $w'_1$  abbiano ancora lo stesso segno sull'ultima coordinata. Dal momento che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$  sono basi positive di  $T_x M$ , allora hanno stesso orientazione, e quindi  $\det(M) > 0$ . Ne segue che  $\det(A) > 0$ .

Osserviamo che  $A$  è proprio la matrice di cambio di base da  $\{v_2, \dots, v_n\}$  a  $\{v'_2, \dots, v'_n\}$ . Dunque queste due basi hanno stessa orientazione.

*Osservazione 4.102* (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – è *effettivamente un'orientazione*).

Sia  $x \in \partial M$  un punto della  $m$ -varietà orientata  $(M, \Theta)$ , con  $m > 1$ . Denotiamo con  $\Theta_x^{\partial M}$  l'orientazione indotta da  $\{v_2, \dots, v_n\}$  su  $T_x \partial M$  da una base positiva  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  di  $T_x M$  con  $v_1$  esterno e  $\{v_2, \dots, v_n\}$  base di  $T_x \partial M$ .

Definiamo:

$$\Theta^{\partial M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Theta_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}.$$

Data  $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U) \subseteq M$  parametrizzazione locale compatibile di  $x \in \partial M$  in  $M$ ,  $g|_{\partial U}$ , identificata come parametrizzazione da  $\mathbb{R}^{m-1}$ , è compatibile rispetto a  $\Theta^{\partial M}$ , a meno di restringimento del dominio a una palla con conseguente riflessione rispetto a un asse.

Si può infatti estendere in tal caso la base canonica di  $\mathbb{R}^{m-1} \cong \partial H^m$  a una base di  $\mathbb{R}^m$  con l'aggiunta di un vettore la cui immagine tramite  $dg_-$  risulta essere sempre esterna. Quindi  $\Theta^{\partial M}$  è un'orientazione per  $\partial M$ .

**Definizione 4.103** (Orientazione indotta sul bordo).

Sia  $(M, \Theta)$  una  $m$ -varietà bordata e orientata con  $m > 1$ . Per  $x \in \partial M$  denotiamo con  $\Theta_x^{\partial M}$  l'orientazione indotta da  $\{v_2, \dots, v_n\}$  su  $T_x \partial M$  da una base positiva  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  di  $T_x M$  con  $v_1$  esterno e  $\{v_2, \dots, v_n\}$  base di  $T_x \partial M$ .

Si definisce allora  $\Theta^{\partial M} = \{\Theta_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}$  come l'**orientazione indotta sul bordo** (o *orientazione di bordo*) per  $\partial M$ .

Per  $M \cong [0, 1]$  orientata tramite un diffeomorfismo  $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ , si associa  $-1$  a  $\varphi(0)$  e  $+1$  a  $\varphi(1)$ .

**Corollario 4.104.**

*Sia  $M$  una  $m$ -varietà orientabile immersa in  $\mathbb{R}^m$ . Allora  $\partial M$  è orientabile con l'orientazione indotta sul bordo dall'orientazione canonica di  $\mathbb{R}^m$ .*

**Corollario 4.105.**

*$S^n$  è orientabile per ogni  $n$ .*

## 4.7 Teoria del grado su $\mathbb{Z}$

### 4.7.1 Grado intero rispetto a un valore regolare

**Definizione 4.106** (Segno di un differenziale in un punto). Sia  $M$  una varietà orientata con  $\Theta^M$  e  $N$  orientata con  $\Theta^N$  e  $\dim M = \dim N$ . Se  $f : M \rightarrow N$  è una mappa liscia, si definisce il **segno di  $df_x$**  per un punto regolare  $x \in M$  come:

$$\boxed{\text{sgn}(df_x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x(\Theta^M) = \Theta^N, \\ -1 & \text{se } df_x(\Theta^M) = -\Theta^N. \end{cases}}$$

**Definizione 4.107** (Grado intero di un valore regolare).

Sia  $M$  una varietà chiusa e sia  $N$  una varietà connessa con  $\partial N = \emptyset$  e  $\dim M = \dim N$ . Sia  $M$  orientata con  $\Theta^M$  e sia  $N$  orientata con  $\Theta^N$ .

Se  $y \in N$  è regolare per  $f : M \rightarrow N$  liscia, si definisce il **grado di  $f$  rispetto a  $y$**  come:

$$\deg(f; y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x).$$

*Osservazione 4.108* (Il grado intero è localmente costante). Se  $y \in N$  è regolare, possiamo scegliere per il Lemma 4.31 un intorno  $I_1$  sul quale  $|f^{-1}(-)|$  è costante.

Inoltre, per il Teorema della permanenza del segno applicato sul determinante dello jacobiano di  $h^{-1} \circ f \circ g$ , dove  $g : U \rightarrow g(U)$  parametrizza localmente  $x \in f^{-1}(y)$  e  $h : V \rightarrow h(V)$  un intorno di  $y$ , esiste un intorno  $I_2$  di  $y$  sul quale le orientazioni sono preservate allo stesso modo in cui lo sono preservate dalle controimmagini di  $y$ .

Poiché i valori regolari sono aperti (vd. Lemma 4.76), possiamo allora prendere un intorno aperto di valori regolari in  $I_1 \cap I_2$  entro cui  $\deg(f; -)$  è costante; quindi il grado intero è *localmente* costante.

## 4.7.2 Grado di una mappa estendibile dal bordo

**Lemma 4.109** (Il grado di una mappa estendibile dal bordo è nullo).

Sia  $X$  una varietà compatta e orientata con bordo non nullo. Sia  $N$  una varietà connessa, orientata, senza bordo e con  $\dim X = \dim N + 1$ . Sia  $F : X \rightarrow N$  una mappa liscia.

Se  $y \in N$  è un valore regolare per  $f \stackrel{\text{def}}{=} F|_{\partial X}$ , allora  $\deg(f; y) = 0$ .

## 4.7.3 Passaggio per omotopia e buona definizione del grado intero di una mappa

**Lemma 4.110** (di omotopia, per il grado intero).

Siano  $M$  e  $N$  due varietà orientate con  $M$  chiusa e  $\dim M = \dim N$ . Sia  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  un'omotopia  $C^\infty$  con  $f \stackrel{\text{def}}{=} F_0$  e  $g \stackrel{\text{def}}{=} F_1$ . Se  $y \in N$  è un valore regolare comune a  $f$  e  $g$ , allora:

$$\deg(f; y) = \deg(g; y).$$

**Teorema 4.111** (Il grado intero è ben definito).

Siano  $M$  e  $N$  varietà con  $M$  chiusa,  $N$  connessa e  $\dim M = \dim N$ . Se  $f : M \rightarrow N$  è liscia e  $y, z \in N$  sono suoi valori regolari, allora:

$$\deg(f; y) = \deg(f; z).$$

**Definizione 4.112** (Grado intero di una mappa liscia).

Sia  $M$  una varietà chiusa e sia  $N$  una varietà connessa. Siano

$M$  e  $N$  della stessa dimensione e orientate. Se  $f : M \rightarrow N$  è una mappa liscia, si definisce il suo **grado intero** come:

$$\deg(f) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(f; y),$$

dove  $y$  è un valore regolare qualsiasi di  $f$ .

**Teorema 4.113.**

Sia  $M$  una varietà chiusa e sia  $N$  una varietà connessa. Siano  $M$  e  $N$  della stessa dimensione e orientate. Se  $f$  e  $g$  sono due mappe lisce  $C^\infty$ -omotope da  $M$  in  $N$ , allora:

$$\deg(f) = \deg(g).$$

**Corollario 4.114.**

Sia  $M$  una varietà chiusa e connessa. Se  $f : M \rightarrow M$  è un diffeomorfismo di grado  $\deg(f) = -1$ , allora  $f$  non è omotopa all'identità  $\text{id}_M$ , né a una mappa costante  $c_x$  per  $x \in M$ .

**Proposizione 4.115** (Il grado è moltiplicativo).

Sia  $M$  una varietà orientata, chiusa e connessa. Se  $f$  e  $g$  sono due mappe lisce da  $M$  in sé stessa, allora:

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g).$$

## 4.7.4 Grado di $z^k$ , delle riflessioni e della mappa antipodale su $S^1$

**Lemma 4.116.**

Sia  $f_k : S^1 \rightarrow S^1$  tale per cui:

$$f_k(z) = z^k \in \mathbb{C},$$

dove si è identificato  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{C}$ . Allora 1 è un valore regolare di  $f_k$  e  $\deg(f_k) = k$ .

Quindi, per  $k \neq 0$ ,  $f_k$  non può estendersi a una mappa liscia da  $D^2$  a  $S^1$ .

*Osservazione 4.117* (Un diffeomorfismo ha grado 1 o  $-1$ ).

Per un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  su  $M$  chiusa e connessa, possono esistere solo due gradi,  $+1$  o  $-1$ , dacché l'insieme controimmagine di un valore regolare contiene un singolo elemento.

In particolare,  $\deg(f) = 1$  se e solo se per un elemento  $x \in M$ ,  $df_x$  preserva l'orientazione.

**Lemma 4.118.**

Sia  $r_i : S^n \rightarrow S_n$  la riflessione tale per cui:

$$r_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} (\underbrace{x_1, \dots, -x_i}_{\text{invariati}}, \dots, \underbrace{x_{n+1}}_{\text{invariati}}).$$

Allora  $\deg(r_i) = -1$ .

**Lemma 4.119.**

Sia  $A : S^n \rightarrow S^n$  la mappa antipodale, ossia tale per cui  $A(x) = -x$ . Allora  $\deg(A) = (-1)^{n+1}$ .

### 4.7.5 Campi vettoriali tangenti su $S^n$ e pettinabilità

**Definizione 4.120** (Campo vettoriale tangente).

Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  una varietà liscia, con o senza bordo. Un **campo vettoriale tangente** è una mappa liscia  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale per cui:

$$v(x) \in T_x M, \quad \forall x \in M.$$

**Definizione 4.121** (Pettinabilità).

Una varietà liscia, con o senza bordo, si dice **pettinabile** se ammette un campo vettoriale tangente mai nullo.

**Teorema 4.122** (di pettinabilità della sfera).

$S^n$  è pettinabile se e solo se  $n$  è dispari.

## 4.8 Indici di campi vettoriali su aperti di $\mathbb{R}^m$

### 4.8.1 Zero isolato e indice di un campo in uno zero

**Definizione 4.123** (Zero isolato).

Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  liscia con  $U$  aperto. Allora  $z$  si dice **zero isolato** di  $f$  se esiste un raggio  $\varepsilon > 0$  tale per cui  $f$  in  $B_\varepsilon(z)$  ammette come unico zero  $z$ .

*Osservazione 4.124* (L'indice è ben definito).

Sia  $\varepsilon > 0$  tale per cui  $z$  è unico zero per  $f$  in  $B_\varepsilon(z)$ . Sia  $v_\varepsilon : S^m \rightarrow \partial B_\varepsilon(z)$  tale per cui:

$$v_\varepsilon(x) = z + \varepsilon x.$$

Osserviamo che  $v_\varepsilon$  preserva l'orientazione. Consideriamo

$$\overline{f_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial B_\varepsilon(z)}.$$

Poiché  $v_\varepsilon$  preserva l'orientazione,  $\deg(\overline{f_\varepsilon}) = \deg(\overline{f_\varepsilon} \circ v_\varepsilon)$ . Scelto un altro  $\varepsilon'$ , possiamo definire un'omotopia  $H$  nel seguente modo:

$$H_t = \overline{f_{(1-t)\varepsilon + \varepsilon'}} \circ v_{(1-t)\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Allora, per il Teorema 4.113:

$$\deg(\overline{f_\varepsilon}) = \deg(\overline{f_\varepsilon} \circ v_\varepsilon) = \deg(\overline{f_{\varepsilon'}} \circ v_{\varepsilon'}) = \deg(\overline{f_{\varepsilon'}}).$$

**Definizione 4.125** (Indice di  $f$  in  $z$ ).

Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  liscia con  $U$  aperto. Sia  $z$  uno zero isolato di  $f$ . Si definisce allora l'**indice di  $f$  in  $z$**  come:

$$\text{ind}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(\overline{f_\varepsilon}), \quad \overline{f_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial B_\varepsilon(z)},$$

dove  $\varepsilon$  è un raggio tale per cui  $z$  è unico zero in  $B_\varepsilon(z)$ .

**Corollario 4.126** (Indice di  $z^k$  in 0).

Sia  $v_k : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  tale per cui  $v_k(z) = z^k$ . Allora  $\text{ind}(v_k, 0) = k$ .

### 4.8.2 Lemma di Hopf e teorema fondamentale dell'algebra

**Lemma 4.127** (di Hopf).

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  una  $m$ -varietà compatta con bordo. Sia  $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  un campo vettoriale con zeri isolati e  $v|_{\partial X}$  mai nullo.

Allora:

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z) = \deg \left( \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial X} : \partial X \rightarrow S^{m-1} \right).$$

**Teorema 4.128** (fondamentale dell'algebra).

Sia  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$  con  $\deg(p) = n$ . Allora:

$$\deg(p) = \sum_{z_0 \in p^{-1}(0)} \text{mult}(p, z_0),$$

dove  $\text{mult}$  indica la molteplicità algebrica di uno zero in un polinomio.

## 4.9 Campi vettoriali su varietà

### 4.9.1 Indice di un campo vettoriale tangente su una varietà

**Fatto 4.129.**

Sia  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vettoriale tangente della varietà  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ , con  $z \in M$  zero isolato di  $v$ .

Se  $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$  è una parametrizzazione di  $M$  in  $z$  con  $g(u) = z$ , allora possiamo considerare il campo vettoriale  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale per cui:

$$\xi(u) = (dg_u)^{-1}(v(g(u))), \quad \forall u \in U.$$

Allora  $\text{ind}(\xi, g^{-1}(z))$  non dipende dalla scelta della parametrizzazione scelta  $g$ .

**Definizione 4.130** (Indice di un campo vettoriale tangente su varietà rispetto a un punto).

Sia  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un campo vettoriale tangente della varietà  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ , con  $z \in M$  zero isolato di  $v$ .

Si definisce allora l'**indice di  $v$  in  $z$**  come:

$$\text{ind}(v, z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}(\xi, g^{-1}(z)),$$

dove  $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$  è una parametrizzazione locale di  $M$  in  $z$  con  $g(u) = z$  e  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  è tale per cui:

$$\xi(u) = (dg_u)^{-1}(v(g(u))), \quad \forall u \in U.$$

## 4.9.2 Simplicii e caratteristica di Eulero

**Definizione 4.131** ( $m$ -simplesso).

Un  $m$ -**simplesso**  $\Delta^{(m)}$  in  $\mathbb{R}^k$  con  $k \geq m$  è definito come l'inviluppo convesso di  $m + 1$  punti affinemente indipendenti.

Si dice **faccia** di  $\Delta^{(m)}$  un simplesso generato da alcuni dei generatori di  $\Delta^{(m)}$ .

**Definizione 4.132** (Complesso simpliciale).

Si dice **complesso simpliciale** l'unione di simplessi in  $\mathbb{R}^k$  che si intersecano a due a due nell'insieme vuoto oppure in una faccia.

**Fatto 4.133.**

*Ogni varietà  $M$  è omeomorfa ad un complesso simpliciale, finito se  $M$  è compatta.*

**Definizione 4.134** (Caratteristica di Eulero-Poincaré).

Sia  $M$  compatta. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero-Poincaré**  $\chi(M)$  come:

$$\chi(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i s_i(C),$$

dove  $C$  è un complesso simpliciale finito a cui  $M$  è omotopicamente equivalente e  $s_i(C)$  è il numero di  $i$ -simplessi in  $C$ .

**Fatto 4.135.**

*La caratteristica di Eulero-Poincaré è ben definita e invariante per equivalenza omotopica.*

## 4.9.3 Teorema di Poincaré-Hopf

**Teorema 4.136** (Poincaré-Hopf).

*Sia  $M$  una varietà compatta con bordo, eventualmente vuoto. Se  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  è un campo vettoriale tangente con zeri isolati e  $v|_{\partial M}$  è esterno in ogni punto (se  $\partial M \neq \emptyset$ ), allora:*

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z) = \chi(M).$$

**Corollario 4.137.**

*Si può calcolare  $\chi(S^m)$  nel seguente modo:*

$$\chi(S^m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ 2 & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases}$$