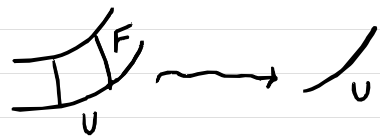
Fibrati

spazio totale
base

generalizza i rivestimenti
con fibra F varietà

Def. $h: M \to N$ liscia è una **FIBRAZIONE** se $\forall p \in N \ \exists U(p)$ detto **APERTO BANALIZZANTE** con $\varphi: h^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ t.c. il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} h^{-1}(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "h"'] & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\ U \end{tikzcd}$$

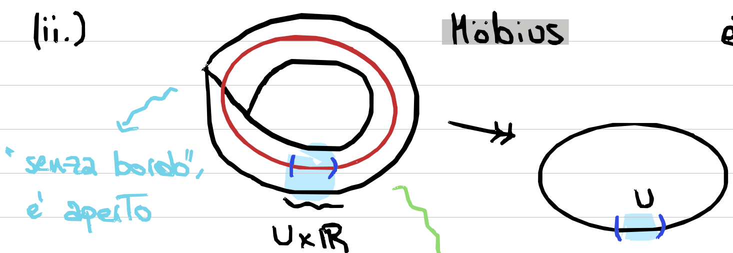


⇝ ricordiamo che $M^m \times N^n$ è varietà $(m+n)$-dimensionale e che $T_{(p,q)} M \times N$ è naturalmente identificato come $T_pM \times T_qN$.

Esempi.

(i.) la proiez. $N \times F \longrightarrow N$ è una fibrazione banale di fibra F.

(ii.)



Möbius è fibrazione di fibra $\mathbb{R}$ non banale

($\to$ Möbius $\not\cong S_1 \times \mathbb{R}$)
non orient. orient.

si formalizza col gr. fondamentale

Def. $h: M \to N$ fibraz. di fibra F. Una **SEZIONE** $s: N \to M$ liscia t.c. $h \circ s = id_N$ ($\to$ un'inversa destra).

Esempio. Se $M = N \times F$, una sezione $s: N \to M$ è del tipo $s(p) = (p, f(p))$ con f liscia.

⇝ una sezione è localm. una funzione liscia "$N \to F$".

Esempio. I rivestimenti lisci sono le fibrazioni con $\dim F = 0$ ($\to F$ discreto).

Un rivestimento non banale non ha sezioni ($\to$ si vede con i gr. fond.) aurei che la mappa ind. sui π_1 è isomorfismo

Esempio. (fibrazione di Hopf). Identif. S^3 in $\mathbb{C}^2$.

Poniamo $\pi : \underset{\text{comp.}}{S^3} \longrightarrow \underset{\text{comp.}}{\mathbb{C}P^1}$, $(z,w) \longmapsto [z,w]$. $\Rightarrow$ fibra compatta

$$\rightsquigarrow \pi^{-1}(p) = \{ (e^{i\theta} z, e^{i\theta} w) \mid \theta \in (0, 2\pi] \} \cong S^1,$$

quindi S^3 è un'unione adeguata di S^1 disgiunti.

Def. Un **FIBRATO VETTORIALE** è di rango k $f : M \to N$ liscia t.c.

(i.) $\forall p \in N$, $f^{-1}(p) = M_p$ ha struttura di sp. vett. reale k-dimensionale.

(ii.) è una fibrazione: $\forall p \in N$ $\exists U(p)$ triv. e $\varphi : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^k$ t.c. commuti:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U \end{tikzcd}$$

e con $\varphi|_{M_q} : M_q \xrightarrow{\sim} \{q\} \times \mathbb{R}^k$ isomorfismo $\forall q \in U(p)$.

Def. M liscia. $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ è detto **FIBRATO TANGENTE** di M con fibrazione:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[d, "\pi"] & T_pM \arrow[d] \\ M & \{p\} \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ dotiamo TM di struttura liscia. Se M ha atlante $A = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$, dotiamo TM dell'atlante:

no prior topology

$\dim TM = 2m$ se $\dim M = m$

$$A_{TM} = \{ \tilde{\varphi}_i : \pi^{-1}(U_i) \to V_i \times \mathbb{R}^m \}$$

raccolta degli sp. Tang. in p.ti di U

con

$$\tilde{\varphi}_i(v) = (\varphi(\pi(v)), d\varphi_{\pi(v)}(v)).$$

($d\varphi_{\pi(v)}$ è iso. $\Rightarrow$ fibrato vettoriale)

Esempio.

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Allora $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_pU$ che si identifica naturalmente con $U \times \mathbb{R}^m$.

$\rightsquigarrow$ in generale, se $M \subseteq \mathbb{R}^m$ posso identificare TM con:

$$\{(p,v) \mid \underbrace{p \in M}_{\subseteq \mathbb{R}^m},\ \underbrace{v \in T_pM}_{\subseteq \mathbb{R}^m}\} \subseteq \mathbb{R}^{2m}.$$

Def. Un **CAMPO VETTORIALE** in M è una sezione del fibrato tangente. ($\rightarrow s(p) \in T_pM \ \forall p$)

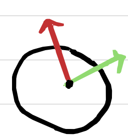
Esempio. $S^{2m-1} \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ con

- $s(\underbrace{x^1, \dots, x^{2m}}_{x}) = (-x^2, x^1, -x^3, x^4, \dots) \in x^\perp$.

$\rightsquigarrow$ s <u>non</u> si annulla mai: S^m è pettinabile per m dispari.

Def. Sia $E \longrightarrow M$ fibrato vett. di rango k. Date $s_1, \dots, s_h$ sezioni, si dice che sono **INDIPENDENTI** se $s_1(p), \dots, s_h(p) \in E_p$ sono indip. $\forall p \in M$.

Se $h = k$, si chiama **FRAME**.



Def. Un **MORFISMO DI FIBRATI** è una coppia (F, f) con $F: E \to E'$, $f: M \to M'$ e $E \xrightarrow{\pi} M$, $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ fibrazioni t.c.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
M \arrow[r, dashed, "f"'] & M'
\end{tikzcd}$$

$$f \circ \pi = \pi' \circ F$$

con $F|_{E_p} : E_p \longrightarrow E'_{f(p)}$ <u>lineare</u>.

Si dice **ISOMORFISMO** se esiste una coppia (F', f') con F' inversa di F, f' inv. di f.

$\rightsquigarrow$ spesso si guarda a morfismi con stessa base e id in basso.

Def. Un fibrato è detto **BANALE** se isomorfo ad un fibrato prodotto. ($\rightsquigarrow M \times \mathbb{R}^k \to M$)

Lemma. $E \longrightarrow F$ è banale se e solo se esiste un frame.

Dim. ($\Rightarrow$) Allora, a meno di isomorfismo, $E = M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow M$ e un frame è $\{e_1, \dots, e_k\}$ costantemente.

($\Leftarrow$) Sia $\{s_1, \dots, s_k\}$ un frame di $E \longrightarrow M$. Costruiamo un isomorfismo con $M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow M$:

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d] \\ M \arrow[r, "id"] & M \end{tikzcd}$$

$$F(p, x) = x^1 s_1(p) + \dots + x^k s_k(p).$$

$\square$

Q. Quando TM è banale? In realtà spesso non lo è.

Esempi.

(i.) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. TU è banalmente $U \times \mathbb{R}^k$ come visto prima.

(ii.) $TS^1 \longrightarrow S^1$ è banale perché $\exists$ campo vett. mai nullo: $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$.

(iii.) TS^{2m} non è banale: $\nexists$ campi vett. mai nulli.

(iv.) TS^3 è banale ($\rightsquigarrow$ per ragioni più profonde, è gruppo di Lie), mentre TS^5 non lo è.

$\rightsquigarrow$ inoltre, M 3-var. orientabile $\Rightarrow TM$ banale.