Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

10 maggio 2023

Quadriche e classificazione affine delle coniche

Il documento è quasi del tutto completo. In particolare manca la dimostrazione della classificazione delle coniche reali, ancora in corso d'opera.

Nota. Si assume che, nel corso del documento, valga che $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

Definizione (quadriche)**.** Si dice **quadrica** il luogo di zeri di un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ con $\deg p = 2$.

Definizione (coniche)**.** Si dice **conica** una quadrica relativa ad un polinomio in due variabili.

Osservazione.
▶ Una quadrica è invariante per la relazione $\sim$ su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, dove $p_1 \sim p_2 \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \alpha \in \mathbb{K}^* \mid p_1 = \alpha p_2$. Infatti il luogo di zeri di un polinomio non varia se esso viene moltiplicato per una costante non nulla di $\mathbb{K}$.
▶ Una quadrica può essere vuota (come nel caso della conica relativa a $x^2 + y^2 + 1$ in $\mathbb{R}$).
▶ Si identifica con la notazione $p(\underline{x})$ con $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$, la valutazione del polinomio p nelle coordinate di $\underline{x}$. Per esempio, se $\underline{x} = (1, 2)$ e $p(x, y) = x^2 + y^2$, con $p(\underline{x})$ si identifica il valore $p(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$.

Osservazione (riscrittura di p mediante matrici)**.** Sia $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di grado due. Allora p si può sempre scrivere come $p_2 + p_1 + p_0$, dove p_i è un polinomio omogeneo contenente soltanto monomi di grado i.

In particolare, $p_2(x_1, \ldots, x_n)$ può essere sempre riscritto come $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $a_{ij} = a_{ji}$. È infatti sufficiente "sdoppiare" il coefficiente c_{ij} di $x_i x_j$ in due metà, in modo tale che $c_{ij} x_i x_j = \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j + \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j = \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j + \frac{c_{ij}}{2} x_j x_i$. Inoltre, anche $p_1(x_1, \ldots, x_n)$ può essere riscritto come $\sum_{i=1}^n b_{ij}$.

Si possono allora considerare la matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ ed il vettore $\underline{b} \in \mathbb{K}^n$, definiti in modo tale che:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1-n}, \qquad \underline{b} = (b_i)_{i=1-n} \in \mathbb{K}^n.$$

Infatti, A e $\underline{b}$ soddisfano la seguente identità:

$$p(\underline{x}) = \underline{x}^\top A \underline{x} + \underline{b}^\top \underline{x} + c,$$

che, riscritta tramite l'identificazione di $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ come l'iperpiano $H_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K})$, diventa:

$$p(\underline{x}) = \underline{\hat{x}}^\top \hat{A} \underline{\hat{x}}, \quad \text{dove } \hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b}/2 \\ \hline \underline{b}^\top/2 & c \end{array}\right).$$

Si osserva che $\hat{A}$ è una matrice simmetrica di taglia $n+1$ a elementi in $\mathbb{K}$, e in quanto tale essa induce un prodotto scalare su $\mathbb{K}^{n+1}$. Pertanto la quadrica relativa p è esattamente l'intersezione tra H_{n+1} e $\mathrm{CI}(\hat{A})$, identificando $\mathbb{K}^{n+1}$ come H_{n+1}, ossia la quadrica è esattamente $\iota^{-1}(H_{n+1} \cap \mathrm{CI}(\hat{A}))$.

Definizione (matrice associata ad una quadrica)**.** Si definisce la costruzione appena fatta di $\hat{A}$ come la **matrice associata alla quadrica relativa a** p, e si indica con $\mathcal{M}(p)$. In particolare, A è detta la matrice che rappresenta la *parte quadratica*, e si indica con $\mathcal{A}(p)$, mentre $\underline{b}/2$ rappresenta la *parte lineare*, indicata con $\mathcal{L}(p)$, e $c = c(p)$ è detto *termine noto*.

Definizione (azione di $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$)**.** Sia $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$. Allora $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ agisce (a destra) su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ in modo tale che $p' = p \circ f$ è un polinomio per cui $p'(\underline{x}) = p(f(\underline{x}))$.

Definizione (equivalenza affine tra polinomi e quadriche)**.** Si dice che due polinomi $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sono affinemente equivalenti se e solo se $\exists\, f \in A(\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})) \mid p_1 = p_2 \circ f$. In tal caso si scrive che $p_1 \sim p_2$. Analogamente due quadriche si dicono affinemente equivalenti se i relativi polinomi sono affinemente equivalenti.

Osservazione.
▶ L'equivalenza affine è una relazione di equivalenza.
▶ Sia $Z(p)$ il luogo di zeri di p. Allora, $p_1 \sim p_2 \implies \exists\, f \in A(\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})) \mid Z(p_2) = f(Z(p_1))$.
▶ In generale, se $p_1 = p_2 \circ f$, vale che $Z(p_2) = f(Z(p_1))$.
▶ Dal momento che $A(\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}))$ su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è un azione (destra) di gruppo, vale che $(p \circ f_1) \circ f_2 = p \circ (f_1 \circ f_2)\ \forall\, f_1,\ f_2 \in A(\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}))$, $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposizione (formula del cambiamento della matrice associata su azione di $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$)**.** Sia $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ e sia $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di grado due. Allora vale la seguente identità:

$$\mathcal{M}(p \circ f) = \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M^\top \mathcal{A}(p) M & M^\top(\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p)) \\ \hline \left(M^\top(\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p))\right)^\top & p(\underline{t}) \end{array}\right),$$

con $\hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, dove $f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}\ \forall\, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ con $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e $\underline{t} \in \mathbb{K}^n$.

Dimostrazione. Per definizione, $p \circ f$ è tale che $(p \circ f)(\underline{x}) = p(f(\underline{x})) = p(M\underline{x} + \underline{t})$. In particolare, $(p \circ f)(\underline{x}) = (\widehat{M\underline{x} + \underline{t}})^\top \mathcal{M}(p) (\widehat{M\underline{x} + \underline{t}}) = \left(\hat{M}\hat{x}\right)^\top \mathcal{M}(p) \left(\hat{M}\hat{x}\right)$. Pertanto vale che:

$$(p \circ f)(\underline{x}) = \hat{x}^\top \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M} \hat{x} \implies \mathcal{M}(p \circ f) = \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M},$$

da cui la tesi. □

Osservazione.
► Per la proposizione precedente, due matrici, associate a due polinomi di secondo grado affinemente equivalenti, variano per congruenza, così come le matrici della parte quadratica.

Pertanto $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p \circ f)) = \operatorname{rg}(\mathcal{M}(p))$, come $\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p \circ f)) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}(p))$ (così come, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, non variano i segni dei vari determinanti). Allo stesso tempo, la classe di equivalenza di $\mathcal{M}(p)$ è rappresentata completamente per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (tramite il rango) e per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (tramite la segnatura), per il teorema di Sylvester.

► Se f è una traslazione, $M = I_n$, e dunque la formula si riduce alla seguente:

$$\mathcal{M}(p \circ f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(p) & \mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p) \\ \hline (\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p))^\top & p(\underline{t}) \end{array}\right).$$

In particolare, non varia la matrice relativa alla parte quadratica, ossia vale che $\mathcal{A}(p \circ f) = \mathcal{A}(p)$.

► Se $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\mathcal{M}(\lambda p) = \lambda \mathcal{M}(p)$, dal momento che $\mathcal{A}(\lambda p) = \lambda \mathcal{A}(p)$, così come $\mathcal{L}(\lambda p) = \lambda \mathcal{L}(p)$ e $c(\lambda p) = \lambda c(p)$. Tuttavia, a differenza del cambio di matrice per equivalenza affine, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la segnatura non è più un invariante (infatti, in generale $\sigma(-S) = (\iota_-(S), \iota_+(S), \iota_0(S))$, se $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$). Ciononostante non varia, in valore assoluto, la differenza tra l'indice di positività e quello di negatività, ossia $S(\mathcal{M}(p)) := |\iota_+ - \iota_-|$ continua ad essere invariante.

► Vale sempre la disuguaglianza $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) \geq \operatorname{rg}(\mathcal{A}(p)) \geq 1$, dal momento che $\mathcal{A}(p)$ è una sottomatrice di $\mathcal{M}(p)$ e che p, per definizione di quadrica, contiene sempre un termine quadratico (e dunque la matrice $\mathcal{A}(p)$ non è mai nulla).

Definizione (quadrica non degenere)**.** Una quadrica relativa a $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si dice **non degenere** se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = n + 1$ (ossia se $\det(\mathcal{M}(p)) \neq 0$), e altrimenti si dice degenere. In particolare, una conica si dice *non degenere* se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ e degenere altrimenti.

Definizione (quadrica a centro)**.** Una quadrica C relativa a $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (o p stesso) si dice **a centro** se $\exists\, \underline{x_0} \in \mathbb{K}^n \mid p(\underline{x_0} + \underline{x}) = p(\underline{x_0} - \underline{x})\ \forall\, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$. In particolare, si dice che tale $\underline{x_0}$ è un **centro di simmetria** per C.

Osservazione.
► Si osserva che $\underline{0}$ è un centro di simmetria per p se $p(\underline{x}) = p(-\underline{x})$, ossia se e solo se la parte lineare $\mathcal{L}(p)$ è nulla.

► Allora $\underline{x_0}$ è un centro di simmetria per p se e solo se $\underline{0}$ è un centro di simmetria per $p \circ f$, dove f è la traslazione che manda $\underline{0}$ in $\underline{x_0}$. Infatti, in tal caso, vale che $f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{x_0}$ e che:

$$(p \circ f)(\underline{x}) = p(\underline{x} + \underline{x_0}) = p(\underline{x} - \underline{x_0}) = (p \circ f)(-\underline{x}).$$

► Per le osservazioni precedenti, vale allora che $\underline{x_0}$ è un centro di simmetria per p se e solo se la parte lineare di $p \circ f$ è nulla, ossia se e solo se $\underline{x_0}$ è tale che $\mathcal{A}(p)\underline{x_0} + \mathcal{L}(p)$. Pertanto p è a centro se e solo se il sistema

$\mathcal{A}(p)\underline{x} = -\mathcal{L}(p)$ è risolvibile, e quindi se e solo se $\operatorname{rg}\left(\mathcal{A}(p) \;\middle|\; \mathcal{L}(p)\right) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}(p)) \iff \mathcal{L}(p) \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}(p))$, per il teorema di Rouché-Capelli. Vale dunque che p è sempre a centro, se $\mathcal{A}(p)$ è invertibile.

Poiché i centri di una conica sono esattamente le soluzioni del sistema lineare $\mathcal{A}(p)\underline{x} = -\mathcal{L}(p)$, essi formano un sottospazio affine. In particolare, se $\underline{x}_0$ è un centro, vale che tale sottospazio è esattamente $\underline{x}_0 + \operatorname{Ker} \mathcal{A}(p)$. Pertanto, se $\mathcal{A}(p)$ è invertibile (ossia se è iniettiva), il centro è unico.

Teorema (classificazione delle coniche complesse)**.** Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Allora ogni conica è affinemente equivalente ad un'equazione canonica della seguente tabella, unicamente determinata dagli invarianti $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p))$ e $\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p))$.

	$\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p))$	$\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p))$	Equazione canonica	A centro
$\mathcal{C}_1$	3	2	$x^2 + y^2 = 1$	Sì
$\mathcal{C}_2$	3	1	$x^2 = y$	No
$\mathcal{C}_3$	2	2	$x^2 + y^2 = 0$	Sì
$\mathcal{C}_4$	2	1	$x^2 = 1$	Sì
$\mathcal{C}_5$	1	1	$x^2 = 0$	Sì

Dimostrazione. La classificazione è completa perché sono comprese tutte le possibili scelte di rango. Inoltre tale classificazione è ben definita, dal momento che due coniche distinte della tabella differiscono di almeno un'invariante, e pertanto non possono essere affinemente equivalenti. Pertanto, se esiste, una conica è affinemente equivalente ad una sola delle coniche presenti nella tabella.

Sia allora $\mathcal{C}$ una conica relativa al polinomio $p \in \mathbb{C}[x, y]$. Se $\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p)) = 2$, allora, per il teorema di Sylvester complesso, esiste una matrice $M \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{C})$ tale per cui $M^\top \mathcal{A}(p) M = I_2$.

Si consideri allora l'affinità $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale per cui $f_1(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$, dove $\underline{t} = -\mathcal{A}(p)^{-1}\underline{b}$. Se $p_1 = p \circ f_1$, allora, per la formula di cambiamento della matrice associata, vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p \circ f_1) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & p(\underline{t}) \end{array}\right).$$

Se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$, $c(p_1) = p(\underline{t})$ è nullo (altrimenti i ranghi di $\mathcal{M}(p)$ e $\mathcal{M}(p_1)$ sarebbero diversi; assurdo, dal momento che il rango di $\mathcal{M}(p)$ è invariante per equivalenza affine, $\lightning$). In tal caso p_1 è il polinomio $x^2 + y^2$, e dunque $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}_3$ tramite l'identità $p_1 = p \circ f_1$.

Se invece $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$, $c' := c(p_1)$ non è nullo, e dunque p_1 è il polinomio $x^2 + y^2 + c'$. Considerando allora $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale che $f_2(\underline{x}) = \sqrt{-c'}\,\underline{x}$, si ottiene che $p_2 = p_1 \circ f_2$ è tale per cui:

$$\mathcal{M}(p_2) = -c' \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right),$$

ossia p_2 è il polinomio $c'(x^2+y^2-1)=0$. Poiché c' è diverso da zero, p_2 ha lo stesso luogo di zeri di x^2+y^2-1, ossia p_2 è legato alla conica $\mathcal{C}_1$. Si conclude dunque che p e p_2 sono affinemente equivalenti tramite l'identità $p_2 = p \circ (f_1 \circ f_2)$.

Sia ora invece $\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p)) = 1$. Allora, sempre per il teorema di Sylvester complesso, esiste $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ tale per cui:

$$B := M^\top \mathcal{A}(p) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri allora l'affinità $f_1 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale per cui $f_1(\underline{x}) = M\underline{x}$. Allora, se $p_1 = p \circ f_1$, vale che:

$$\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p \circ f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c(p) \end{pmatrix},$$

dove $(b_1, b_2)^\top = M^\top \mathcal{L}(p)$. Se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$, b_2 è necessariamente non nullo (altrimenti $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p \circ f_1)) \leq 2$, $\lightning$). Si consideri allora l'affinità $f_2 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale che $f_2(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{t}_1$, dove $\underline{t}_1 = (-b_1, 0)^\top$. Allora, se $p_2 = p_1 \circ f_2$, vale che:

$$\mathcal{M}(p_2) = \mathcal{M}(p_1 \circ f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & c' \end{pmatrix},$$

dove $c' := p_1(\underline{t}_1)$. Pertanto p_2 è il polinomio $x^2 + 2b_2 y + c'$. Si cerca adesso di eliminare il termine noto considerando una traslazione di vettore $\underline{t}_2$ in modo tale che $p_2(\underline{t}_2) = 0$ e che rimanga invariata la parte lineare. Se $\underline{t}_2 = (x', y')^\top$, si considera $x' = 0$ in modo tale da lasciare invariata la parte lineare e si cerca y' in modo tale che:

$$2b_2 y' + c' = 0 \implies y' = -\frac{c'}{2b_2}.$$

Sia dunque $f_3 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale che $f_3(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}_3$. Se $p_3 = p_2 \circ f_3$, vale allora che:

$$\mathcal{M}(p_3) = \mathcal{M}(p_2 \circ f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto p_3 è il polinomio $x^2 + 2b_2 y$. Sostituendo allora $y \mapsto -y/2b_2$, si può normalizzare il coefficiente di y. Si considera allora $f_4 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale che:

$$f_4(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -y/2b_2 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Se si pone allora $p_4 = p_3 \circ f_4$, si ottiene finalmente che:

$$\mathcal{M}(p_4) = \mathcal{M}(p_3 \circ f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

e dunque p_4 rappresenta il polinomio $x^2 - y$, legato alla conica $\mathcal{C}_2$. Si conclude dunque che $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}_2$ tramite l'identità $p_4 = p \circ (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)$.

Se invece $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) \leq 2$, b_2 è necessariamente nullo (altrimenti $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p \circ f_1)) = 3$, $\lightning$). Si cerca adesso una traslazione di vettore $\underline{t} = (t_1, t_2)^\top$ tale che annulli la parte lineare del polinomio, ossia un vettore per cui $\mathcal{A}(p_1)\underline{t} + (b_1, 0)^\top = \underline{0}$. Un vettore di questo tipo è $\underline{t} = (-b_1, 0)^\top$.

Sia allora $f_2 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C})$ per cui $f_2(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$, e sia $p_2 = p_1 \circ f_2$. Vale allora che:

$$\mathcal{M}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix},$$

dove $c' := p_1(\underline{t})$. Se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 1$, c' è necessariamente nullo (altrimenti $\mathcal{M}(p_2)$ non sarebbe congruente a $\mathcal{M}(p)$, $\lightning$), e dunque p_2 è il polinomio $x^2 = 0$, legato alla conica $\mathcal{C}_5$ (quindi $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}_5$ tramite l'identità $p_2 = p \circ (f_1 \circ f_2)$).

Altrimenti, se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 2$, $c' \neq 0$. Sia allora $f_3 \in A(\mathcal{A}_2(\mathbb{C}))$ tale che:

$$f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{-c'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Se $p_3 = p_2 \circ f_3$, allora risulta che:

$$\mathcal{M}(p_3) = \mathcal{M}(p_2 \circ f_3) = -c' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e dunque p_3 è il polinomio $-c'(x^2-1)$. Poiché $c' \neq 0$, p_3 ha lo stesso luogo di zeri di x^2-1, e dunque è legato alla conica $\mathcal{C}_4$. Allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}_4$ mediante l'identità $p_3 = p \circ (f_1 \circ f_2 \circ f_3)$, concludendo la classificazione delle coniche complesse. $\square$

Teorema (classificazione delle coniche reali)**.** Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora ogni conica è affinemente equivalente ad un'equazione canonica della seguente tabella, unicamente determinata dagli invarianti $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p))$, $\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p))$, $S(\mathcal{M}(p)) := |\iota_+(\mathcal{M}(p)) - \iota_-(\mathcal{M}(p))|$ e $S(\mathcal{A}(p)) := |\iota_+(\mathcal{A}(p)) - \iota_-(\mathcal{A}(p))|$.

	$\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p))$	$\operatorname{rg}(\mathcal{A}(p))$	$S(\mathcal{M}(p))$	$S(\mathcal{A}(p))$	Equazione canonica
ellisse ($\mathcal{C}_1$)	3	2	1	2	$x^2+y^2-1=0$
iperbole ($\mathcal{C}_2$)	3	2	1	0	$x^2-y^2-1=0$
parabola ($\mathcal{C}_3$)	3	1	1	1	$x^2-y=0$
due rette reali incidenti ($\mathcal{C}_4$)	2	2	0	0	$x^2-y^2=0$
due rette reali parallele ($\mathcal{C}_5$)	2	1	0	1	$x^2-1=0$
due rette reali coincidenti ($\mathcal{C}_6$)	1	1	1	1	$x^2=0$
ellisse immaginaria ($\mathcal{C}_7$)	3	2	3	2	$x^2+y^2+1=0$
due rette complesse coniugate e incidenti in un punto reale ($\mathcal{C}_8$)	2	2	2	2	$x^2+y^2=0$
due rette complesse coniugate, distinte e parallele ($\mathcal{C}_9$)	2	1	2	1	$x^2+1=0$

Dimostrazione. Come già visto precedentemente, la classificazione è completa perché sono comprese tutte le possibili scelte di invarianti, ed è anche ben definita, dacché due coniche distinte della tabella differiscono di almeno un'invariante. [TODO] $\square$