Esercizi di Istituzioni di Geometria

Anno accademico 2025-26

Studente: Gabriel Antonio Videtta (matricola 654839) – g.videtta1@studenti.unipi.it

Indice dei problemi

Problema 1: Atlanti non compatibili su $\mathbb{R}$ – esercizio 1.1

Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.
(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Soluzione. Siano φ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni continue tali per cui $\varphi(x) = x^3$ e $\psi(x) = \sqrt[3]{x}$. Allora φ è un omeomorfismo con inversa ψ, che però non è diffeomorfismo liscio su (infatti 0 non è regolare, dacché $\varphi'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0 \notin \mathbb{R}^*$).

Considerando allora come atlanti $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{A}' = \{\varphi\}$, questi atlanti non sono compatibili dal momento che la funzione di transizione $\mathrm{id} \circ \varphi = \varphi$ non è liscia.

Tuttavia, $(\mathbb{R}, \mathcal{A}')$ è diffeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ tramite la mappa ϕ, che in carte è letta come l'identità id.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, \mathcal{A}') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[u, bend left, "\psi"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Problema 2: $\varphi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ carta se e solo se diffeomorfismo – esercizio 1.2

Sia $U \subseteq M$ un aperto in una varietà liscia M. Mostra che un omeomorfismo $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Soluzione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Leggendo φ in ogni punto di U tramite le carte φ per U e id per $\mathbb{R}$, otteniamo proprio l'identità, e quindi φ è banalmente un diffeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sia $\psi : V \to Z \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta dell'atlante massimale di M con $U \cap V \neq \varnothing$ e mostriamo che φ e ψ sono compatibili mostrando che la funzione di transizione $[\psi \to \varphi]$ è un diffeomorfismo.

Essendo diffeomorfismo, ϕ si legge tramite le carte ψ per $U \cap V$ e id per $\varphi(U \cap V)$ proprio come la funzione di transizione $[\psi \to \varphi]$, che quindi è diffeomorfismo in quanto uguale a $\mathrm{id}|_{\varphi(U\cap V)} \circ \varphi|_{U\cap V} \circ \psi^{-1}|_{\psi(U\cap V)}$, composizione di diffeomorfismi.

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \varphi(U \cap V) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \psi(U \cap V) \arrow[r, "{[\psi\to\varphi]}"'] & \varphi(U \cap V) \end{tikzcd}$$

Problema 3: S^2 è diffeomorfo a $\mathbb{CP}^1$– esercizio 1.4

Mostra che la funzione costruita a lezione $S^2 \to \mathbb{CP}^1$ è un diffeomorfismo.

Soluzione. Ricordiamo che la funzione costruita era $\gamma : S^2 \to \mathbb{CP}^1$ per cui, posto $N = (0, 0, 1)$, vale:

$$\gamma(P) = \begin{cases} [1, 0] & \text{se } P = N, \\ [\pi_N(P), 1] & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\pi_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ è la proiezione stereografica da $S^2 \setminus \{N\}$ a $\mathbb{C}$ (identificato come $\mathbb{R}^2$).

Sia $U_i = \{[z_0, z_1] \mid z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{CP}^1$ e $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ la carta affine con $\varphi_0([z_0, z_1]) = {}^{z_1}/_{z_0}$ e $\varphi_1([z_0, z_1]) = {}^{z_0}/_{z_1}$. Sia $S = (0, 0, -1)$ il punto diametralmente opposto a N su S^2.

Se $P \in S^2 \setminus \{N\}$, possiamo leggere in carte γ come l'identità $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (che è diffeomorfismo) come segue:

$$\begin{tikzcd} S^2 \setminus \{N\} \ni P \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi_N"] & U_1 \subseteq \mathbb{CP}^1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Se invece $P = N$, possiamo leggere in carte γ come il complesso coniugato $z \mapsto \overline{z}$ (che è diffeomorfismo) come segue:

$$\begin{tikzcd}
S^2 \setminus \{S\} \ni N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi_S"] & U_0 \subseteq \mathbb{CP}^1 \arrow[d, "\varphi_0"] \\
\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\overline{z}"] & \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

dove si è usato che $\pi_N \circ \pi_S^{-1}$ corrisponde a $1/\overline{z}$.