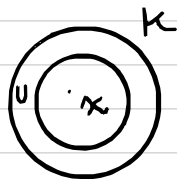


Paracompattezza e atlanti adeguati

(da "Manifolds" di B. Martelli)

Prop. Sia X T_2 e loc. comp. ($\rightarrow \forall x \exists \overline{I(x)}$ "int. di x " compatto). Allora $\forall x \exists U(x)$ aperto con chiusura compatta.

Dimm. Sia K int. comp. di x . Allora $\exists U \ni x$ ap. in K .
Poiché X è T_2 , K è chiuso ($\rightarrow$ in T_2 , comp. $\Rightarrow$ chiuso).



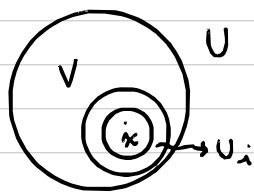
Quindi $\overline{U} \subseteq K$. Poiché K è compatto, allora $\overline{U}$ è comp. ($\rightarrow$ chiuso in un comp. è chiuso); U è allora l'aperto desiderato per x . $\square$

Prop. Sia X T_2 , loc. comp. e II-numerabile. Allora $\exists$ base numm. i cui elementi sono a chiusura compatta.

Dimm. Sia $\{U_i\}$ base numm. di X . Sia $U \subseteq X$ un aperto.

Allora $\forall x \in U, \exists V(x) \subseteq U$ ($\rightarrow$ si applica il teo. prec. sullo spazio U) a chiusura comp.

$\exists U_i \subseteq V(x)$ per def. di base numm. e U_i è necess. a chiusura comp., infatti:



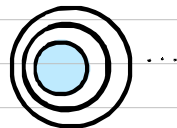
$$\cdot \underbrace{\overline{U_i}}_{\text{chiuso}} \subseteq \underbrace{\overline{V(x)}}_{\text{comp.}} \Rightarrow \overline{U_i} \text{ comp.}$$

Dunque è suff. scegliere come base $\{U_i \mid U_i \text{ a chiusura comp.}\}$. $\square$

Def. Un' **ESAUSTIONE PER COMPATTI** per uno spazio X è una succ. di compatti K_i t.c.:

$$\cdot K_i \subseteq \text{int}(K_{i+1}) \quad \cdot X = \bigcup_i K_i$$

$\Rightarrow K_i \not\subseteq K_{i+1}$



$\leadsto$ in $\mathbb{R}^m$, un'esauzione per compatti è per esempio $\{\overline{B_n(0)}\}_{n \in \mathbb{N}}$

Prop. Uno sp. X che è T_2 , loc. comp. e II-mum. ammette un'eshaustione per compatti.

Dimm. Sia $\{U_i\}_{i \geq 1}$ una base mum. con $\overline{U_i}$ compatti. ($\rightarrow$ vd. prop. prec.)

Poniamo $K_1 = \overline{U_1}$ e scegliamo K_{i+1} come $\bigcup_{j=1}^{t_i} \overline{U_j}$ ($\rightarrow$ unione fin. di comp. è comp.), dove

t_i è il più piccolo ind. per cui

esiste perché K_i è compatto

$$\left\{ \begin{aligned} K_i &\subseteq \bigcup_{j=1}^{t_i} \overline{U_j} \\ K_i &\subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{t_i} U_j}_{\text{aperto}} \subseteq \bigcup_{j=1}^{t_i} \overline{U_j} \\ \Rightarrow K_i &\subseteq \text{int} \left(\bigcup_{j=1}^{t_i} \overline{U_j} \right) \\ &= K_{i+1} \end{aligned} \right.$$

Inoltre $\{K_i\}$ ricopre dacché $\{U_i\}$ ricopr.

□

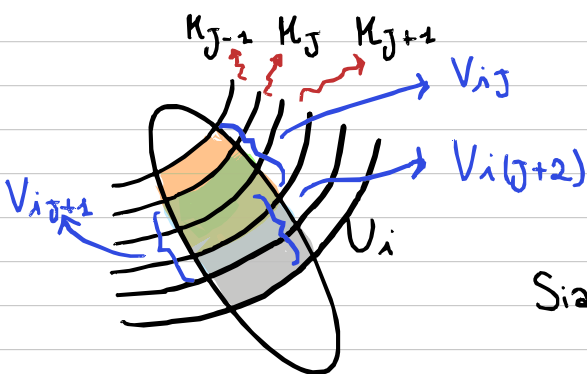
Def. X si dice **PARACOMPATTO** se ogni ricoprimento ap. ammette un raffinamento loc. finito.

$\rightarrow \{V_i\}$ rif. di $\{U_i\}$ se ricopr. ap. e $\forall V_i \exists j + c. V_i \subseteq U_j$

$\rightsquigarrow$ essere paracompatti è un potenziamento dell'essere loc. comp., ma una perdita rispetto alla compattezza.

Prop. X T_2 , loc. comp. e II-mum. $\Rightarrow X$ paracompatto.

Dimm. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricopr. aperto di X . Sia $\{K_j\}_{j \geq 1}$ un'eshaustione di compatti di X ($\rightarrow$ vd. prop. precedente).



L'idea è quella di tagliare ogni U_i sulle "code" dei comp. K_i e poi sfruttarne la comp. X rendere il raffinamento loc. finito. ($K_0, K_{-1} = \emptyset$)

Sia $V_{ij} = \underbrace{(\text{int}(K_{j+1}) \setminus K_{j-1})}_{\text{vogliamo } V_{ij} \text{ ap.}} \cap U_i \subseteq U_i$

Poiché $\{K_i\}_{i \geq 1}$ è un'eshaustione di compatti, $\{V_{ij}\}$ formano un raffinamento di $\{U_i\}$, che però potrebbe non essere loc. finito.

Osserviamo però che, fissata una "corona" $K_j \setminus \text{int}(K_{j-1})$ (→ ossia fissato j) per comp. possiamo scegliere $I_j \subseteq I = \mathbb{N}_{\geq 1}$ finito t.c. $\{V_{ij}\}_{i \in I_j, j \text{ fiss.}}$ ricopra $K_j \setminus \text{int}(K_{j-1})$. $\subseteq K_j$ comp.

Quindi $\{V_{ij}\}_{i \in I_j}$ è il raffinamento cercato. $\square$

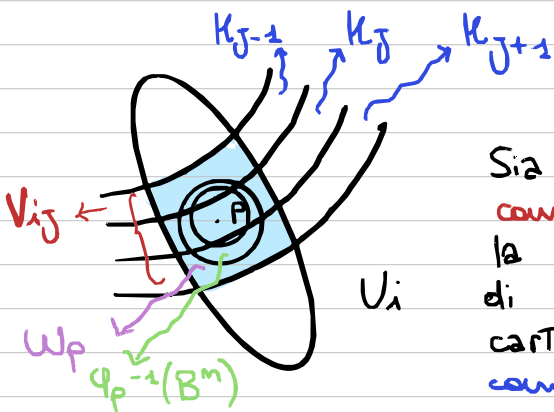
Corollario. Ogni varietà topologica è paracompatta.

Dim. Tramite le carte ogni varietà Top. è loc. comp., mentre è T_2 e II-mum. per def. $\square$

Def. Un **ATLANTE ADEGUATO** A per M è un atlante $\{\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}_i$ è fondam. che sia $\mathbb{R}^m$ per potere utilizzare le funz. a campana!
 • $\{U_i\}_i$ è loc. fin. • $\{\psi_i^{-1}(B^m)\}$ ricopr. M a chiusura comp.

Prop. Ogni ric. ap. $\{U_i\}_i$ di una varietà ammette un atlante adeguato $A = \{\psi_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ t.c. $\{W_i\}_i$ è un raffinam. di $\{U_i\}_i$. (→ atlante subordinato a $\{U_i\}$)

Dim. Adottiamo la dimostrazione della prop. precedente.



Sia $\{K_i\}_{i \geq 1}$ un'esauzione di compatti. ($K_{-1} = K_0 = \emptyset$)

Sia $p \in K_j \setminus \text{int}(K_{j-1})$ (→ chiuso in un comp. ⇒ compatto). Poiché $\{U_i\}_i$ ricopre la varietà, $\exists i$ con $p \in U_i$. A meno di restringimenti sia $\psi_p: W_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ carta con $p \in W_p \subseteq V_{ij}$ (→ def. come prima, $= (\text{int}(K_{j+1}) \setminus K_{j-2}) \cap U_i$).
 → aperto

Bacché $K_j \setminus \text{int}(K_{j-1})$ è compatto bastano un num. fin. di $\psi_p^{-1}(B^m)$, e al variare di p questi forniscono un atlante adeguato. (→ così è loc. fin.!) $\square$
 → al più mi si intersecano i W_p delle corone adiacenti