

Teoria del corso di
Geometria e topologia differenziale

A cura di Gabriel Antonio Videtta¹
g.videtta1@studenti.unipi.it

Testo basato sul contenuto del corso del prof. Lisca
tenutosi presso l'Università di Pisa.

A.A. 2025-2026

¹Basato su un layout di Luca Lombardo e di Francesco Sorce.

Indice

Notazioni impiegate	3	2 Teoria delle superfici	12
Algebra lineare	3	2.1 Definizioni preliminari	12
Analisi matematica	3	2.1.1 Parametizzazioni regolare	12
Geometria differenziale delle curve e delle superfici	3	2.1.2 Superficie	12
Teoria della misura	4	2.2 Classi fondamentali di superfici	12
Teoria delle varietà	4	2.2.1 Superfici di rotazione	12
Topologia	4	2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello	13
Prerequisiti matematici	6	2.3 Piano tangente e orientabilità	13
Algebra lineare	6	2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse	13
Analisi matematica	6	2.3.2 Versori normali e orientabilità	13
Teoria della misura	6	3 Curve su superfici	15
1 Teoria delle curve	7	3.1 Piano tangente e derivata direzionale	15
1.1 Definizioni preliminari	7	3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare	15
1.1.1 Curve, tracce e velocità	7	3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve	15
1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica	7	3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale	15
1.2 (Ri)parametizzazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a.	7	3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale	15
1.2.1 Riparametrizzazione e prime proprietà	7	3.2.1 Operatore forma e prime proprietà	15
1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco	7	3.2.2 I e II forma fondamentale	16
1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.)	8	3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale	16
1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva	8	3.2.4 Direzioni e curvature principali, formula di Eulero	17
1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale	8	3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti	18
1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet	8	3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium	18
1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametizzazioni p.l.a. di una stessa curva	9	3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche	18
1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale)	9	3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze	19
1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.	9	3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali	19
1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale	10	3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante	19
1.5 Proprietà di curvatura e torsione	10	3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo	19
1.5.1 Torsione e piano osculatore	10	3.5 Geodetiche	20
1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore	11	3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo	20
1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve	11	3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale	20
		3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze	21
		3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione	21
		3.5.5 Curvatura geodetica	22
		3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet	22
		3.6.1 Prime definizioni	22
		3.6.2 Regione di una superficie e area	22
		3.6.3 Integrazione rispetto a una regione	22
		3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario	23
		3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione	23

3.6.6	Teorema di Radó e caratteristica di Eulero	23	4.7.3	Passaggio per omotopia e buona definizione del grado intero di una mappa	39
3.6.7	Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse	23	4.7.4	Grado di z^k , delle riflessioni e della mappa antipodale su S^1	40
4	Varietà e teoria del grado	25	4.7.5	Campi vettoriali tangenti su S^n e pettinabilità	41
4.1	Varietà differenziabili e prime definizioni . . .	25	4.8	Indici di campi vettoriali su aperti di $\mathbb{R}^m$. .	41
4.1.1	Mappe C^∞ e diffeomorfismi	25	4.8.1	Zero isolato e indice di un campo in uno zero	41
4.1.2	Varietà differenziabili, varietà chiuse, carte, atlanti, parametrizzazioni locali e funzioni di transizione	25	4.8.2	Lemma di Hopf e teorema fondamentale dell'algebra	42
4.1.3	Prodotto di varietà	26	4.9	Campi vettoriali su varietà	43
4.2	Spazio tangente e differenziale su mappe tra varietà	26	4.9.1	Indice di un campo vettoriale tangente su una varietà	43
4.2.1	Differenziale su aperti di $\mathbb{R}^n$	26	4.9.2	Simplessi e caratteristica di Eulero . .	43
4.2.2	Spazio tangente in un punto di una varietà	26	4.9.3	Teorema di Poincaré-Hopf	43
4.2.3	Differenziale per mappe lisce tra varietà	27			
4.3	Valori regolari e critici	27			
4.3.1	Prime definizioni	27			
4.3.2	Teorema di invertibilità locale per varietà e lemma della pila di dischi . .	28			
4.3.3	Misura nulla e teoremi di Sard e Brown	28			
4.3.4	Varietà a partire da valori regolari . .	29			
4.4	Varietà con bordo	30			
4.4.1	Semispazio superiore e varietà con bordo	30			
4.4.2	Proprietà del bordo di una varietà con bordo	30			
4.4.3	Differenziale e spazio tangente su varietà con bordo	30			
4.4.4	Varietà con bordo da valori regolari .	31			
4.4.5	Classificazione delle 1-varietà, lemma di non retrazione sul bordo e teorema del punto fisso di Brouwer	32			
4.5	Teoria del grado modulo 2	33			
4.5.1	Omotopie C^∞	33			
4.5.2	Isotopie e lemma di omogeneità	33			
4.5.3	Grado modulo 2 e buona definizione .	34			
4.6	Varietà orientate	35			
4.6.1	Orientazione di basi su spazi vettoriali, orientazione canonica di $\mathbb{R}^n$	35			
4.6.2	Orientazione su prodotti di spazi vettoriali	35			
4.6.3	Orientazione su varietà e prime proprietà	35			
4.6.4	Orientabilità di m -varietà immerse in $\mathbb{R}^m$	36			
4.6.5	Orientazione nel prodotto di due varietà orientate	37			
4.6.6	Semispazio interno o esterno	37			
4.6.7	Orientazione sul bordo della varietà .	37			
4.7	Teoria del grado su $\mathbb{Z}$	38			
4.7.1	Grado intero rispetto a un valore regolare	38			
4.7.2	Grado di una mappa estendibile dal bordo	38			

Notazioni impiegate

Cercheremo di impiegare caratteri latini (x, y, z) per indicare quantità reali; caratteri latini sottolineati $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ per indicare vettori o campi vettoriali; caratteri greci minuscoli (α, β, γ) per indicare curve; e caratteri greci maiuscoli (Σ) per indicare superfici.

Algebra lineare

- rk – rango di un'applicazione lineare o di una matrice.
- $M(n)$ – matrici $n \times n$ a elementi reali.
- $S(n)$ – matrici simmetriche $n \times n$ a elementi reali.

Analisi matematica

- $\{f \text{ op } a\}$ – data una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a valori reali, $\{f \text{ op } a\}$ denota l'insieme $\{x \in X \mid f(x) \text{ op } a\}$, dove $a \in \mathbb{R}$.
- $f \times g$ – date due funzioni $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow D$, la funzione $f \times g : (A \times B) \rightarrow (C \times D)$ è definita in modo tale che $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$.
- $f|_A$ – restrizione di una funzione f al sottinsieme A del dominio.
- f_i – nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la proiezione di f sulla i -esima coordinata, ovvero $\pi_i \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\frac{df}{dt}(x)$, $f'(x)$, $\dot{f}$ – derivata di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nel caso $n > 1$, coincide con il vettore $(f_i'(t))_i$. La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- $\partial_{x_i} f(\underline{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$, $f_{x_i}(\underline{x})$ – derivata parziale nella i -esima coordinata di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $\underline{x}$. La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- x_i – derivate parziali nella i -esima coordinata di un campo $\underline{x}$ da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, ovvero $((x_1)_i, \dots, (x_m)_i)^\top$.
- $\nabla f(\underline{x})$, $\nabla f_{\underline{x}}$ – gradiente di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ovvero il vettore $(\partial_{x_i} f(\underline{x}))_i^\top$.
- $Jf(\underline{x})$, $Jf_{\underline{x}}$ – jacobiano di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nel punto $\underline{x}$, ovvero la matrice $(\partial_{x_j} f_i(\underline{x}))_{i,j} = (\nabla f_i(\underline{x}))_i$.

- $J_{\underline{y}} f(\underline{p})$ – nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la sottomatrice $n \times n$ quadrata di $Jf(\underline{p})$ date dalle ultime n colonne. Coincide con $J(\pi_{\mathbb{R}^n} \circ f)(\underline{p})$.
- C^n – classe delle funzioni dotate di derivate parziali continue fino all'ordine n . Per $n = 0$, coincide con la classe delle funzioni continue (C^0).
- C^∞ , liscio – classe delle funzioni derivabili parzialmente per un numero arbitrario di volte con continuità.
- diffeomorfismo di classe C^k – funzione di classe C^k con inversa di classe C^k .

Geometria differenziale delle curve e delle superfici

- $B_R(P, \mathbb{R}^n)$, $B_R(P)$ – la palla n -dimensionale di raggio R e centro P . Ometteremo $\mathbb{R}^n$ quando la dimensione si deduce dal contesto.
- $S_a^i(P)$ – l'ipersfera i -dimensionale di raggio a e centro P , ovvero $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{i+1} \mid \|\underline{x} - P\| = a\}$.
- $\mathbb{T}_{a,b}$ – toro di raggio maggiore a e raggio minore b .
- $\ell(\alpha)$ – lunghezza di una curva α .
- p.l.a. – parametrizzata a lunghezza d'arco, ovvero con velocità unitaria.
- κ_α – curvatura di una curva α in un punto.
- τ_α – torsione di una curva α in un punto.
- T_α – versore tangente di una curva regolare in un punto.
- N_α – versore normale di una curva di Frenet in un punto.
- B_α – versore binormale di una curva di Frenet in un punto.
- Π_α – piano osculatore di α in un punto.
- R_α – raggio di curvatura di α in un punto.
- $T_P \Sigma$ – piano tangente di P rispetto a Σ .
- $\underline{n}$, $n_{\underline{x}}$ – (versore) normale (eventualmente locale) di una superficie o di una parametrizzazione regolare.

- $D_\xi f(P)$ – derivata direzionale con direzione ξ della funzione f nel punto P di una superficie.
- S_P – operatore forma nel punto P di una superficie.
- I_P – I forma fondamentale nel punto P di una superficie.
- II_P – II forma fondamentale nel punto P di una superficie.
- E, F, G – elementi della rappresentazione matriciale della I forma fondamentale: $I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.
- ℓ, m, n – elementi della rappresentazione matriciale della II forma fondamentale: $II_P = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$.
- a, b, c, d – elementi della rappresentazione matriciale dell'operatore forma: $S_P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
- κ_n – curvatura normale di una superficie in un punto P secondo un dato vettore unitario.
- $\kappa_{\alpha,n}$ – curvatura normale di α rispetto a una superficie.
- κ_1, κ_2 – curvature principali di una superficie in un punto.
- κ – curvatura gaussiana di una superficie in un punto.
- H – curvatura media di una superficie in un punto.
- Γ_{ij}^k – simbolo di Christoffel, ovverosia coefficiente di $\underline{x}_k$ in $\underline{x}_{ij}$.
- $\nabla_v X(P)$ – derivata covariante di un campo vettoriale X tangente alla superficie Σ in direzione v nel punto P .
- $(\cdot)^\top$ – proiezione di $\cdot$ sul piano tangente $T_P \Sigma$.
- γ_v – geodetica locale di direzione v .
- U_P – intorno di definizione della mappa esponenziale in un punto P .
- $\exp_P$ – mappa esponenziale in un punto P .
- v_k – data una base ortonormale $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, la mappa $t \mapsto k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2)$.
- N_P – intorno normale di un punto P .
- $\varphi(\gamma(t))$ – angolo tra la curva γ e il parallelo di $\gamma(t)$ al tempo t .
- $r(\gamma(t))$ – distanza di $\gamma(t)$ dall'asse di rotazione.
- $k_{\alpha,g}$ – curvatura geodetica di una curva α rispetto a una superficie Σ .
- $A(R)$ – area di una regione R di una superficie Σ .
- $\int_R \varphi dA$ – integrazione rispetto all'area in una regione R , equivalente a $\int_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv$.

- ε_i – angolo esterno i -esimo di una regione o superficie con bordo.
- ι_i – angolo interno i -esimo di una regione o superficie con bordo.
- $\partial \Sigma$ – bordo di una superficie con bordo, come unione delle tracce delle regioni con cui è definita per differenza.
- $\chi(\Sigma)$ – caratteristica di Eulero di una superficie con bordo.

Teoria della misura

- vol – applicazione per calcolare il volume di un rettangolo in $\mathbb{R}^n$; tale per cui $\text{vol}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_i (b_i - a_i)$.
- m – misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.

Teoria delle varietà

- $\dim M$ – dimensione di una varietà M .
- $(f, W \cap M)$ – carta locale di una varietà M ; si sottintende che W sia un aperto dello spazio ambiente in cui è contenuto M e che f sia un diffeomorfismo con dominio $W \cap M$ verso un aperto di $\mathbb{R}^{\dim M}$.
- $T_x M$ – spazio tangente di un punto x di una varietà M .
- df_x – differenziale di una mappa liscia $f : M \rightarrow N$ tra varietà nel punto x .
- $\text{crit}(f)$ – insieme dei punti critici di una mappa liscia $f : M \rightarrow N$ tra varietà.
- S^n – sfera n -dimensionale reale, ovverosia $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\underline{x}\| = 1\}$.
- D^n – disco n -dimensionale reale, ovverosia $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$.
- H^n – semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$.
- ∂H^n – bordo del semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$, ovverosia $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$.
- ∂M – bordo di una varietà bordata M .

Topologia

- II-numerabile – spazio topologico che ammette una base numerabile.
- T1 – spazio topologico i cui singoletti sono insiemi chiusi.
- T2 – spazio topologico per cui due punti distinti ammettono l'esistenza di una coppia di intorni disgiunti.

- $\overline{X}$ – chiusura di un insieme.
- $\text{int}(X)$ – parte interna di un insieme.
- ∂X – frontiera di un insieme, ovverosia $\overline{X} \setminus \text{int}(X)$.

Prerequisiti matematici

Algebra lineare

- **Caratterizzazione del rango di una matrice** – Sia $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice. Allora $\text{rk}(M) = k$ se e solo se i minori di taglia superiore a k in M hanno tutti determinante nullo ed esiste un minore di taglia k con determinante non nullo.

Analisi matematica

- **Teorema di Schwarz** – Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che ammette derivate seconde miste continue in $\underline{x}$. Allora $\partial_{x_i x_j} f(\underline{x}) = \partial_{x_j x_i} f(\underline{x})$ per ogni variabile x_i, x_j .
- **Teorema della funzione implicita** – Sia U un aperto di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Sia $\underline{p} = (x_0, y_0)$ un punto in U con $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{a}$ e $J_{\underline{y}} f(\underline{p})$ invertibile.

Allora esiste un intorno $A = I_{\underline{x}} \times I_{\underline{y}}$ di $\underline{p}$ in U all'interno del quale esiste un'unica funzione $g : I_{\underline{x}} \rightarrow I_{\underline{y}}$ di classe C^k per cui:

$$\underline{y} = g(\underline{x}) \iff f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{a}, \quad (\text{in } A).$$

Inoltre per tale g vale:

$$Jg(\underline{x}_0) = -J_{\underline{y}} f(\underline{p})^{-1} J_{\underline{x}} f(\underline{p}).$$

- **Teorema di invertibilità locale** (o *della funzione inversa*) – Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k , con $k \geq 1$. Sia $\underline{x}_0$ un punto in U con $Jf(\underline{x}_0)$ invertibile.

Allora esiste un intorno A di $\underline{x}_0$ in U dentro al quale $f|_A$ ha un'inversa g , anch'essa di classe C^k , per la quale $Jg(f(\underline{x})) = Jf(\underline{x})^{-1}$.

- **Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali** – Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano date due funzioni continue:

$$A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{e} \quad \underline{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Fissato $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, esiste un'unica soluzione $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + \underline{b}(t), \\ y(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale** – Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Si supponga inoltre che $\underline{f}$ sia *localmente lipschitziana* rispetto alla seconda variabile.

Allora, per ogni $(t_0, \underline{y}_0) \in \Omega$, esistono $\delta > 0$ e un'unica funzione $\underline{y} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 che risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \\ y(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali** – Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Indichiamo con $\Phi(t, t_0, \underline{y}_0)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy con dato iniziale $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$.

Allora l'insieme di definizione del flusso:

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, t_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \begin{array}{l} \text{la soluzione } \underline{y}(t, t_0, \underline{y}_0) \\ \text{esiste al tempo } t \end{array} \right\}$$

è un aperto di $\mathbb{R} \times \Omega$ e l'applicazione $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^k .

- **Teorema di Sard sugli aperti di $\mathbb{R}^n$** – Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa liscia. Allora l'insieme $\text{crit}(f)$ dei valori critici di f ha misura nulla.
- **Teorema di approssimazione di Weierstrass** – Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto, e sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa continua. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione polinomiale $P : K \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$.

Teoria della misura

- **Caratterizzazione dell'annullamento della misura di Lebesgue** – Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora A ha misura nulla se e solo se, per ogni scelta di $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia numerabile $\{B_i\}_{i \geq 0}$ di rettangoli $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ tali per cui:

$$A \subseteq \bigcup_{i \geq 0} B_i, \quad \sum_{i \geq 0} \text{vol}(B_i) < \varepsilon.$$

- **Lemma per la nullità della misura su un'unione numerabile di insiemi di misura nulla** – Se $\{A_k\}_{k \geq 0}$ è una famiglia di sottinsiemi di misura nulla di $\mathbb{R}^n$, allora anche $\bigcup_{k \geq 0} A_k$ ha misura nulla.

Parte 1

Teoria delle curve

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe C^∞ .

Se $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ e f è una funzione relativa a una curva α , ammettiamo l'abuso di notazione $f(\underline{x})$, intendendo $f(\alpha^{-1}(\underline{x}))$; per esempio useremo $\kappa(P)$ per intendere $\kappa(\alpha^{-1}(P))$.

1.1 Definizioni preliminari

1.1.1 Curve, tracce e velocità

Definizione 1.1 (Curva parametrizzata).

Una **curva parametrizzata** (o semplicemente *curva*) è una mappa $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , dove I è un intervallo.

Definizione 1.2 (Traccia di una curva).

Si dice **traccia** (o *supporto*) di una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, la sua immagine $\alpha(I)$.

Definizione 1.3 (Velocità di una curva).

Si definisce la **velocità** di una curva parametrizzata $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ come la curva indotta dalla derivata di α :

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica

Definizione 1.4 (Lunghezza di una curva).

Si definisce la **lunghezza** $\ell(\alpha)$ di una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ come:

$$\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

Osservazione 1.5.

La definizione data per la lunghezza di una curva corrisponde alla nostra idea intuitiva di lunghezza tramite i seguenti due risultati:

1. **Validità sul segmento:** Su un segmento lineare $\alpha(t) = A + t(B - A)$ con $I = [0, 1]$, $\ell(\alpha) = \|B - A\|$.
2. **Approssimazione poligonale:** La lunghezza $\ell(\alpha)$ è il limite delle lunghezze delle poligoni inscritte nella curva. In termini teorici:

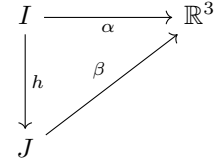
Sia dato $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale per cui, per ogni partizione $\{t_i\}_{i=0}^n$ di I di finezza inferiore a δ (i.e., $\max |t_{i+1} - t_i| < \delta$), vale $\|S - \ell(\alpha)\| < \varepsilon$, dove $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$.

1.2 (Ri)parametrizzazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a.

1.2.1 Riparametrizzazione e prime proprietà

Definizione 1.6 (Riparametrizzazione di una curva).

Data una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, una **riparametrizzazione** β di α è una curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui esiste un diffeomorfismo liscio $h : I \rightarrow J$ con $\alpha = \beta \circ h$.



Se $h' > 0$, si dice che h mantiene l'orientazione di α ; se $h' < 0$, h inverte l'orientazione.

Proposizione 1.7.

Se β è una riparametrizzazione di α , allora $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$.

1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco

Definizione 1.8 (Curva regolare).

Si dice che una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è **regolare** se $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Definizione 1.9 (Curva parametrizzata a lunghezza d'arco).

Si dice che una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è **parametrizzata a lunghezza d'arco (p.l.a.)** se α' è un vettore unitario (i.e., $\|\alpha'\| = 1$). In tal caso, $\ell(\alpha|_{[a,b]}) = b - a$.

Proposizione 1.10 (Riparametrizzazione a lunghezza d'arco).

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva regolare, allora α ammette una riparametrizzazione a lunghezza d'arco, ossia ammette una riparametrizzazione $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui β sia p.l.a.

Dimostrazione.

Poiché α è regolare, la funzione $s : I \rightarrow [0, \ell(\alpha)]$ tale per cui

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt$$

è un diffeomorfismo liscio. Quindi $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ è una riparametrizzazione di α , e vale:

$$\beta'(s) = \frac{\alpha'(s^{-1}(s))}{s'(s^{-1}(s))} = \frac{\alpha'(s^{-1}(s))}{\|\alpha'(s^{-1}(s))\|},$$

che è un vettore unitario. $\square$

Osservazione 1.11.

Tutte le riparametrizzazioni p.l.a. di una curva regolare α sono ottenibili da una singola riparametrizzazione p.l.a. β come $\beta(\pm t + v)$, al variare di $v \in \mathbb{R}$. In particolare, le riparametrizzazioni che mantengono l'orientazione sono quelle della forma $\beta(t + v)$, mentre quelle che la invertono sono della forma $\beta(-t + v)$.

Se infatti γ è una riparametrizzazione p.l.a. di β (e quindi di α), deve valere $\beta = \gamma \circ f$ per f diffeomorfismo. Quindi, per ogni tempo possibile di β , vale:

$$\beta'(s) = \gamma'(f(s))f'(s).$$

Dal momento che $\beta'(s)$ e $\gamma'(f(s))$ sono vettori unitari per ipotesi, $f'(s)$ può assumere solo ± 1 come valore. Dacché il dominio di f è connesso e f' è liscia, f' è costantemente 1 o -1 , e dunque $f(t)$ è della forma $\pm t + v$ con $v \in \mathbb{R}$.

1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.)

In tutta questa sezione consideriamo una curva p.l.a. β .

Se implicito, tralasceremo β nella notazione.

1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva

Definizione 1.12 (Versore tangente).

Sia β una curva p.l.a., allora si definisce il suo **versore tangente** T_β come β' .

Definizione 1.13 (Curvatura).

Sia β una curva p.l.a., allora si definisce la **curvatura** $\kappa_\beta(s)$ di β al tempo s come $\|\dot{T}_\beta(s)\|$.

Laddove è chiaro dal contesto quale sia β , scriviamo solo $\kappa(s)$.

1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale

Definizione 1.14 (Curva di Frenet p.l.a.).

Una curva p.l.a. β si dice **curva di Frenet** se ad ogni tempo s , la curvatura è positiva ($\kappa_\beta(s) > 0$).

Definizione 1.15 (Versore normale).

Se β è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo s il **versore normale** $N_\beta(s)$ così definito:

$$N_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{T}_\beta(s)}{\|\dot{T}_\beta(s)\|}.$$

Definizione 1.16 (Versore binormale).

Se β è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo s il **versore binormale** $B_\beta(s)$ così definito:

$$B_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_\beta(s) \times N_\beta(s).$$

Osservazione 1.17 (Triedro di Frenet).

Se β è di Frenet, allora, dacché $\dot{T}_\beta \perp T_\beta$, N_β e T_β sono linearmente indipendenti. Dunque $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ formano una base ortonormale a ogni tempo s . Tale base è detta **triedro di Frenet**.

1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet

Assumiamo in questa sottosezione di star lavorando con curve di Frenet p.l.a.

Proposizione 1.18 (Prima equazione di Frenet).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{T}_\beta(s) = \kappa_\beta(s) \cdot N_\beta(s). \quad (\text{F1})$$

Osservazione 1.19.

Osserviamo che $\dot{N}_\beta$ è ortogonale in ogni tempo a N_β , e dunque $\dot{N}_\beta$ sarà contenuto in $\text{span}(T_\beta, B_\beta)$.

Inoltre, derivando $N_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = 0$, otteniamo:

$$\dot{N}_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = -N_\beta(s) \cdot \dot{T}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s).$$

Definizione 1.20 (Torsione).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora definiamo la **torsione** $\tau_\beta(s)$ come il coefficiente di $\dot{N}_\beta(s)$ in $B_\beta(s)$, ovvero:

$$\tau_\beta(s) = \dot{N}_\beta(s) \cdot B_\beta(s).$$

Proposizione 1.21 (Seconda equazione di Frenet).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{N}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s) T_\beta(s) + \tau_\beta(s) B_\beta(s). \quad (\text{F2})$$

Proposizione 1.22 (Terza equazione di Frenet).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{B}_\beta(s) = -\tau_\beta(s) N_\beta(s), \quad (\text{F3})$$

e quindi $\tau_\beta(s) = -\dot{B}_\beta(s) \cdot N_\beta(s)$.

Osservazione 1.23.

Dal momento che $B_\beta = T_\beta \times N_\beta$, derivando B_β otteniamo:

$$\dot{B}_\beta = \dot{T}_\beta \times N_\beta + T_\beta \times \dot{N}_\beta,$$

dal quale, applicando le prime due equazioni di Frenet, ricaviamo (F3).

Osservazione 1.24.

In termini matriciali, le tre equazioni di Frenet possono scriversi in modo più compatto come:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametrizzazioni p.l.a. di una stessa curva

Proposizione 1.25.

Sia $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione p.l.a. di una curva p.l.a. $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora le curvature delle due curve coincidono nei punti delle tracce.

In altre parole, se $f : J \rightarrow I$ è il diffeomorfismo per cui $\gamma = \beta \circ f$, allora:

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\beta(f(s)).$$

Inoltre, se β è di Frenet, anche γ è di Frenet, e se f preserva l'orientazione, allora i triedri di Frenet e la torsione coincidono nei punti delle tracce, ossia:

$$T_\gamma(s) = T_\beta(f(s)), \quad N_\gamma(s) = N_\beta(f(s)),$$

$$B_\gamma(s) = B_\beta(f(s)), \quad \tau_\gamma(s) = \tau_\beta(f(s)).$$

Qualora f non preservasse l'orientazione, le quantità sopracitate di γ coincidono con quelle di β nei punti, ma sono cambiate di segno (eccetto per la normale N_γ , che invece ha stesso verso).

1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale)

1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.

Definizione 1.26 (Curva di Frenet).

Sia α una curva regolare. Allora si dice che α è una **curva di Frenet** se una sua qualsiasi riparametrizzazione p.l.a. è di Frenet.

Osservazione 1.27.

Per la Proposizione 1.25, se α è di Frenet, allora ogni sua riparametrizzazione p.l.a. è di Frenet.

Possiamo estendere questa idea anche per definire il triedro di Frenet e la torsione.

Definizione 1.28 (Versore tangente).

Sia α una curva regolare. Allora si definisce il **versore tangente** di α al tempo t come:

$$T_\alpha(t) = T_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Osservazione 1.29.

Se t è un tempo in cui $\alpha'(t) \neq 0$, allora, per continuità, esiste un intorno di t in cui α è regolare (i.e., α è localmente regolare in t). Questo ci permette di definire la curvatura come segue:

Definizione 1.30 (Curvatura).

Sia α una curva regolare al tempo t . Allora si definisce la **curvatura** al tempo t come:

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione locale p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo.

Qualora α non fosse regolare in t (i.e., $\alpha'(t) = 0$), si pone $\kappa_\alpha(t) = 0$.

Proposizione 1.31.

Una curva α è regolare e di Frenet se e solo se $\kappa_\alpha(t) > 0$ per ogni t .

Definizione 1.32 (Versore normale).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore normale** di α al tempo t come:

$$N_\alpha(t) = N_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo.

Definizione 1.33 (Versore binormale).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore binormale** di α al tempo t come:

$$B_\alpha(t) = B_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Definizione 1.34 (Torsione).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce la **torsione** di α al tempo t come:

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Proposizione 1.35.

Valgono le equazioni di Frenet ($F1$, $F2$, $F3$) anche nel caso generale.

1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale

Osservazione 1.36.

Se α è una curva regolare e $\alpha = \beta \circ f$, dove β è una sua riparametrizzazione p.l.a. e f è un diffeomorfismo, allora:

$$\alpha'(t) = \beta'(f(t))f'(t) = T_\alpha(t)f'(t), \quad (1.1)$$

da cui si ricava applicando $f'(t) = \|\alpha'(t)\|$ la seguente proposizione:

Proposizione 1.37 (Formula per il versore tangente).

Sia α una curva regolare. Allora vale:

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

ovverosia il versore tangente è dato dalla normalizzazione della derivata al tempo t .

Osservazione 1.38.

Derivando ulteriormente l'eq. (1.1), si ottiene:

$$\alpha''(t) = \dot{T}_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^2 + T_\alpha(t)f''(t). \quad (1.2)$$

Applicando $\alpha'(t) \times$ all'eq. (1.2) e sfruttando che $\alpha' \parallel T_\alpha$ si ricava:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \|\alpha''(t)\|^2 (\alpha'(t) \times \dot{T}_\alpha(t)), \quad (1.3)$$

dalla quale, usando che $\alpha'(t) \perp \dot{T}_\alpha$, e prendendo le norme, si ottiene la seguente proposizione:

Proposizione 1.39 (Formula per la curvatura).

Sia α una curva regolare. Allora vale:

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Osservazione 1.40.

Assumendo che α sia di Frenet, applicando (F1) all'eq. (1.3), si ottiene:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^3 (T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)),$$

dalla quale equazione, usando che $B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)$, si ottengono subito la seguente proposizione:

Proposizione 1.41 (Formula per il versore binormale).

Sia α una curva di Frenet. Allora vale:

$$B_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|},$$

ovverosia il versore binormale è dato dalla normalizzazione di $\alpha' \times \alpha''$ al tempo t .

Osservazione 1.42 (Formula per il versore normale).

Per calcolare $N_\alpha(t)$ si sfrutta la relazione:

$$N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \times T_\alpha(t).$$

Osservazione 1.43.

Deriviamo per l'ultima volta l'eq. (1.2), e sostituendovi (F2), otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= (f'''(t) - \kappa_\alpha(t)f'(t)^3) \underline{T}_\alpha(t) \\ &\quad + (\kappa'_\alpha(t)f'(t)^3 + 3\kappa_\alpha(t)f'(t)f''(t)) \underline{N}_\alpha(t) \\ &\quad + \kappa_\alpha(t)\tau_\alpha(t)f'(t)^3 \underline{B}_\alpha(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Applicando $(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot$ all'eq. (1.4), e usando che $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ è ortogonale a T_α , N_α , ma parallelo a B_α , ricaviamo la seguente proposizione:

Proposizione 1.44 (Formula per la torsione).

Sia α una curva di Frenet. Allora vale:

$$\tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

1.5 Proprietà di curvatura e torsione

1.5.1 Torsione e piano osculatore

La torsione rappresenta “quanto una curva è distante dall'essere un piano”. Più $\tau_\alpha(t)$ si avvicina a 0 e più la curva α in 0 è localmente simile a un piano, in particolare il piano osculatore:

Definizione 1.45 (Piano osculatore).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **piano osculatore** $\Pi_\alpha(t)$ al tempo t di α come il seguente piano affine:

$$\Pi_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t) + \text{span}(T_\alpha(t), N_\alpha(t)).$$

L'intuizione presentata precedentemente è formalizzata dal seguente risultato:

Proposizione 1.46.

Sia α una curva di Frenet con $\tau_\alpha \equiv 0$. Allora $\Pi_\alpha(t)$ è costante e la traccia di α è contenuta in Π_α .

Dimostrazione.

Possiamo assumere senza perdita di generalità che $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia p.l.a. Allora da (F3), si ricava $\dot{B}_\alpha \equiv 0$, e quindi B_α è costante. Poiché B_α è costante, la normale di $\Pi_\alpha(t)$ è costante.

Osserviamo che $T_\alpha \in B_\alpha^\perp$, da cui $T_\alpha \cdot B_\alpha = \alpha' \cdot B_\alpha = 0$. Ciò, unito al fatto che I è connesso, implica che $\alpha(t) \cdot B_\alpha$ sia costante. Pertanto $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot B_\alpha = 0$ per ogni t_0 in I su tutto I . Questa è esattamente l'equazione di appartenenza al piano $\Pi_\alpha(t_0)$: si conclude allora che $\Pi_\alpha(t)$ è costante e che la traccia di α è contenuta in Π_α . $\square$

1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore

La curvatura rappresenta “quanto una curva è distante dall’essere una retta”. Più $\kappa_\alpha(t)$ si avvicina a 0 e più la curva α in 0 è localmente simile a una retta.

I due seguenti risultati formalizzano proprio questa intuizione.

Proposizione 1.47.

Sia α una curva regolare con $\kappa_\alpha \equiv 0$. Allora α è contenuta in una retta affine. Viceversa, una retta affine si parametrizza con una curva avente curvatura nulla.

Dimostrazione.

Possiamo supporre senza perdita di generalità che α sia p.l.a. Allora $\kappa_\alpha \equiv 0$ implica che $\dot{T}_\alpha \equiv 0$, ovverosia che T_α è costante. Pertanto $\alpha(t) = T_\alpha \cdot t + P$ per un $P \in \mathbb{R}^3$.

Il viceversa è poi immediato. $\square$

Definizione 1.48 (Raggio di curvatura).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **raggio di curvatura** $R_\alpha(t)$ al tempo t di α come:

$$R_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}.$$

Definizione 1.49 (Cerchio osculatore).

Sia α una curva di Frenet. Si definisce il **cerchio osculatore** $\mathcal{C}_\alpha(t)$ al tempo t di α come il cerchio di raggio $R_\alpha(t)$ e centro $\alpha(t) + R_\alpha(t)N_\alpha(t)$ contenuto nel piano osculatore $\Pi_\alpha(t)$.

Proposizione 1.50 (Il raggio di curvatura è il raggio del cerchio che meglio approssima α in un punto).

Sia α una curva p.l.a. di Frenet. Si ponga:

$$f_{P,R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha(t) - P\|^2 - R^2.$$

Consideriamo i cerchi di raggio P e R nel piano $\Pi_\alpha(t_0)$, denotati con $\mathcal{C}(P, R)$. Si pongano le seguenti condizioni:

- $f_{P,R}(t_0) = 0$, ovverosia il cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ passa per $\alpha(t_0)$;
- $f'_{P,R}(t_0) = f''_{P,R}(t_0) = 0$, ovverosia il cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ approssima α in t_0 fino al secondo ordine.

Allora l’unico cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ soddisfacente le sopracitate condizioni è il cerchio osculatore $\mathcal{C}_\alpha(t_0)$ al tempo t_0 di α .

Dimostrazione.

Osserviamo che:

$$f'_{P,R}(t) = 2\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - P),$$

e quindi $f'_{P,R}(t_0) = 0$ implica $T_\alpha(t_0) \perp \alpha(t_0) - P$. Dal momento che il cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ deve essere contenuto nel piano osculatore di $\alpha(t_0)$, allora $\alpha(t_0) - P \parallel N_\alpha(t_0)$.

Inoltre:

$$f''_{P,R}(t) = 2(\alpha''(t) \cdot (\alpha(t) - P) + \|\alpha'(t)\|^2),$$

da cui, ponendo $f''_{P,R}(t_0) = 0$, si ottiene:

$$P = \alpha(t_0) + R_\alpha(t_0)N_\alpha(t_0).$$

Infine, usando che $f_{P,R}(t_0) = 0$, si conclude che $R = R_\alpha(t_0)$. $\square$

1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve

La curvatura e la torsione delineano essenzialmente un’unica curva:

Teorema 1.51 (fondamentale della teoria delle curve).

Due curve p.l.a. di Frenet $\alpha, \hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ hanno curvatura e torsione coincidente se e solo se la traccia di una curva è ottenibile dall’altra tramite movimento rigido dello spazio (i.e., isometria con parte lineare in $\text{SO}(3)$).

Parte 2

Teoria delle superfici

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe C^∞ .

Se $\underline{x}$ è una parametrizzazione regolare o una funzione con dominio un sottinsieme di $\mathbb{R}^2$, ammettiamo l'abuso di notazione $\underline{x}(P)$ per sottintendere $\underline{x}(\underline{y}^{-1}(P))$, dove $\underline{y}$ è una parametrizzazione regolare di P sulla superficie studiata.

2.1 Definizioni preliminari

2.1.1 Parametrizzazioni regolari

Definizione 2.1 (Parametrizzazione regolare).

Si dice **parametrizzazione regolare** una mappa $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con U aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che:

- $\underline{x}$ è iniettiva;
- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ per ogni $(u, v) \in U$ (**regolarità**);
- $\underline{x}^{-1}$ è continua.

Osservazione 2.2.

Osserviamo che $J\underline{x} = [\underline{x}_u \ \underline{x}_v]$. Allora richiedere la regolarità è equivalente a richiedere che $\text{rk}(J\underline{x})$ sia sempre massimo, ovvero:

$$\text{rk}(J\underline{x}) = 2.$$

Proposizione 2.3.

Ogni parametrizzazione regolare è un diffeomorfismo C^∞ .

Dimostrazione.

Sia $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ una parametrizzazione regolare surgettiva su Σ . Sia $(u_0, v_0) \in U$. Dal momento che $\underline{x}$ è regolare, esiste un minore 2×2 in $J\underline{x}(u_0, v_0)$ invertibile. Sia π la proiezione da $\mathbb{R}^3$ sul piano $\text{span}(e_i, e_j) \cong \mathbb{R}^2$, dove i e j sono gli indici delle righe del minore rispetto a $J\underline{x}(u_0, v_0)$.

Allora $J(\pi \circ \underline{x})(u_0, v_0)$ è invertibile, e per il Teorema di invertibilità locale, $\pi \circ \underline{x}$ è localmente invertibile. Dacché $\underline{x}^{-1}$ è localmente uguale a $(\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi^{-1}$, che è composizione di funzioni C^∞ , si ricava che $\underline{x}$ è un diffeomorfismo C^∞ locale. Dal momento che $\underline{x}$ è però iniettiva, si ricava che è anche un diffeomorfismo C^∞ . $\square$

2.1.2 Superficie

Definizione 2.4 (Superficie).

Una **superficie** è un sottinsieme Σ di $\mathbb{R}^3$ tale per cui ogni punto P di Σ ammette una parametrizzazione regolare $\underline{x}_P$ la cui immagine sia contenuta in Σ e che sia intorno di P in Σ . Ci riferiremo a $\underline{x}_P$ come a una **parametrizzazione regolare per P** .

Osservazione 2.5.

Chiaramente, se $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione regolare, allora $\underline{x}(U)$ è una superficie.

Proposizione 2.6.

Σ è una superficie se e solo se ogni suo punto ammette una parametrizzazione regolare della forma $\underline{x} : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$.

Dimostrazione.

Siccome ogni parametrizzazione regolare $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ ha come dominio un aperto, possiamo restringerci a una palla di raggio ε di $\underline{x}^{-1}(P)$. Tramite traslazione possiamo infine riportare $\underline{x}^{-1}(P)$ al centro, ottenendo una parametrizzazione del tipo desiderato. $\square$

Proposizione 2.7.

Se Σ è una superficie, una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua se e solo se $f \circ \underline{x}$ è una funzione continua per ogni parametrizzazione regolare $\underline{x}$ di un punto di Σ .

Dimostrazione.

Deriva dal fatto che una funzione è continua se e solo se è localmente continua. $\square$

2.2 Classi fondamentali di superfici

2.2.1 Superfici di rotazione

Definizione 2.8 (Superficie di rotazione).

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata della forma $(a(t), 0, b(t))$ tale che α è regolare e omeomorfismo locale. Si definisce allora la **superficie di rotazione** (intorno all'asse z) di α come l'immagine della seguente parametrizzazione canonica:

$$\underline{x}(u, v) = (a(u) \cos(v), a(u) \sin(v), b(u)).$$

Definizione 2.9 (Paralleli e meridiani).

Sia Σ una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica $\underline{x}$. Allora l'immagine della curva $\alpha_{u_0}(t) = \underline{x}(u_0, t)$ è detta **parallelo**, mentre quella della curva $\gamma_{v_0}(t) = \underline{x}(t, v_0)$ è detta **meridiano**.

I paralleli sono dunque le intersezioni della superficie con i piani della forma $\{z = k\}$, mentre i meridiani lo sono rispetto ai piani della forma $\{ax + by = 0\}$.

Proposizione 2.10.

Una superficie di rotazione è effettivamente una superficie, poiché la sua parametrizzazione canonica è regolare.

2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello

Proposizione 2.11 (Il grafico di una funzione C^∞ a valori reali con dominio $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è una superficie).

Il grafico Γ_f di una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è parametrizzato come $\underline{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, ed è dunque una superficie.

Definizione 2.12.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ una funzione liscia. Allora si dice che $a \in f(A)$ è un **valore regolare** per f se:

$$\nabla f(p) \neq 0, \quad \forall p \in f^{-1}(a).$$

Proposizione 2.13.

*Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ una funzione liscia. Allora, se a è un valore regolare per f , $f^{-1}(a)$ è una superficie ed è detta **superficie di livello a rispetto a f** .*

Dimostrazione.

La tesi discende direttamente come applicazione del Teorema della funzione implicita. Infatti, se a è un valore regolare, $f^{-1}(a)$ è localmente un grafico su ogni suo punto. Allora, per la Proposizione 2.11, $f^{-1}(a)$ è una superficie. $\square$

2.3 Piano tangente e orientabilità

2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse

Definizione 2.14 (Funzione di transizione).

Siano $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni regolari per P su una superficie Σ aventi stessa immagine. Si definisce allora la **funzione di transizione** $f_{\underline{x}, \underline{y}} : U \rightarrow U'$ da $\underline{x}$ a $\underline{y}$ come:

$$f_{\underline{x}, \underline{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{y}^{-1} \circ \underline{x},$$

in modo tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma & \\ \underline{x} \nearrow & & \nwarrow \underline{y} \\ U & \xrightarrow{f_{\underline{x}, \underline{y}}} & U' \end{array}$$

Proposizione 2.15.

Una funzione di transizione $f_{\underline{x}, \underline{y}}$ è un diffeomorfismo C^∞ .

Dimostrazione.

Dal momento che $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono diffeomorfismi C^∞ per la Proposizione 2.3, essendo f composizione di variazioni di queste, anche f lo è. $\square$

Proposizione 2.16.

Siano $\underline{x}$ e $\underline{y}$ due parametrizzazioni regolari per P su una superficie Σ . Allora vale:

$$\text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)) = \text{span}(\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)).$$

Dimostrazione.

Possiamo assumere senza perdita di generalità che le immagini di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ (basta prendere l'intersezione delle immagini).

Posto allora $f_{\underline{x}, \underline{y}}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$, vale $\underline{x}(s, t) = \underline{y}(u(s, t), v(s, t))$, e quindi:

$$\begin{cases} \underline{x}_s(P) = u_s(P) \cdot \underline{y}_u(P) + v_s(P) \cdot \underline{y}_t(P), \\ \underline{x}_t(P) = u_t(P) \cdot \underline{y}_u(P) + v_t(P) \cdot \underline{y}_t(P). \end{cases}$$

Dal momento che $Jf_{\underline{x}, \underline{y}}(P)$ ha rango 2, allora il precedente sistema induce un cambio di base da $\{\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)\}$ a $\{\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)\}$, da cui la tesi. $\square$

Definizione 2.17 (Piano tangente).

Sia Σ una superficie. Allora, se P è un punto di Σ , si definisce il **piano tangente** $T_P \Sigma$ di P rispetto a Σ come:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)),$$

dove $\underline{x}$ è una qualsiasi parametrizzazione regolare di P .

2.3.2 Versori normali e orientabilità

Definizione 2.18 (Versore normale su $\underline{x}$).

Sia $\underline{x}$ una parametrizzazione regolare di un punto P su una superficie Σ . Definiamo il **versore normale** $n_{\underline{x}}(P)$ come:

$$n_{\underline{x}}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}.$$

Proposizione 2.19.

Due parametrizzazioni regolari $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$ con stessa immagine hanno stessa normale in ogni punto se e solo se la funzione di transizione ha in ogni punto jacobiano di determinante positivo.

Dimostrazione.

Segue dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16. $\square$

Definizione 2.20 (Parametrizzazioni regolari compatibili).

Due parametrizzazioni regolari $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$ si dicono **compatibili** se l'intersezione delle immagini è vuota o se hanno stessa normale sull'intersezione delle immagini.

Definizione 2.21 (Superficie orientabile).

Una superficie Σ si dice **orientabile** se è ricoperta da parametrizzazioni regolari a due a due compatibili.

Proposizione 2.22.

Una superficie Σ è orientabile se e solo se esiste una funzione continua $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui $\underline{n}(P)$ sia unitario e perpendicolare a $T_P\Sigma$ per ogni punto P di Σ .

Corollario 2.23.

Ogni superficie Σ di livello ℓ rispetto a f , per f liscia e ℓ regolare, è orientabile.

Dimostrazione.

Il gradiente $\nabla f / \|\nabla f\|$ è un campo vettoriale unitario e ortogonale a $T_P\Sigma$ per ogni punto P . Si conclude per la Proposizione 2.22. $\square$

$\triangle$ Attenzione. Ogni superficie è localmente orientabile!

È sufficiente prendere per ogni punto come ricoprimento la sua stessa parametrizzazione regolare.

Parte 3

Curve su superfici

3.1 Piano tangente e derivata direzionale

3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare

Proposizione 3.1.

Sia $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare e sia $\alpha : I \rightarrow \underline{x}(U)$ una curva. Allora α si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t)),$$

con $u(t), v(t) : I \rightarrow U$ funzioni di classe C^∞ .

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla Proposizione 2.3. $\square$

3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve

Proposizione 3.2 (Il piano tangente è l'insieme delle velocità delle curve sulla superficie considerata).

Sia Σ una superficie. Allora vale:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha'(P) \mid \alpha : I \rightarrow \Sigma \text{ curva con } P \in \alpha(I) \}.$$

Dimostrazione.

Sia $P = \underline{x}(0, 0)$, dove $\underline{x} : B_\varepsilon \rightarrow \Sigma$ è una parametrizzazione regolare di P . È sufficiente osservare che ogni vettore tangente è una combinazione lineare della forma $\lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$; allora la curva $\alpha(t) = \underline{x}(t\lambda, t\mu)$ ha velocità $\lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$ in P . $\square$

3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale

Definizione 3.3 (Funzioni C^∞ sulla superficie).

Sia Σ una superficie. Una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^∞ se per ogni parametrizzazione regolare $\underline{x}$ di ogni punto $P \in \Sigma$, $f \circ \underline{x}$ è di classe C^∞ .

Proposizione 3.4.

Sia Σ una superficie. Sia $P \in \Sigma$ e venga dato $\xi \in T_P \Sigma$. Sia data una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se α, β sono due curve su Σ passanti per P al tempo 0 con $\alpha'(0) = \beta'(0) = \xi$, allora:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dimostrazione.

Sia $\underline{x}$ una parametrizzazione regolare di P rispetto a Σ . Allora, per la Proposizione 3.1, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ e $\beta(t) = (p(t), q(t))$, con u, v, p, q lisce.

Pertanto:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ \underline{x})(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= (f \circ \underline{x})_u u'(0) + (f \circ \underline{x})_v v'(0). \end{aligned}$$

Osserviamo che $(u'(0), v'(0)) = (p'(0), q'(0))$, dal momento che rappresentano le coordinate in U del vettore ξ . La tesi segue allora dal fatto che il membro a destra diventa $(f \circ \beta)'(0)$. $\square$

Definizione 3.5 (Derivata direzionale).

Sia Σ una superficie. Sia $P \in \Sigma$ e venga dato $\xi \in T_P \Sigma$. Allora, data una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$, la derivata direzionale $D_\xi f(P)$ è definita come:

$$D_\xi f(P) \stackrel{\text{def}}{=} (f \circ \alpha)'(0),$$

dove α è una qualsiasi curva su Σ passante per P al tempo 0 con $\alpha'(0) = \xi$.

3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale

3.2.1 Operatore forma e prime proprietà

Proposizione 3.6.

Sia $\underline{x}$ una parametrizzazione regolare di un punto P su Σ . Allora $D_\xi \underline{n}(P) \in T_P \Sigma$, dove $\underline{n}$ è la normale indotta da $\underline{x}$ localmente.

Dimostrazione.

Sia α una curva su Σ passante per P al tempo 0 con $\alpha'(0) = \xi$. Osserviamo che $\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1$, e quindi:

$$2(D_\xi \underline{n}(P) \cdot \underline{n}(P)) = 0,$$

da cui la tesi. $\square$

Definizione 3.7 (Operatore forma).

Data una $\underline{x}$ una parametrizzazione regolare di un punto P su Σ , si definisce **operatore forma** l'endomorfismo $S_P(\xi) : T_P\Sigma \rightarrow T_P\Sigma$ tale per cui:

$$S_P(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -D_\xi \underline{n}(P).$$

Osservazione 3.8.

Osserviamo che l'operatore forma è "essenzialmente unico", dal momento che, al variare delle parametrizzazioni, può solo cambiare segno (quello della normale). Tutte le proprietà che ci interessano sono invarianti per cambio di segno, e quindi la scrittura S_P è "ben definita".

Lemma 3.9.

Sia P un punto su una superficie Σ . Sia $\underline{x}$ una parametrizzazione di P . Allora per $\{i, j\} \subseteq \{u, v\}$ vale:

$$S_P(\underline{x}_i) \cdot \underline{x}_j(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{ij}(P).$$

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità assumiamo $P = \underline{x}(0, 0)$. Sia $\underline{n}$ la normale indotta dalla parametrizzazione $\underline{x}$. Allora vale:

$$\begin{cases} \underline{n} \cdot \underline{x}_u = 0, \\ \underline{n} \cdot \underline{x}_v = 0. \end{cases}$$

Derivando le due equazioni del sistema lungo la curva $\alpha(t) = \underline{x}(t, 0)$, otteniamo:

$$\begin{cases} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uu}(P), \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uv}(P), \end{cases}$$

dove nell'ultima espressione si è applicato il Teorema di Schwarz per sostituire $\underline{x}_{uv}$ a $\underline{x}_{vu}$. Analogamente si ottiene la formula per gli altri due casi. $\square$

Proposizione 3.10 (L'operatore forma è autoaggiunto).

Sia P un punto su una superficie Σ . Allora l'operatore forma S_P è autoaggiunto.

Dimostrazione.

Per dimostrare che S_P è autoaggiunto è sufficiente mostrare che:

$$S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v = \underline{x}_u \cdot S_P(\underline{x}_v),$$

dacché $\{\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)\}$ è una base di $T_P\Sigma$. Questo però è immediato dal Lemma 3.9 e dal Teorema di Schwarz. $\square$

3.2.2 I e II forma fondamentale

Definizione 3.11 (I forma fondamentale).

Sia Σ una superficie. Si definisce **I forma fondamentale** di Σ in P il prodotto scalare $I_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definito come:

$$I_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot w,$$

ovverosia è il prodotto canonico di $\mathbb{R}^3$ ristretto a $T_P\Sigma$.

Definizione 3.12 (II forma fondamentale).

Sia Σ una superficie. Si definisce **II forma fondamentale** di Σ in P il prodotto scalare $II_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definito come:

$$II_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} I_P(S_P(v), w) = S_P(v) \cdot w.$$

Osservazione 3.13.

Osserviamo che la II forma fondamentale è ben definita dal momento che S_P è autoaggiunto per la Proposizione 3.10

Osservazione 3.14.

Scelta una parametrizzazione $\underline{x}$ di P , le due forme fondamentali e l'operatore forma si rappresentano canonicamente come matrici 2×2 nella base $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$.

Definizione 3.15 (I forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione $\underline{x}$ di P e data la rappresentazione matriciale di I_P rispetto a $\underline{x}$, definiamo E , F e G (relativi a P) di modo che:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \\ \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v & \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.16 (II forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione $\underline{x}$ di P e data la rappresentazione matriciale di II_P rispetto a $\underline{x}$, definiamo ℓ , m , n (relativi a P) di modo che:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u & S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v & S_P(\underline{x}_v) \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.17 (Formula per ℓ , m e n).

Gli elementi della rappresentazione matriciale di II_P rispetto a $\underline{x}$ si calcolano come segue:

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}, \quad m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}, \quad n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv},$$

dove $\underline{n}$ è la normale indotta da $\underline{x}$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Lemma 3.9. $\square$

Proposizione 3.18.

Scelta una parametrizzazione $\underline{x}$ di P , le rappresentazioni matriciali di I_P , II_P e S_P rispetto a $\underline{x}$ soddisfano la seguente relazione:

$$II_P = I_P \cdot S_P.$$

In particolare vale:

$$\det(S_P) = \frac{\det(II_P)}{\det(I_P)} = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}.$$

3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale

Proposizione 3.19.

Sia π un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per un punto p di una superficie Σ . Se $\pi \neq P + T_P\Sigma$, allora $\pi \cap \Sigma$ è localmente parametrizzato come una curva regolare intorno a P .

Dimostrazione.

Sia $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ è una parametrizzazione regolare di P e sia π il piano associato all'equazione $(a, b) \cdot \underline{x} = d$. Assumiamo che $P = \underline{x}(u_0, v_0)$.

Consideriamo la funzione liscia f a valori reali tale per cui:

$$f(u, v) = (a, b) \cdot \underline{x}(u, v).$$

Osserviamo innanzitutto che $f^{-1}(d) = \pi \cap \underline{x}(U)$. Mostriamo che $f^{-1}(d)$ è una curva regolare intorno a P mostrando che d è un valore regolare per f in (u_0, v_0) :

$$\nabla f(u_0, v_0) = (a, b) \cdot (\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)).$$

Dal momento che π è diverso da $P + T_P \Sigma$, la normale (a, b) del piano π non può essere ortogonale a $(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P))$, e quindi $\nabla f(u_0, v_0) \neq 0$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 3.20.

Se π è un piano con $\pi \neq P + T_P \Sigma$, allora la curva che parametrizza localmente in P l'intersezione $\pi \cap \Sigma$ ha come versore tangente uno dei due possibili vettori unitari della giacitura di $\pi \cap (P + T_P \Sigma)$.

In particolare esiste una curva p.l.a. $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ che parametrizza l'intersezione $\pi \cap \Sigma$ localmente in P con $\alpha(0) = P$ e $\alpha'(0) = w$, dove w è il versore sopracitato.

Per tale curva α vale $\underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0$, dove $\underline{n}$ è una normale (locale). Quindi, derivando:

$$S_w P \cdot w = \underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0),$$

e quindi la quantità $\underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0)$ non dipende da α .

Scegliendo la normale di π in $T_P \Sigma$, $\dot{T}_\alpha(0)$ è parallelo a $\underline{n}(P)$. Ora possono esservi tre casi:

1. Se $\dot{T}_\alpha(0)$ è nullo, allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P) = 0.$$

2. Se $\dot{T}_\alpha(0)$ è parallelo positivamente a $\underline{n}(P)$, allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P).$$

3. Se $\dot{T}_\alpha(0)$ è parallelo negativamente a $\underline{n}(P)$, allora:

$$S_w P \cdot w = -\kappa_\alpha(P).$$

Queste osservazioni ci permettono di dare un'ottima interpretazione geometrica al prodotto $S_w P \cdot w$, come segue:

Definizione 3.21 (Curvatura normale).

Sia P un punto su una superficie Σ . Dato un vettore unitario $w \in T_P \Sigma$, si definisce la **curvatura normale** $\kappa_n(P, w)$ in P di **direzione** w come:

$$\kappa_n(P, w) \stackrel{\text{def}}{=} S_w P \cdot w,$$

che è quindi, a meno di segno, per l'osservazione precedente, la curvatura di una curva α passante per P e ottenuta come intersezione del piano tangente affine $P + T_P \Sigma$ e di un

piano π ad esso ortogonale, in modo tale che la giacitura di $\pi \cap P + T_P \Sigma$ sia generata da w .

Data α su Σ , definiamo la sua curvatura normale κ_n in P come:

$$\kappa_{\alpha, n} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_n(P, T_\alpha(P)).$$

Osservazione 3.22.

È immediato osservare che le curvature normali sono “invarianti per rototraslazioni”, ovverosia sono le stesse nei punti e nei vettori associati.

3.2.4 Direzioni e curvature principali, formula di Eulero

Definizione 3.23 (Direzioni e curvature principali).

Sia P un punto su una superficie Σ . Gli autospazi dell'operatore forma S_P sono detti **direzioni principali** in P , mentre gli autovalori sono detti **curvature principali** in P , e sono usualmente denotati come κ_1 e κ_2 .

Osservazione 3.24.

Calcolare la curvatura normale $\kappa_n(P, v) = S_P v \cdot v$ su un S_P -autovettore unitario v restituisce la curvatura principale ad esso relativo.

Osservazione 3.25.

Poiché S_P è autoaggiunto, S_P è ortogonalmente diagonalizzabile, ovverosia esiste una base ortonormale di $T_P \Sigma$ composta da S_P -autovettori.

Osserviamo inoltre che le curvature principali in P sono distinte se e solo se S_P non è un multiplo dell'identità.

Proposizione 3.26 (Formula di Eulero).

Sia P un punto su una superficie Σ con S_P -autospazi distinti. Se $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di S_P -autovettori con v_1 relativo alla curvatura κ_1 e v_2 relativo a κ_2 , allora vale la **formula di Eulero**:

$$\kappa_n(P, w_\theta) = \cos(\theta)^2 \kappa_1 + \sin(\theta)^2 \kappa_2, \quad (\text{Eulero})$$

dove $w_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\theta) \kappa_1 + \sin(\theta) \kappa_2$.

Dimostrazione.

Si tratta di una verifica diretta che sfrutta la definizione di $\kappa_n(P, w_\theta)$. $\square$

Proposizione 3.27.

Sia P un punto su una superficie Σ . Se $\kappa_1 \leq \kappa_2$ sono le due curvature principali di P (eventualmente coincidenti), allora tutte le curvature normali relative a P sono contenute in $[\kappa_1, \kappa_2]$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente da (Eulero). $\square$

3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti

Definizione 3.28 (Curvatura gaussiana).

Sia P un punto su una superficie Σ . Si definisce allora la **curvatura gaussiana** $\kappa(P)$ nel punto P come il prodotto delle sue curvature principali, ovvero:

$$\kappa(P) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(S_P).$$

Proposizione 3.29 (Formula per la curvatura gaussiana).

Sia P un punto su una superficie Σ . Vale allora la seguente formula:

$$\kappa(P) = \frac{\ell n - m}{EG - F^2}.$$

Dimostrazione.

Segue direttamente dalla Proposizione 3.18. $\square$

Proposizione 3.30 (Curvatura media).

Sia P un punto su una superficie Σ . Si definisce allora la **curvatura media** $H(p)$ nel punto P come la media delle sue curvature principali, ovvero:

$$H(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr}(S_P).$$

Osservazione 3.31.

La curvatura gaussiana rimane invariata cambiando la "normale locale" presa, mentre quella media può cambiare al massimo di segno. In particolare, che una delle due sia nulla è invariante per cambio di parametrizzazione locale.

Definizione 3.32 (Superfici piatte e minimi).

Sia P un punto su una superficie Σ . Una superficie si dice **piatta** se $K \equiv 0$ su tutta Σ , e **minima** se invece $H \equiv 0$.

Definizione 3.33 (Punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari).

Sia P un punto su una superficie Σ . Allora P si dice:

- **ellittico**: se $\kappa(P) > 0$ (tutte le curvature normali sono concordi),
- **iperbolico**: se $\kappa(P) < 0$ (esistono curvature normali discordi),
- **parabolico**: se $\kappa(P) = 0$, ma $S_P \neq 0$ (tutte le curvature normali sono concordi, e ne esiste una nulla),
- **planare**: se $S_P = 0$ (tutte le curvature normali sono nulle).

Proposizione 3.34.

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compatta non vuota. Allora Σ ammette un punto ellittico.

Dimostrazione.

È sufficiente studiare localmente un punto di norma massima di Σ e mostrare che in tal punto la curvatura gaussiana è positiva. $\square$

Proposizione 3.35.

Sia P un punto su una superficie Σ .

Se P è un punto ellittico, allora esiste un intorno di P su Σ contenuto interamente in uno dei due semispazi indotti dal taglio di $\mathbb{R}^3$ tramite $T_P \Sigma$.

Se P è iperbolico, allora un tale intorno invece non può esistere.

3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium

3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche

Proposizione 3.36.

Data una parametrizzazione $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, si ha $\ell(\bar{\alpha}) = \ell(\underline{x} \circ \bar{\alpha})$ per ogni curva $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow U$ se e solo se $I_P = I_2$ per ogni punto P in $\underline{x}(U)$.

In altre parole, $\underline{x}$ preserva le lunghezze delle curve se e solo se $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$.

Dimostrazione.

Sia P un punto di $\underline{x}(U)$ con $P = \underline{x}(u_0, v_0)$. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si può scegliere una curva $\bar{\alpha}$ su U con $\bar{\alpha}(0) = (u_0, v_0)$ e $\bar{\alpha}'(0) = (\lambda, \mu)$.

Preservare le lunghezze di ogni curva vuol dire anche preservare le lunghezze di ogni porzione di $\bar{\alpha}$. Questo implica $\|\bar{\alpha}'\| = \|\alpha'\|$, dove $\alpha = \underline{x} \circ \bar{\alpha}$.

Se $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$, allora:

$$\alpha'(0) = \lambda \underline{x}_u(P) + \mu \underline{x}_v(P).$$

L'arbitrarietà di λ e μ implica che la mappa $(a, b) \mapsto a \underline{x}_u(P) + b \underline{x}_v(P)$ sia un'isometria per ogni punto P , e quindi che I_P sia l'identità I_2 . $\square$

Definizione 3.37 (Isometria locale).

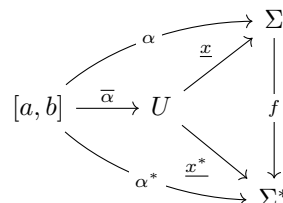
Una parametrizzazione regolare $\underline{x}$ si dice **isometria locale** se su tutti i punti di $\underline{x}(U)$ si ha $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$ tramite $\underline{x}$.

Definizione 3.38 (Superfici localmente isometriche).

Siano Σ e Σ^* due superfici di $\mathbb{R}^3$. Siano $P \in \Sigma$ e $P^* \in \Sigma^*$. Si dice che Σ e Σ^* sono **localmente isometriche** intorno a P e P^* se esistono $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ parametrizzazione di P , e $\underline{x}^* : U \rightarrow \Sigma^*$ parametrizzazione di P^* con $E \equiv E^*$, $F \equiv F^*$ e $G \equiv G^*$ su U .

Osservazione 3.39.

Passare da un intorno di una superficie a un intorno di una superficie ad essa localmente isometrica conserva le lunghezze.



Se α è una curva su Σ , allora si può fattorizzare come $\underline{x} \circ \bar{\alpha}$ con $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ (vd. Proposizione 3.1); analogamente si fattorizza la curva ottenuta sulla superficie Σ^* come $\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \bar{\alpha}$.

La tesi è equivalente a mostrare che $f \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \underline{x}$ conserva le velocità delle curve. Ma questo è vero, infatti:

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \bar{\alpha}'(t)^\top I_P \bar{\alpha}'(t) = \bar{\alpha}'(t)^\top I_P^* \bar{\alpha}'(t) = \|(\alpha^*)'(t)\|^2,$$

$$\text{e } I_P = I_P^*.$$

Osservazione 3.40.

Una superficie Σ^* ottenuta come rototraslazione o riflessione di una superficie Σ è localmente isometrica a Σ nei punti associati.

3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze

Osservazione 3.41.

Osserviamo che, se $\underline{x}$ è una parametrizzazione regolare, allora $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n}\}$ – dove $\underline{n}$ è la normale indotta da $\underline{x}$ – è una base di $\mathbb{R}^3$ in ogni punto. Pertanto anche $\underline{x}_{uu}$, $\underline{x}_{uv}$ e $\underline{x}_{vv}$ dovranno scriversi in questa base.

Definizione 3.42 (Simbolo di Christoffel).

Sia $\underline{x}$ una parametrizzazione regolare. Si indica con il **simbolo di Christoffel** Γ_{ij}^k il coefficiente di $\underline{x}_k$ del vettore $\underline{x}_{ij}$, dove $\{i, j, k\} \subseteq \{u, v\}$.

Osservazione 3.43.

Si osserva subito che vale la seguente formula:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ij} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{ij} \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^u \\ \Gamma_{ij}^v \end{pmatrix},$$

dove I è la I forma fondamentale in forma matriciale.

Teorema 3.44 (Theorema egregium di Gauss).

Sia Σ una superficie di $\mathbb{R}^3$. Allora la sua curvatura gaussiana κ è localmente esprimibile in funzione di E, F, G e le loro derivate.

Dimostrazione.

La dimostrazione segue questo schema:

- (i.) Dall'osservazione precedente, i simboli di Christoffel si scrivono in funzione degli $\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{ij}$ tramite la I forma fondamentale.
- (ii.) I $\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{ij}$ si scrivono utilizzando le derivate di E, F e G , e quindi i simboli di Christoffel si scrivono in termini di E, F, G e derivate.
- (iii.) Il termine $\ell d - mb$, dove b e d sono gli elementi della seconda riga della II forma fondamentale, si scrive come $E \cdot \kappa$.
- (iv.) Sviluppando $\underline{x}_{uuv}$ e $\underline{x}_{uvu}$ e applicando il Teorema di Schwarz, si ottiene un'espressione di $\ell d - mb$ in termini dei simboli di Christoffel.

- (v.) Allora $\ell d - mb$ si scrive in termini di E, F e G e le loro derivate per (ii.) e (iv.), e così anche κ per (iii.).

□

Corollario 3.45.

Due superfici localmente isometriche hanno stessa curvatura gaussiana nei punti associati.

Corollario 3.46.

Un piano e la sfera non sono localmente isometrici.

3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali

3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante

Definizione 3.47 (Campo vettoriale (tangente)).

Sia Σ una superficie. Un **campo vettoriale** (tangente) su Σ è una mappa liscia $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui $X(P) \in T_P \Sigma$ per ogni $P \in \Sigma$.

Definizione 3.48 (Derivata covariante).

Sia X un campo vettoriale di Σ . Si definisce allora la sua **derivata covariante** in direzione v su un punto P come:

$$\nabla_v X(P) \stackrel{\text{def}}{=} (D_v X(P))^\top \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{T_P \Sigma}(D_v X(P)).$$

Osservazione 3.49.

In realtà, per definire la derivata covariante di X in direzione v è sufficiente che X sia definita lungo una curva α passante per P con velocità v .

3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo

Definizione 3.50 (Campo parallelo).

Un campo vettoriale (tangente) X su Σ si dice **parallelo lungo una curva** $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ se:

$$\nabla_{\alpha'(t)} X(\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Osservazione 3.51.

Sia X un campo vettoriale e sia α una curva su Σ . Poiché X è una mappa liscia sulla superficie Σ , $X \circ \alpha$ si scrive come:

$$X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\underline{x}_v(\alpha(t)).$$

Dunque, usando la definizione di campo parallelo, X è parallelo lungo α se e solo se soddisfa il seguente sistema, detto **sistema delle equazioni del trasporto parallelo**:

$$(\text{TP}): \begin{cases} a' + a(\Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v') + b(\Gamma_{vu}^u v' + \Gamma_{vv}^u u') = 0, \\ b' + a(\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') + b(\Gamma_{vu}^v v' + \Gamma_{vv}^v u') = 0, \end{cases}$$

dove $\alpha(t) = (u(t), v(t))$.

Proposizione 3.52 (Esistenza e unicità del trasporto parallelo).

Sia $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ una curva su una superficie Σ . Sia X_0 un vettore di $T_{\alpha(0)} \Sigma$. Allora esiste un unico campo vettoriale X parallelo lungo α tale per cui $X(\alpha(0)) = X_0$.

Dimostrazione.

Sia $\{\underline{x}_P\}_{P \in \alpha([0,1])}$ una famiglia di parametrizzazioni. Per compattezza di $[0, 1]$ e continuità di α , anche $\alpha([0, 1])$ è compatto. Dunque $\alpha(I)$ è contenuto in un numero finito delle parametrizzazioni della famiglia scelta in partenza.

È sufficiente dimostrare ora la proposizione sfruttando un'unica parametrizzazione e poi "incollando" i campi ottenuti. Tuttavia questo è ovvio dal momento per il Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali applicato al sistema dell'Osservazione 3.51. $\square$

Definizione 3.53.

L'immagine in $\alpha(1)$ del campo X ottenuto dalla proposizione precedente per estensione parallela da un vettore $X_0 \in T_{\alpha(0)}\Sigma$ si dice ottenuta per **trasporto parallelo** sulla curva α .

Osservazione 3.54.

Dal momento che il sistema delle equazioni del trasporto parallelo è lineare e omogeneo, combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni, e quindi l'operazione di trasporto parallelo è lineare.

Proposizione 3.55 (Il trasporto parallelo conserva le distanze).

L'operazione di trasporto parallelo conserva il prodotto scalare dei vettori, e quindi anche le distanze. Inoltre, manda basi di un piano tangente all'altro mantenendone l'orientazione.

Dimostrazione.

Siano X e Y due campi paralleli lungo una stessa curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$. Si definisce la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in modo tale che:

$$f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)).$$

Derivando f in t otteniamo:

$$f'(t) = D_{\alpha'(t)}X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot D_{\alpha'(t)}Y(\alpha(t)).$$

Poiché X e Y sono paralleli lungo α , le due derivate direzionali sono parallele alla normale (locale) in $\alpha(t)$, mentre i termini non derivati ne sono perpendicolari. Dunque $f'(t)$ è nullo, e quindi il prodotto scalare si conserva.

Consideriamo ora la funzione $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

$$\varphi(t) = (X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))) \cdot \underline{n}.$$

Poiché φ è continua e non può essere $\varphi(t) = 0$ ad alcun tempo t , essendo $[0, 1]$ connesso, deve essere necessariamente $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$ su tutto $[0, 1]$, da cui la tesi. $\square$

3.5 Geodetiche

3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo

Definizione 3.56.

Una curva α su una superficie Σ si dice **geodetica** se il campo α' è parallelo lungo α , ovvero si ha:

$$\nabla_{\alpha'}\alpha' = (\alpha'')^\top = 0.$$

Osservazione 3.57.

Per le geodetiche è necessario specializzare correttamente le equazioni del trasporto parallelo. Ponendo $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$, otteniamo:

$$(\text{Geo}): \begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2 = 0, \end{cases}$$

Proposizione 3.58.

Sia α una geodetica su Σ . Allora $\|\alpha'\|$ è costante.

Dimostrazione.

Derivando $\alpha' \cdot \alpha'$ si ottiene $2(\alpha'' \cdot \alpha')$, che però è nullo dal momento che $\alpha'' \perp T_\alpha\Sigma$, da cui la tesi. $\square$

3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale

Proposizione 3.59.

Sia Σ una superficie e q un suo punto. Allora per ogni $v \in T_q\Sigma$ esiste $\varepsilon > 0$ e un'unica geodetica $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ tale per cui $\gamma_v(0) = q$ e $\gamma'_v(0) = v$.

Dimostrazione.

Segue dall'applicazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale di una soluzione per un sistema di equazioni differenziali al sistema dell'Osservazione 3.57. $\square$

Osservazione 3.60.

Possiamo in realtà assumere che $\gamma_v(t)$ sia definita su $[0, 1]$ senza alcuna perdita di generalità. Infatti, se $\gamma_v(t)$ è definita su $(-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva $\gamma_v(st)$ è ben definita per $t \in [0, 1]$, dove $s \in (0, \varepsilon)$. Per unicità di $\gamma_{sv}(t)$, dal momento che $\gamma_v(st)$ ne rispetta le condizioni iniziali, si ha $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$.

Osservazione 3.61.

Per compattezza di $\{v \in T_P\Sigma \mid \|v\| = 1\}$, esiste un $\varepsilon_{\min}$ per il quale per ogni vettore v di norma $\|v\| < \varepsilon_{\min}$ possiamo considerare la geodetica $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$.

Dal Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali è ben definita e liscia allora l'applicazione $v \mapsto \gamma_v(1)$, dove $\|v\| < \varepsilon_{\min}$.

Definizione 3.62 (Mappa esponenziale).

Sia P un punto su una superficie Σ e sia $\underline{x}$ una sua parametrizzazione. Sia:

$$U_P = \{v \in T_P\Sigma \mid \|v\| < \varepsilon_{\min}\},$$

dove $\varepsilon_{\min}$ è definito secondo l'Osservazione 3.61.

Si definisce allora la **mappa esponenziale** $\exp_P : U_P \rightarrow \underline{x}(U_P)$ come l'applicazione con la seguente proprietà:

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

Definizione 3.63 (Intorno normale).

Sia P un punto su una superficie Σ e sia $\underline{x}$ una sua parametrizzazione. Si dice che l'immagine $N_P \stackrel{\text{def}}{=} \exp_P(U_P)$ è un **intorno normale** di P .

Osservazione 3.64.

Una volta ben definita la mappa esponenziale $\exp_P$, possiamo riparametrizzare Σ utilizzando $\exp_P$, definendo sul suo dominio naturale l'applicazione:

$$\underline{y}(u, v) = \exp_P(u\underline{e}_1 + v\underline{e}_2),$$

dove $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ è una base ortonormale di $T_P\Sigma$.

Questa mappa, detta indotta dalle **coordinate normali**, soddisfa alcune importanti proprietà:

- $\underline{y}(0, 0) = P$,
- $\underline{y}_u(0, 0) = \frac{d}{dt} \exp_P(t\underline{e}_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{t\underline{e}_1}(1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{\underline{e}_1}(u) \Big|_{t=0} = \underline{e}_1$,
- $\underline{y}_v(0, 0) = \dots = \underline{e}_2$.

3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze

Lemma 3.65 (Gauss, le geodetiche sono ortogonali ai cerchi indotti dalla mappa esponenziale).

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ una base ortonormale di $T_P\Sigma$. Sia ε lo stesso valore che definisce U_P . Sia $v_k : [0, 2\pi] \rightarrow U_P$ la curva definita come:

$$v_k(t) = k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2), \quad k < \varepsilon.$$

Allora ogni geodetica γ_w è ortogonale a $\exp_P \circ v_k$ per $k < \varepsilon$ e $w \in U_P$.

Dimostrazione.

Sia $\underline{x} : [0, 1] \cdot \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ definita come:

$$\underline{x}(u, t) = \exp_P(u \cdot v_k(t)) = \gamma_{v_k(t)}(u).$$

Dimostriamo la tesi mostrando che $\underline{x}_u$ (che parametrizza le geodetiche) e $\underline{x}_t$ (che parametrizza i cerchi) sono ortogonali.

Osserviamo che:

$$(\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t)_u = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_t + \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{tu}.$$

Inoltre $\underline{x}_{uu}(u, t_0) = (\gamma_{v_k(t_0)}(u))''$ è normale a $T_P\Sigma$ dacché $\gamma_{v_k(t_0)}$ è una geodetica, e quindi $\underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_t = 0$.

Ancora $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = \|\underline{v}_k(t)\|^2 = k^2$ è costante, e quindi, derivando $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u$ per t , si ottiene anche $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ut} = 0$.

Pertanto $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t$ è costante lungo u . È sufficiente allora mostrare la tesi per $u = 0$:

$$\underline{x}(0, t) = P \implies \underline{x}_t(0, t) = 0,$$

e quindi $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t = 0$ lungo $u = 0$. $\square$

Corollario 3.66 (Le geodetiche minimizzano localmente le distanze).

Sia $P' = \gamma_v(1)$ con $v \in U_P$ un punto distinto da P . Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow N_P$ è una curva liscia con $\alpha(0) = P$ e $\alpha(1) = P'$, allora:

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma_v).$$

Dimostrazione.

Parametrizziamo N_P usando $\underline{x}$ come definita nella dimostrazione del Lemma di Gauss (3.65) per un $k = \|v\|$.

Per la Proposizione 3.1, α si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), \tau(t)),$$

con u e τ lisce. Allora, derivando α e applicando il Lemma di Gauss (3.65) si ottiene:

$$\|\alpha'\|^2 \geq (u')^2 \|v\|^2.$$

Allora:

$$\ell(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\| dt \geq \|v\| (u(1) - u(0)) = \|v\| = \ell(\gamma_v),$$

dove si è usato che $u(0) = 0$ (P nelle coordinate normali corrisponde a $(0, 0)$) e che $u(1) = 1$ (P' ha già raggio k). $\square$

3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione

Definizione 3.67 (Angolo di una curva con il parallelo).

Sia Σ una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica $\underline{x}$. Data una curva γ su di essa, si definisce $\varphi(\gamma(t))$ come segue:

$$\varphi(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\gamma'(t), \underline{x}_v(\gamma(t))),$$

ovverosia $\varphi(\gamma(t))$ è l'angolo tra la curva γ in $\gamma(t)$ e il parallelo a cui appartiene $\gamma(t)$.

Definizione 3.68 (Raggio di una curva rispetto all'asse z). Sia Σ una superficie di rotazione. Sia data una curva γ su di essa. Si definisce allora il **raggio di γ rispetto all'asse di rotazione z** come la distanza di γ dall'asse z , ovverosia:

$$r(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_{xy}(\gamma(t))\|.$$

Proposizione 3.69 (Relazione di Clairaut).

Sia γ una geodetica su una superficie di rotazione Σ . Allora γ soddisfa la **relazione di Clairaut**:

$$r(\gamma(t)) \cdot \cos(\varphi(\gamma(t))) = \text{cost.} \quad (\text{Clairaut})$$

Inoltre una curva soddisfacente la relazione di Clairaut che non parametrizza un parallelo è una geodetica.

Osservazione 3.70.

Sono geodetiche anche le curve soddisfacenti (Clairaut) che parametrizzano paralleli, a patto che, se Σ è una rotazione sulla funzione f , valga $f' = 0$ sui punti della geodetica; ovverosia, in un certo senso, sono geodetiche i “paralleli stazionari”.

3.5.5 Curvatura geodetica

Osservazione 3.71.

Sia α una curva di Frenet su una superficie Σ . Osserviamo che N_α è perpendicolare a T_α , e quindi dovrà scriversi in una qualche combinazione lineare della base ortonormale $\{\underline{n}, \underline{n} \times T_\alpha\}$ di $(T_\alpha)^\perp$, dove $\underline{n}$ è una normale (locale).

Sappiamo già dall'Osservazione 3.20 che $\dot{T}_\alpha \cdot \underline{n}$ è la curvatura normale $\kappa_{\alpha,n}$. Ha quindi senso definire il seguente oggetto matematico:

Definizione 3.72 (Curvatura geodetica).

Sia α una curva di Frenet su una superficie Σ . Si definisce la **curvatura geodetica** di α nel punto P come:

$$\kappa_{\alpha,g} = \dot{T}_\alpha(P) \cdot (\underline{n}(P) \times T_\alpha(P)),$$

dove $\underline{n}$ è una normale (locale) su Σ .

Osservazione 3.73.

Quindi N_α si scrive come:

$$N_\alpha = \kappa_{\alpha,n} \underline{n} + \kappa_{\alpha,g} (\underline{n} \times T_\alpha),$$

da cui si ricava immediatamente la seguente relazione:

$$\kappa_\alpha^2 = \kappa_{\alpha,n}^2 + \kappa_{\alpha,g}^2.$$

Proposizione 3.74 (In una geodetica curvatura normale e curvatura della curva coincidono).

Sia α una curva p.l.a. di Frenet su una superficie Σ . Allora α è una geodetica se e solo se:

$$\kappa_{\alpha,g} \equiv 0,$$

ovverosia se e solo se:

$$\kappa_\alpha \equiv \kappa_{\alpha,n}.$$

Dimostrazione.

Infatti, se α è una geodetica, allora α'' è perpendicolare a $T_P \Sigma$. Quindi, dal momento che α è p.l.a., si deve avere $N_\alpha(P)$ perpendicolare a $T_P \Sigma$, ossia parallelo a $\underline{n}$. Il viceversa è analogo. $\square$

3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet

3.6.1 Prime definizioni

Definizione 3.75 (Curva chiusa).

Una curva (non necessariamente liscia) $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ si dice **chiusa** se $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definizione 3.76 (Curva semplice).

Una curva (non necessariamente liscia) $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ si dice **semplice** se $\alpha(t) = \alpha(t')$ può avvenire solo sugli estremi a, b , ovverosia non è autointersecante.

Definizione 3.77 (Curva regolare a tratti).

Una curva (non necessariamente liscia) $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ si dice **regolare a tratti** se esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$ di $[a, b]$ tale per cui $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è regolare per ogni $i < \ell$.

3.6.2 Regione di una superficie e area

Definizione 3.78 (Regione).

Un sottosinsieme R di una superficie Σ si dice **regione** se è un chiuso nella topologia di Σ , il cui bordo è traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.

Osservazione 3.79.

Dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16 segue $\underline{x}_s \times \underline{x}_t = \det(Jf_{\underline{x},y})(\underline{y}_u \times \underline{y}_v)$. Da ciò segue facilmente tramite un cambio di variabili che:

$$\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_s \times \underline{x}_t\| ds dt = \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_u \times \underline{y}_v\| du dv.$$

Definizione 3.80 (Area di una regione).

Sia R una regione di Σ contenuta dentro l'immagine di una parametrizzazione $\underline{x}$. Si definisce allora la sua **area** come:

$$A(R) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv,$$

che, per l'Osservazione 3.79, è invariante al cambio di parametrizzazione.

Proposizione 3.81 (Formula per $\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|$).

Per ogni coppia di vettori v, w vale la seguente relazione:

$$\|v \times w\|^2 + \|v \cdot w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Applicando questa identità a $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$, si ottiene la seguente formula (relativa a $\underline{x}$):

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

3.6.3 Integrazione rispetto a una regione

Definizione 3.82 (Integrazione rispetto all'area).

Se $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia, si definisce il suo integrale rispetto a una regione R di Σ come segue:

$$\int_R \varphi dA \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv.$$

Osservazione 3.83.

Ponendo $\varphi \equiv 1$, si ottiene:

$$\int_R dA = A(R).$$

3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario

Definizione 3.84 (Angoli esterni).

Sia R una regione di una superficie Σ . Se α ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità $t_1, t_2, \dots, t_n$ si definiscono gli **angoli esterni** di R come:

$$\varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\alpha'_+(t_i), \alpha'_-(t_{i+1})),$$

dove α_+ e α_- indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

Teorema 3.85 (Gauss-Bonnet locale).

Sia $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ una regione semplicemente connessa con angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R \kappa dA + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi. \quad (\text{GBL})$$

Definizione 3.86 (Angoli interni).

Sia R una regione di una superficie Σ . Se α ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità $t_1, t_2, \dots, t_n$ si definiscono gli **angoli interni** di R come:

$$\iota_i \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \varepsilon_i,$$

dove α_+ e α_- indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

Corollario 3.87.

Sia $T \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ una triangolo su Σ , ovvero sia una regione con tre punti non regolari sul bordo, collegati tramite geodetiche. Allora vale:

$$\int_R \kappa dA = \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 - \pi.$$

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla definizione di angolo interno e dal Teorema di Gauss-Bonnet locale (3.85), dacché $\kappa_g \equiv 0$ lungo le geodetiche. $\square$

Corollario 3.88.

In un piano, la somma degli angoli interni di un triangolo è esattamente π . Sulla sfera, invece è strettamente maggiore di π . Su una sella è invece strettamente minore.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Corollario 3.87, visto che su un piano si ha $\kappa \equiv 0$, su una sfera $\kappa > 0$ e su una sella $\kappa < 0$. $\square$

3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione

Definizione 3.89 (Superficie orientata con bordo).

Si dice che Σ è una **superficie orientata con bordo** (eventualmente sconnesso) se:

$$\Sigma = \hat{\Sigma} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n R_i \right),$$

dove $\hat{\Sigma}$ è una superficie orientata, compatta con $\partial \hat{\Sigma} = \emptyset$, e le R_i sono regioni di $\hat{\Sigma}$.

In tal caso si pone:

$$\partial \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \partial R_i,$$

mentre i suoi angoli interni/esterni diventano quelli delle singoli regioni.

Definizione 3.90 (Triangolarizzazione).

Una **triangolarizzazione** di una superficie Σ è una famiglia $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$ di insiemi tali per cui valgono le seguenti proprietà:

- $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^n \Delta_\lambda$,
- Δ_λ è l'immagine di un triangolo euclideo tramite una parametrizzazione regolare compatibile con l'orientazione di Σ .
- Se $\lambda \neq \mu$, allora $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$ può essere vuoto, un lato comune e un singolo vertice.
- Se Δ_λ e Δ_μ hanno in comune un lato, allora lo percorrono con orientazioni opposte.
- $\Delta_\lambda \cap \partial \Sigma$ può essere vuoto, un lato o un vertice.

3.6.6 Teorema di Radó e caratteristica di Eulero

Teorema 3.91 (Radó).

Ogni superficie orientata con bordo ammette una triangolarizzazione.

Definizione 3.92 (Caratteristica di Eulero).

Sia $\tau = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$ una triangolarizzazione di una superficie orientata con bordo. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero** come:

$$\chi(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} V - L + T,$$

dove V è il numero di vertici di τ , L è il numero di lati e T è il numero di triangoli.

Fatto 3.93.

La caratteristica di Eulero non dipende dalla triangolarizzazione scelta.

3.6.7 Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse

Teorema 3.94 (Gauss-Bonnet globale).

Sia Σ una superficie orientata con bordo con angoli esterni $\{\varepsilon_i\}_i$. Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial \Sigma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} \kappa dA + \sum_i \varepsilon_i = 2\pi \chi(\Sigma). \quad (\text{GBG})$$

Dimostrazione.

La dimostrazione segue i prossimi due punti:

1. Si sceglie una triangolarizzazione di Σ grazie al Teorema di Radó (3.91) e si applica il Teorema di Gauss-Bonnet locale (3.85) ad ogni triangolo.
2. Si sommano le varie identità date da (GBL). In questo modo i bordi interni si semplificano (sono lati in comune tra due triangoli, quindi percorsi in sensi opposti), ottenendo $\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds$. Allora stesso modo gli angoli interni della triangolarizzazione si sommano a $2\pi(L - V)$, mentre i 2π si sommano a T .

□

Corollario 3.95.

Se Σ è una superficie orientata compatta con $\partial\Sigma = \emptyset$, allora:

$$\int_{\Sigma} \kappa dA = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Definizione 3.96 (Superficie chiusa).

Una superficie Σ si dice **chiusa** se è compatta e $\partial\Sigma = \emptyset$.

Teorema 3.97 (classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse).

A meno di omeomorfismo, le superfici chiuse, orientabili e connesse sono le superfici di genere, tali per cui $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

Corollario 3.98.

Sia Σ una superficie chiusa e orientabile non omeomorfa alla sfera. Allora su Σ esistono sia punti ellittici, che iperbolici, che parabolici.

Parte 4

Varietà e teoria del grado

4.1 Varietà differenziabili e prime definizioni

4.1.1 Mappe C^∞ e diffeomorfismi

Definizione 4.1 (Mappe lisce tra due sottinsiemi).

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ sottinsiemi qualsiasi. Allora una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice di **classe C^∞** (o *liscia*) se per ogni $x \in X$ esistono un aperto W_x e una funzione $F : W_x \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, chiamata **estensione**, di classe C^∞ per cui:

$$F|_{W_x \cap X} = f|_{W_x \cap X}.$$

Osservazione 4.2.

Osserviamo che i sottinsiemi di X della forma $W \cap X$ con W aperto sono esattamente gli aperti per la topologia di sottospazio di X .

Definizione 4.3 (Diffeomorfismo).

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ sottinsiemi qualsiasi. Allora una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **diffeomorfismo** se è un omeomorfismo, è liscia e ammette inversa liscia.

Osservazione 4.4.

Le definizioni di mappa liscia e diffeomorfismo date sono chiaramente compatibili con le usuali definizioni date su aperti di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 4.5.

La composizione di mappe lisce è liscia. La restrizione di una mappa liscia è liscia.

Dimostrazione.

Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due mappe lisce con $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $Z \subseteq \mathbb{R}^p$. Sia $x \in X$. Allora, poiché f è liscia, esistono $W_x \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto e $F : W_x \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ liscia tale per cui:

$$F|_{W_x \cap X} = f|_{W_x \cap X}.$$

Analogamente, per $f(x) \in Y$ esistono $U_{f(x)} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ aperto e $G : U_{f(x)} \rightarrow \mathbb{R}^p$ liscia tale per cui:

$$G|_{U_{f(x)} \cap Y} = g|_{U_{f(x)} \cap Y}.$$

Pertanto, a meno di restringere W_x per ottenere $F(W_x \cap X) \subseteq U_{f(x)} \cap Y$, si ha:

$$G \circ F|_{W_x \cap X} = g \circ f|_{W_x \cap X},$$

dove $g \circ f$ è liscia; questo dimostra che la composizione di mappe lisce è liscia.

La restrizione di una mappa è liscia dal momento che è composizione di una mappa liscia con una mappa di inclusione, che è liscia in quanto si estende all'identità. $\square$

4.1.2 Varietà differenziabili, varietà chiuse, carte, atlanti, parametrizzazioni locali e funzioni di transizione

Definizione 4.6 (Varietà differenziabile liscia senza bordo).

Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice **varietà (differenziabile liscia senza bordo) di dimensione $m > 0$** (o m -varietà) se per ogni suo punto x esistono un intorno aperto W_x in $\mathbb{R}^k$ e un diffeomorfismo $f_x : W_x \cap M \rightarrow U$ verso un aperto U in $\mathbb{R}^m$. Per $m = 0$, si richiede invece che ogni $W_x \cap M$ sia un singolo punto.

Le coppie della forma $(f_x, W_x \cap M)$ si dicono **carte locali**, e formano un **atlante** della varietà. L'inversa di f_x si dice invece **parametrizzazione locale** di x in M .

Definizione 4.7 (Varietà chiusa).

Si dice **varietà chiusa** una varietà (senza bordo) che è compatta.

Osservazione 4.8.

Le varietà di dimensione zero sono esattamente le unioni di punti isolati.

Osservazione 4.9.

Le carte locali inducono un ricoprimento aperto di M , e quindi, qualora M fosse compatta, si potrebbe sempre prendere un atlante finito.

Inoltre, poiché $\mathbb{R}^k$ è II-numerabile, si può sempre prendere un atlante numerabile.

Osservazione 4.10.

Ogni aperto di $\mathbb{R}^k$ è una varietà di dimensione k . Le superfici sono invece varietà di dimensione 2, le cui parametrizzazioni locali sono date dalle parametrizzazioni regolari.

Osservazione 4.11 (Gli aperti di varietà sono sottovarietà).

Se N è un aperto di una m -varietà M , N eredita da M una struttura di m -varietà per la quale l'atlante è dato dalle intersezioni delle carte locali con N stesso. Infatti N è aperto, e dunque l'immagine di una carta locale sarà anch'esso un aperto su $\mathbb{R}^m$.

Definizione 4.12 (Funzione di transizione).

Date due parametrizzazioni locali $f : U \rightarrow f(U)$ e $g : V \rightarrow g(V)$ con intersezione delle immagini non vuota, si definisce la **funzione di transizione da f a g** come la seguente funzione:

$$g^{-1} \circ f : f^{-1}(g(V)) \rightarrow g^{-1}(f(U)).$$

4.1.3 Prodotto di varietà

Proposizione 4.13 (Prodotto di varietà).

Siano $M \subseteq \mathbb{R}^k$ e $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$ varietà di dimensione m e n . Allora $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$ è una varietà di dimensione $m+n$.

Un atlante per $M \times N$ è dato da:

$$\{(f_i \times g_j, (W_i \times Q_j) \cap (M \times N))\}_{i,j},$$

dove $\{(f_i, W_i \cap M)\}_i$ è un atlante di M e $\{(g_j, Q_j \cap N)\}_j$ è un atlante di N .

Dimostrazione.

Segue dal fatto che i prodotti $f_i \times g_j$ sono diffeomorfismi in quanto prodotti di diffeomorfismi. $\square$

4.2 Spazio tangente e differenziale su mappe tra varietà

4.2.1 Differenziale su aperti di $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo la definizione di differenziale per mappe su aperti di spazi reali:

Definizione 4.14 (Differenziale per $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$).

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^k$ e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ una funzione liscia. Allora il **differenziale** $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ nel punto $x \in U$ è la funzione tale per cui:

$$df_x(h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Equivalentemente df_x è l'unica funzione lineare tale per cui:

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Osservazione 4.15.

Il differenziale df_x rispetta alcune proprietà fondamentali:

- (i.) La matrice di df_x è data dallo jacobiano $Jf(x) = (\partial_{x_j} f_i(x))_{i,j}$.
- (ii.) Il differenziale rispetta la *regola della catena* (chain rule):

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$
- (iii.) Data id_U su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^k$, allora $d(\text{id}_U)_x = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$ per ogni $x \in U$.
- (iv.) Dati $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$ con U' aperto, l'inclusione $\iota : U' \rightarrow U$ è tale per cui $d\iota_x = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$ per ogni $x \in U'$.
- (v.) Se $L : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ è lineare, allora $dL_x = L$ per ogni $x \in U$.

Proposizione 4.16.

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$ aperti. Sia $f : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo. Allora $k = \ell$ e df_x è un isomorfismo di $\mathbb{R}^k$ per ogni $x \in U$.

Dimostrazione.

Sia $g : V \rightarrow U$ l'inversa di f . Poiché f è un diffeomorfismo, g è liscia. Sia $x \in U$. Allora:

$$(i.) \text{id}_{\mathbb{R}^k} = d(\text{id}_U)_x = d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x,$$

$$(ii.) \text{id}_{\mathbb{R}^\ell} = d(\text{id}_V)_{f(x)} = d(f \circ g)_{f(x)} = df_x \circ dg_{f(x)}.$$

Da (i.) si deduce che df_x è iniettiva, mentre da (ii.) si deduce che è surgettiva. Dunque df_x è un isomorfismo (e quindi vale anche $k = \ell$). $\square$

4.2.2 Spazio tangente in un punto di una varietà

Osservazione 4.17 (Lo spazio tangente è ben definito).

Sia M una varietà di dimensione m . Siano $g : U \rightarrow W \cap M$ e $h : U' \rightarrow W' \cap M$ due parametrizzazioni locali di $x \in M$ con $g(u) = h(u') = x$.

Supponiamo senza perdita di generalità che $W' = W$ (è sufficiente restringere le immagini). La funzione $g \circ h^{-1}$ è un diffeomorfismo in quanto composizione di diffeomorfismi (vd. Proposizione 4.5). Allora per la Proposizione 4.16 $d(h^{-1} \circ g)_u$ è un isomorfismo.

Osserviamo che:

$$dg_u = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u = dh_{u'} \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Dal momento che $d(h^{-1} \circ g)_u$ è in particolare surgettiva, si ha:

$$dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_{u'}(\mathbb{R}^m).$$

Definizione 4.18 (Spazio tangente).

Sia x un punto di una varietà M di dimensione m . Presa una parametrizzazione locale $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$ di x con $g(u) = x$, si definisce lo **spazio tangente di M in x** come:

$$T_x M \stackrel{\text{def}}{=} dg_u(\mathbb{R}^m).$$

Proposizione 4.19.

Sia x un punto di una varietà M di dimensione m . Allora:

$$\dim T_x M = m.$$

Dimostrazione.

Si prenda una parametrizzazione locale $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$ di x con $g(u) = x$. È sufficiente dimostrare che dg_u è una mappa iniettiva.

La mappa g è indotta dalla carta locale tramite un'estensione $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ con:

$$F|_{W \cap M} = g^{-1}.$$

Osserviamo allora che:

$$\text{id}_{\mathbb{R}^m} = d(F \circ g)_u = dF_x \circ dg_u,$$

da cui si deduce che dg_u ammette un'inversa sinistra, ed è dunque iniettiva. $\square$

Osservazione 4.20 (Spazio tangente in un prodotto di varietà).

Siano M e N due varietà di dimensione m e n . Se $f_i \times g_j$ è una carta locale di $M \times N$, come ottenuto nella Proposizione 4.13, allora:

$$\begin{aligned} T_{(m,n)}(M \times N) &= d(f_i^{-1} \times g_j^{-1})_{(m,n)}(\mathbb{R}^{m+n}) \\ &\cong d(f_i^{-1})(\mathbb{R}^m) \times d(g_j^{-1})(\mathbb{R}^n) \\ &= T_m M \times T_n N \end{aligned}$$

Quindi vale il seguente isomorfismo canonico, ottenuto proiettando sulle componenti:

$$T_{(m,n)}(M \times N) \cong T_m M \times T_n N.$$

4.2.3 Differenziale per mappe lisce tra varietà

Osservazione 4.21 (Il differenziale per mappe lisce è ben definito).

Siano $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà di dimensione m , $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$ un'altra varietà, e sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà.

Sia $F : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ un'estensione di f per un intorno aperto di $x \in M$. Siano $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$ una parametrizzazione locale di x e $h : V \rightarrow N$ una parametrizzazione locale di $f(x)$ con $g(u) = x$ e $h(v) = f(x)$.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{F} & N \\ \uparrow g & & & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{\quad h^{-1} \circ F \circ g \quad} & & & V \end{array}$$

Dal diagramma commutativo si deduce che:

$$dF_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ F \circ g)_u.$$

Pertanto $dF_x(T_x M)$ non dipende dalla scelta dell'estensione F e vale:

$$dF_x(T_x M) \subseteq T_{f(x)} N.$$

Definizione 4.22 (Differenziale su mappe tra varietà).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa tra varietà. Se F è un'estensione di f in x , si definisce il **differenziale di f in x** $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ come segue:

$$df_x \stackrel{\text{def}}{=} dF_x|_{T_x M}.$$

Osservazione 4.23.

Le proprietà del differenziale su aperti di $\mathbb{R}^n$ si trasferiscono facilmente al differenziale su mappe tra varietà:

- (i.) Il differenziale rispetta la *regola della catena* (chain rule):

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$

- (ii.) Data id_M per una varietà M , allora $d(\text{id}_M)_x = \text{id}_{T_x M}$ per ogni $x \in M$.

- (iii.) Dati M' e M sono varietà con $M' \subseteq M$, l'inclusione $\iota : M' \rightarrow M$ è liscia, $d\iota_x : T_x M' \rightarrow T_x M$ è iniettiva e $T_x M'$ è un sottospazio di $T_x M$.

- (iv.) Se $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, allora df_x è un isomorfismo per ogni $x \in M$.

Proposizione 4.24 (Differenziale per prodotti di varietà).

Sia $f : M \rightarrow N \times O$ una mappa liscia, dove M , N e O sono varietà. Se $f(x) = (g(x), p(x))$, allora g e p sono lisce e vale:

$$df_x(h) = (dg_x(h), dp_x(h)).$$

4.3 Valori regolari e critici

4.3.1 Prime definizioni

Definizione 4.25 (Punti regolari o critici).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, con $\dim M = m$ e $\dim N = n$.

Sia $x \in M$. Si dice che x è un **punto critico** se $\text{rk}(df_x) < n$, e altrimenti si dice che è un **punto regolare**.

Indichiamo con $\text{crit}(f)$ l'insieme dei punti critici di f .

Definizione 4.26 (Valori regolari o critici).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, con $\dim M = m$ e $\dim N = n$.

Sia $y \in N$. Si dice che y è un **valore critico** se è immagine di almeno un punto critico, e altrimenti si dice che è un **valore regolare** (in particolare lo è se $f^{-1}(y) = \emptyset$).

Osservazione 4.27.

È immediato osservare che l'insieme dei valori critici di f è esattamente $f(\text{crit}(f))$.

Osservazione 4.28 (I punti regolari formano un aperto).

Se x è un punto regolare di una mappa liscia $f : M \rightarrow N$, esiste sempre un intorno aperto U di x in M composto di soli punti regolari.

Scelta una parametrizzazione locale $g : U \rightarrow g(U)$ di un intorno aperto di x , si può scegliere infatti una base "comune" per ogni $T_y M$ al variare di y in $g(U)$, e così si può rappresentare df_y matricialmente.

Poiché x è regolare, df_x è surgettiva. Allora df_x ammette un minore di taglia massima di determinante non nullo. Il determinante di questo minore, al variare di $y \in g(U)$, varia continuamente; in particolare, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x in cui continua a essere non nullo.

Equivalentemente esiste un intorno aperto di x in cui tutti i punti sono regolari.

4.3.2 Teorema di invertibilità locale per varietà e lemma della pila di dischi

Teorema 4.29 (di invertibilità locale per varietà).

Siano M e N due varietà di stessa dimensione. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Se $x \in M$ è regolare, allora esiste un intorno A di x in M tale per cui $f|_A : A \rightarrow f(A)$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione.

Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x in M con $g(u) = x$. Sia $h : V \rightarrow h(V)$ una parametrizzazione locale di $f(x)$ in N con $h(v) = f(x)$. A meno di restringere il dominio di g , possiamo supporre che $f(g(U)) \subseteq h(V)$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$

Osserviamo che:

$$df_x \circ dg_u = dh_{f(x)} \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u.$$

Dal momento che x è regolare, df_x è un isomorfismo. Poiché anche dg_u e $dh_{f(x)}$ sono isomorfismi (g e h sono diffeomorfismi, vd. Proposizione 4.16), allora anche $d(h^{-1} \circ f \circ g)_u$ è un isomorfismo.

Per il Teorema di invertibilità locale sugli aperti di $\mathbb{R}^n$, allora esiste un aperto A' di U su cui $h^{-1} \circ f \circ g|_{A'}$ è un diffeomorfismo. Osserviamo che:

$$f|_{g(A')} = h|_{h^{-1}(f(g(A')))} \circ h^{-1} \circ f \circ g|_{A'} \circ g^{-1}|_{g(A')}.$$

Quindi $f|_{g(A')}$ è un diffeomorfismo in quanto composizione di restrizioni di diffeomorfismi (vd. Proposizione 4.5), e $A \stackrel{\text{def}}{=} g(A')$ è l'intorno cercato. $\square$

Proposizione 4.30.

Sia M una varietà compatta. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà della stessa dimensione. Se $y \in N$ è un valore regolare, allora $f^{-1}(y)$ è un insieme finito.

Dimostrazione.

Poiché N è T1, $f^{-1}(y)$ è un chiuso di M ; pertanto, essendo M compatta, $f^{-1}(y)$ è un compatto.

Mostriamo ora che $f^{-1}(y)$ è discreto. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Dal momento che y è un valore regolare, x è un punto regolare. Quindi esiste per il Teorema 4.29 un intorno aperto $A \subseteq M$ di x per cui $f|_A$ è un diffeomorfismo. In questo intorno x è l'unica controimmagine di y mediante f , e quindi $f^{-1}(y)$ è discreto.

Dal momento che $f^{-1}(y)$ è sia compatto che discreto, $f^{-1}(y)$ è finito. $\square$

Lemma 4.31 (della pila dei dischi).

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M compatta. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia con $y \in N$ valore regolare. Allora esiste un intorno V di y tale per cui:

$$|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|, \quad \forall y' \in V.$$

Dimostrazione.

Sappiamo dalla Proposizione 4.30 che $f^{-1}(y)$ è finito. Se $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$, riprendendo gli intorni aperti A_i come definiti nella dimostrazione della Proposizione 4.30, allora possiamo definire:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n f(A_i) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Gli $f(A_i)$ sono aperti dal momento che f è un diffeomorfismo. L'insieme $M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$ è un chiuso in un compatto, e quindi è compatto; allora $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i)$ è compatto, e dunque chiuso essendo N uno spazio T2. Quindi $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i)^c$ è aperto. Si conclude dunque che V è aperto.

Su V , $|f^{-1}(-)|$ è necessariamente costante: la prima intersezione assicura che esistano almeno $|f^{-1}(y)|$ controimmagini, e la sottrazione insiemistica assicura che non possano esserne di più. $\square$

4.3.3 Misura nulla e teoremi di Sard e Brown

Definizione 4.32 (Sottinsiemi di varietà di misura nulla).

Sia A un sottinsieme di una varietà M di dimensione m . Si dice che A ha **misura nulla (rispetto a M)** se per ogni carta locale $(f, W \cap M)$, $f(A \cap W)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$.

Teorema 4.33 (di Sard, per le varietà).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra due varietà. Allora l'insieme dei valori critici $f(\text{crit}(f))$ ha misura nulla in N .

Dimostrazione.

Sia $\{(f_i, W_i \cap M)\}_{i \geq 1}$ un atlante numerabile di M e sia $(g, Z \cap N)$ una carta locale di N . Poniamo:

$$h_i \stackrel{\text{def}}{=} g \circ f|_{W_i \cap M} \circ f_i.$$

A meno di restringere o ignorare W_i , possiamo supporre $f(W_i \cap M) \subseteq Z \cap N$.

$$\begin{array}{ccc} W_i \cap M & \xrightarrow{f|_{W_i \cap M}} & Z \cap N \\ \downarrow f_i & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{h_i = g \circ f|_{W_i \cap M} \circ f_i} & V \end{array}$$

Osserviamo che:

$$d(h_i)_u = dg_{f(f_i^{-1}(u))} \circ df_{f_i^{-1}(u)} \circ d(f_i^{-1})_u$$

Allora, poiché $dg_{f(f_i^{-1}(u))}$ e $d(f_i^{-1})_u$ sono isomorfismi (f_i e g sono diffeomorfismi, vd. Proposizione 4.16), i valori critici di f sono in corrispondenza con quelli degli h_i tramite g .

Per il Teorema di Sard sugli aperti di $\mathbb{R}^n$, $g(f(\text{crit}(f)) \cap W_i) \cap Z$ ha allora misura zero. Allora, $g(f(\text{crit}(f)) \cap Z)$, che è un'unione numerabile di insiemi di misura nulla, ha misura nulla. Quindi $f(\text{crit}(f))$ ha misura nulla per definizione. $\square$

Corollario 4.34 (di Brown).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra due varietà. Allora l'insieme dei valori regolari di f è denso in N .

Dimostrazione.

È sufficiente verificare che in un intorno di un valore critico $y \in N$ ci sia almeno un valore regolare. Se così non fosse, tramite una carta locale si troverebbe la chiusura di un rettangolo di soli valori critici, il cui volume è non nullo. Allora $f(\text{crit}(f))$ non avrebbe misura nulla, che è assurdo per il Teorema 4.33. $\square$

4.3.4 Varietà a partire da valori regolari

Teorema 4.35.

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà con $\dim M = m \geq n = \dim N$. Se $y \in N$ è regolare, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà di dimensione $m - n$ (codimensione n).

Dimostrazione.

Sia k tale per cui $M \subseteq \mathbb{R}^k$, e sia $x \in f^{-1}(y)$. Allora x è per ipotesi un punto regolare, e quindi $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ è una mappa surgettiva, con:

$$\dim \ker(df_x) = m - n.$$

Sia $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ una mappa lineare, dove $T_x M \subseteq \mathbb{R}^k$ e $L|_{T_x M}$ è isomorfismo.

Consideriamo la mappa $F : M \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ tale per cui:

$$F(m) = (f(m), L(m)).$$

Allora, per la Proposizione 4.24, vale:

$$dF_x(v) = (df_x(v), dL_x(v)) = (df_x(v), L(v)),$$

dove si è usato che L è una mappa lineare. $dF_x(v)$ si annulla solo per $v = 0$, essendo $L|_{T_x M}$ un isomorfismo; quindi $dF_x(v)$ è invertibile, e x è regolare per F .

Osserviamo che F è una mappa tra varietà della stessa dimensione (vd. Proposizione 4.13), e quindi, per la Proposizione 4.29, esiste un intorno U di x in M tale per cui $F|_U : U \rightarrow V \stackrel{\text{def}}{=} F(U)$ è un diffeomorfismo.

La restrizione $F|_U$ mappa $U \cap f^{-1}(y)$ su un aperto di $V \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n})$, che è diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$ ($\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^{m-n}$). In particolare induce una carta locale per x , e quindi $f^{-1}(y)$ è una varietà di dimensione $m - n$. $\square$

Proposizione 4.36.

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà con $\dim M = m \geq n = \dim N$. Se $y \in N$ è regolare, posto $P \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y)$, si ha:

$$T_x P = \ker df_x, \quad \forall x \in P.$$

Inoltre $df_x|_{(T_x P)^\perp}$ è un isomorfismo.

Dimostrazione.

Poiché $P = f^{-1}(y)$, l'inclusione $\iota : P \rightarrow M$ è tale per cui

$f \circ \iota$ è costante. Tuttavia una mappa costante ha differenziale nullo, e dunque:

$$df_x \circ \underbrace{\iota_{T_x P}}_{= d\iota_x} = 0 \implies T_x P \subseteq \ker(df_x).$$

Poiché $\dim T_x P = m - n = \dim \ker(df_x)$, si ottiene l'uguaglianza $T_x P = \ker(df_x)$.

Osserviamo che $\dim(T_x P)^\perp = n$ e che $(T_x P)^\perp \cap T_x P = \{0\}$. Allora $df_x|_{(T_x P)^\perp}$ è iniettiva, e per uguaglianza dimensionale tra $(T_x P)^\perp$ e $T_y N$ si conclude che è un isomorfismo. $\square$

Corollario 4.37.

$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è una varietà di dimensione n e $T_x S^n = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dimostrazione.

Presa $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2,$$

si ha $S^n = f^{-1}(1)$. Osserviamo che:

$$Jf_x = 2x^\top.$$

Dunque l'unico valore critico di f è 0. Pertanto $S^n = f^{-1}(1)$ è una varietà di dimensione $(n+1) - 1 = n$.

Poiché $df_x(h) = Jf(x) \cdot h = 2x^\top h$, per la Proposizione 4.36 vale anche $T_x S^n = \ker df_x = x^\perp$. $\square$

Corollario 4.38.

$O(n) \subseteq M(n)$ è una varietà di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dimostrazione.

Presa $f : M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow S(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tale per cui:

$$f(A) = AA^\top,$$

si ha $O(n) = f^{-1}(I)$. Osserviamo che:

$$df_A : M(n) \rightarrow S(n), \quad df_A(B) = AB^\top + BA^\top.$$

Mostriamo che df_A è surgettiva per $A \in f^{-1}(I) = O(n)$.

Sia $C \in S(n)$ simmetrica. Allora C è uguale alla sua parte simmetrica:

$$C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^\top,$$

e quindi, ponendo $\frac{1}{2}C = AB^\top$, si ottiene la seguente soluzione a $AB^\top + BA^\top = C$:

$$B = \frac{1}{2}C^\top A.$$

Dunque I è un valore regolare, e $O(n)$ è una varietà di dimensione $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. $\square$

4.4 Varietà con bordo

4.4.1 Semispazio superiore e varietà con bordo

Definizione 4.39 (Semispazio superiore).

Si definisce il **semispazio superiore** H^n in $\mathbb{R}^n$ come:

$$H^n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Osservazione 4.40.

Osserviamo che in modo naturale vale il seguente diffeomorfismo:

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Definizione 4.41 (m -varietà con bordo).

Si dice che $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una **m -varietà con bordo** se ogni punto di M ammette un intorno diffeomorfo ad un aperto del semispazio superiore H^n . Gli intorni e i diffeomorfismi citati formano le **carte locali** della varietà, e le inverse di tali diffeomorfismi sono dette **parametrizzazioni locali**. Analogamente si definiscono le **funzioni di transizione**.

Si dice **bordo** della varietà M l'insieme dei punti che è immagine di un punto di ∂H^n tramite qualche parametrizzazione locale, e si indica con ∂M .

Osservazione 4.42.

La definizione data è coerente con la definizione di varietà senza bordo: una varietà senza bordo M è esattamente una varietà con bordo M tale per cui $\partial M = \emptyset$.

Utilizzeremo dunque indistintamente le due caratterizzazioni.

4.4.2 Proprietà del bordo di una varietà con bordo

Lemma 4.43 (I punti di bordo sono sempre immagini di elementi di bordo).

Sia x un punto del bordo ∂M di una m -varietà con bordo M . Se g è una parametrizzazione locale di x , allora x è immagine di un punto di bordo di H^n tramite g . Equivalentemente, x è un punto di ∂M se e solo se è immagine di un valore di bordo per ogni sua parametrizzazione locale.

Dimostrazione.

Sia $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$. Poiché x è un punto di ∂M , allora esiste una parametrizzazione locale $f : V \subseteq H^m \rightarrow f(V)$ di x tale per cui esiste $v \in \partial V = \partial H^m \cap V$ con $f(v) = x$.

Se $f = g$, la tesi è dimostrata. Se $f \neq g$ e per assurdo $u \notin \partial U$, allora la funzione di transizione $g^{-1} \circ f$ si restringerebbe a un diffeomorfismo tra un aperto di $\mathbb{R}^m$ diffeomorfo a $\mathbb{R}^m$ e un aperto di H^m diffeomorfo a H^m . Tuttavia $\mathbb{R}^m$ e H^m non sono diffeomorfi, $\nexists$. Dunque $u \in \partial U$. $\square$

Corollario 4.44 (Il bordo si trasporta naturalmente tramite parametrizzazione locale).

Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di una m -varietà con bordo M . Allora:

$$g(\partial U) = g(U) \cap \partial M.$$

Dimostrazione.

L'inclusione $g(\partial U) \subseteq g(U) \cap \partial M$ è ovvia. L'inclusione opposta invece è data dal Lemma 4.43. $\square$

Proposizione 4.45.

Sia M una m -varietà con bordo. Allora ∂M è una varietà senza bordo di dimensione $m - 1$.

Dimostrazione.

Sia $x \in \partial M$. Allora esiste una parametrizzazione locale $g : U \subseteq H^m \rightarrow M$ con $g(u) = x$ e $u \in \partial U = U \cap \partial H^m$.

La restrizione $g|_{\partial U}$ è un diffeomorfismo (vd. Proposizione 4.5). Ricordiamo che $g(\partial U) = g(U) \cap \partial M$ dal Corollario 4.44. Allora, poiché $\partial H^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$, possiamo identificare ∂U come aperto in $\mathbb{R}^{m-1}$. Quindi $(g|_{\partial U})^{-1}$ induce una carta locale per ∂M , e si conclude che ∂M è una varietà di dimensione $m - 1$. $\square$

4.4.3 Differenziale e spazio tangente su varietà con bordo

Osservazione 4.46 (Il differenziale sul bordo di H^n è ben definito).

ia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa liscia da un aperto $U \subseteq H^n$. Supponiamo $\tilde{g}$ e $\hat{g}$ siano due estensioni di g in un intorno aperto di $x \in U \cap \partial H^n$. Supponiamo a meno di restringimento che $\tilde{g}$ e $\hat{g}$ condividano lo stesso dominio.

Il differenziale $d\tilde{g}_x$ coincide allora con $d\hat{g}_x$. Sia infatti $u_{i \geq 0}$ è una successione in $H^n \setminus \partial H^n$ con $u_i \rightarrow x$. Poiché $\tilde{g}$ e $\hat{g}$ sono lisce, il differenziale vara con continuità, ovvero:

$$d\tilde{g}_x = \lim_{i \rightarrow \infty} d\tilde{g}_{u_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} d\hat{g}_{u_i} = d\hat{g}_x,$$

dove si è usato che sugli u_i i differenziali certamente coincidono, potendoci restringere a un aperto in U non intersecante il bordo.

Definizione 4.47 (Differenziale su H^n).

Sia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa liscia da un aperto $U \subseteq H^n$.

Per $x \in U \setminus \partial H^n$, il differenziale dg_x è definito come l'usuale differenziale dato dalla restrizione di g a un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Per $x \in U \cap \partial H^n$, il differenziale dg_x è indotto dal differenziale di una qualsiasi estensione $\tilde{g}$ di g in un intorno aperto di x , ovvero:

$$dg_x \stackrel{\text{def}}{=} d\tilde{g}_x.$$

Osservazione 4.48.

Come nel caso di una parametrizzazione locale da un aperto di $\mathbb{R}^n$, anche il differenziale di una parametrizzazione locale di una varietà con bordo è iniettiva per motivi analoghi.

Definizione 4.49 (Spazio tangente per varietà con bordo).

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una m -varietà con bordo. Sia x un punto di M . Si definisce allora lo **spazio tangente di x su M** come:

$$T_x M \stackrel{\text{def}}{=} dg_u(\mathbb{R}^m),$$

dove g è una parametrizzazione locale di un intorno di x in M con $g(u) = x$.

Osservazione 4.50.

Come per il caso di una varietà senza bordo, si dimostra che il differenziale è ben definito. Valgono inoltre ancora le usuali proprietà del differenziale, inclusa la regola della composizione (*chain rule*).

Osservazione 4.51.

A partire da queste definizioni, si definiscono in modo analogo i concetti di punto regolare/critico e di valore regolare/critico.

Si generalizza facilmente in questo senso il Teorema di Sard (Teorema 4.33), così come quello di Brown (Corollario 4.34).

Osservazione 4.52 ($T_x \partial M$ è un iperpiano di $T_x M$).

Sia M una m -varietà con bordo. Grazie alla Proposizione 4.45 sappiamo che ∂M è una $(m-1)$ -varietà.

Consideriamo l'inclusione $\iota : \partial M \rightarrow M$. Chiaramente ι è una mappa liscia tra varietà con differenziale l'inclusione $T_x \partial M \hookrightarrow T_x M$. In particolare vale:

$$T_x \partial M \subseteq T_x M$$

per ogni punto $x \in \partial M$.

4.4.4 Varietà con bordo da valori regolari

Teorema 4.53.

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa liscia tra varietà, dove M è una m -varietà senza bordo. Se 0 è un valore regolare per f , allora $\{f \geq 0\}$ è una m -varietà con bordo $f^{-1}(0) = \{f = 0\}$.

Dimostrazione.

L'insieme $\{f > 0\}$ è un aperto di M dal momento che f è continua, e quindi eredita la struttura di varietà di M (vd. Osservazione 4.11). Dunque, conosciamo già le carte locali di un punto $x \in \{f > 0\}$.

Sia x un punto di $\{f = 0\} = f^{-1}(0)$. Poiché 0 è un valore regolare, df_x è surgettiva, e quindi $\dim \ker df_x = m-1$. Supponiamo che k sia tale per cui $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Allora possiamo costruire un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ tale per cui $L|_{\ker df_x}$ è un isomorfismo.

Consideriamo la mappa $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ tale per cui:

$$F(m) = (L(m), f(m)).$$

Allora F è una mappa liscia tra varietà, il cui differenziale in x è un isomorfismo. Dunque, per il Teorema 4.29, esiste un intorno aperto U di x in M per il quale $F|_U : U \rightarrow V \stackrel{\text{def}}{=} F(U)$ è un diffeomorfismo.

Tramite $F|_U$ si induce allora un diffeomorfismo tra l'aperto $(\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \cap V = H^m \cap V$ di H^m e l'aperto $F^{-1}(H^m \cap V) = \{f > 0\} \cap U$, tramite il quale il punto x viene mappato su $\partial H^m \cap V$. Dunque $\{f \geq 0\}$ è una m -varietà con bordo $f^{-1}(0)$. $\square$

Osservazione 4.54.

Chiaramente il Teorema 4.53 si generalizza a qualsiasi insieme della forma $\{f \text{ op } a\}$ con $\text{op} \in \{\leq, \geq\}$ e a valore regolare di f .

Corollario 4.55.

D^n è una varietà n -dimensionale con bordo S^{n-1} .

Dimostrazione.

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Allora, come visto per il Corollario 4.37, 1 è valore regolare di f , e quindi $D^n = \{f \leq 1\}$ è una n -varietà con bordo S^{n-1} per il Teorema 4.53. $\square$

Lemma 4.56.

Sia $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m > n$ una mappa liscia.

Se $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare sia per f che per $f|_{\partial H^m}$ con $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(y)$ è una $(m-n)$ -varietà con bordo $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial H^m$.

Dimostrazione.

Sia $x \in f^{-1}(y)$. Supponiamo valga $x \in \text{int}(H^m) = H^m \setminus \partial H^m$. Possiamo restringerci a un intorno aperto U di x in $\mathbb{R}^m$, per il quale $f|_U$ diventa una mappa tra varietà senza bordo. Allora $f|_U^{-1}(y)$ è una $(m-n)$ varietà senza bordo per il Teorema 4.35. Quindi x eredita da questa varietà le carte locali su $f^{-1}(y)$; inoltre x non potrà appartenere al bordo di $f^{-1}(y)$, essendo nell'immagine di una parametrizzazione di un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$.

Supponiamo valga adesso $x \in \partial H^m$. Poiché f è liscia, esistono un intorno aperto W di x in $\mathbb{R}^m$ e un'estensione liscia $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ per cui:

$$F|_{W \cap H^m} = f|_{W \cap H^m}.$$

Dal momento che $dF_x = df_x$, e x è un punto regolare per f , allora dF_x è surgettiva, e x è punto regolare anche per F . Dal momento che i punti regolari formano un aperto (vd. Osservazione 4.28), possiamo supporre, a meno di restringere W , che non vi siano punti critici in W . Pertanto, y sarà valore regolare per F e $F^{-1}(y)$ è dunque una $(m-n)$ -varietà senza bordo per il Teorema 4.35.

Sia $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione tale per cui $x \mapsto x_m$. Allora π è una mappa liscia.

Mostriamo che 0 è un valore regolare per $\pi|_{F^{-1}(y)}$. Osserviamo innanzitutto che:

$$(\pi|_{F^{-1}(y)})^{-1}(0) = F^{-1}(y) \cap \partial H^m \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f^{-1}(y) \cap \partial H^m}_{(W \setminus H^m) \cap \partial H^m = \emptyset}.$$

Sia $y^* \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m$. Osserviamo che:

- (i.) $T_{y^*} F^{-1}(y) = \ker dF_{y^*} = \ker df_{y^*}$ per la Proposizione 4.36, e questo spazio ha dimensione $m-n$.
- (ii.) $T_{y^*} \partial H^m = \ker d\pi_{y^*}$ per la Proposizione 4.36.
- (iii.) $\ker d(f|_{\partial H^m})_{y^*} = \ker df_{y^*}|_{T_{y^*} \partial H^m}$ ha dimensione $m-n-1$ dal momento che y è per ipotesi un valore regolare di $f|_{\partial H^m}$, dove per l'uguaglianza dei due nuclei si è utilizzato che:

$$f|_{\partial H^m} = f \circ \iota|_{\partial H^m},$$

e successivamente la *chain rule*.

(iv.) Grazie a (i.), (ii.) e (iii.), possiamo scrivere:

$$\ker d(f|_{\partial H^m})_{y^*} = T_{y^*} F^{-1}(y) \cap (\ker d\pi_{y^*}).$$

Osserviamo che y^* è un punto critico per $\pi|_{F^{-1}(y)}$ se e solo se $d(\pi|_{F^{-1}(y)})_{y^*}$ è nullo, dacché π è una mappa in una 1-varietà. Questo accade se e solo se $T_{y^*} F^{-1}(y) \subseteq \ker d\pi_{y^*}$. Tuttavia, se vi fosse questa inclusione, si avrebbe per (iv.) $\ker d(f|_{\partial H^m})_{y^*} = T_{y^*} F^{-1}(y)$, che è assurdo dal momento che il primo spazio ha dimensione $m - n - 1$ per (iii.) e il secondo ha dimensione $m - n$ per (i.). Quindi 0 è regolare per $\pi|_{F^{-1}(0)}$.

Dal momento che 0 è regolare per $\pi|_{F^{-1}(0)}$, per il Teorema 4.53 $\{\pi \geq 0\} = f^{-1}(y) \cap H^m$ è una $(m - n)$ -varietà con bordo $\{\pi = 0\} = f^{-1}(y) \cap \partial H^m \ni x$. Quindi x eredita da questa varietà le carte locali su $f^{-1}(y)$; inoltre x appartiene al bordo di $f^{-1}(y)$, essendo immagine di un punto di bordo tramite una parametrizzazione locale. $\square$

Teorema 4.57.

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, dove M è una m -varietà con bordo ∂M non vuoto, N è una n -varietà senza bordo e $m > n$.

Se $y \in N$ è un valore regolare sia per f che per $f|_{\partial M}$ con $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(y)$ è una $(m - n)$ -varietà con bordo $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$.

Dimostrazione.

Sia $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U) \subseteq M$ una parametrizzazione locale di $x \in f^{-1}(y)$ con $g(u) = x$. Sia $h : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow h(V) \subseteq N$ una parametrizzazione locale di y con $h(v) = y$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$

A meno di restringere i domini delle due mappe, possiamo considerare $p = h^{-1} \circ f \circ g$. Allora $v = h^{-1}(y)$ è regolare per la mappa p . Per possiamo restringerci a una palla aperta come intorno aperto di u in $p^{-1}(v)$: se questa è diffeomorfa a $\mathbb{R}^m$, una carta locale per u in $p^{-1}(v)$ è già data dal Teorema 4.35; se invece è diffeomorfa a H^m , la carta locale è ereditata tramite il Lemma 4.56.

La carta locale trovata si trasferisce tramite g al punto x di M , e applicando il Corollario 4.44 il bordo della varietà si trasferisce coerentemente a sua volta. $\square$

4.4.5 Classificazione delle 1-varietà, lemma di non retrazione sul bordo e teorema del punto fisso di Brouwer

Teorema 4.58 (Classificazione delle 1-varietà con bordo).

Una 1-varietà con bordo è diffeomorfa a unioni di copie di S^1 e di intervalli di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Si veda l'appendice di [Milnor, J. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia]. $\square$

Corollario 4.59 (Classificazione delle 1-varietà compatte con bordo).

Una 1-varietà compatta con bordo è necessariamente un'unione di copie di S^1 e di intervalli chiusi di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Discende immediatamente dal Teorema 4.58 utilizzando l'ipotesi di compattezza. $\square$

Corollario 4.60.

Una 1-varietà compatta con bordo ha un numero pari di punti sul bordo

Dimostrazione.

Deriva immediatamente dal Corollario 4.59, dal momento che il segmento chiuso ha due punti sul bordo e S^1 non ne ha nessuno. $\square$

Lemma 4.61 (di non retrazione sul bordo).

Sia M una varietà compatta con bordo $\partial M \neq \emptyset$. Allora non esistono mappe lisce f da M in ∂M che fissano il bordo, owerosia con $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$.

Dimostrazione.

Supponiamo esista una tale mappa f . Allora per il Teorema di Brown (Corollario 4.34, generalizzato alle varietà bordate), sappiamo che i valori regolari di f sono densi in ∂M , e che in particolare esiste almeno un valore regolare.

Sia y un tale valore regolare. Allora, poiché $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$, y è valore regolare anche per $f|_{\partial M}$.

Pertanto, per il Teorema 4.57, $f^{-1}(y)$ è una 1-varietà con bordo $f^{-1}(y) \cap \partial M$. Poiché $\{y\}$ è chiuso in ∂M (è T1), $f^{-1}(y)$ è un chiuso in un compatto, e dunque è una 1-varietà compatta.

Osserviamo che il bordo di $f^{-1}(y)$ si semplifica a $\{y\}$ dacché $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$. Tuttavia questo è un assurdo, dal momento che le 1-varietà compatte con bordo finito hanno un numero pari di elementi sul bordo per il Corollario 4.60. Quindi f non può esistere. $\square$

Lemma 4.62.

Ogni mappa liscia $f : D^n \rightarrow D^n$ ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che f non ammetta alcun punto fisso. Definiamo u_x in modo tale che:

$$u_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}, \quad \forall x \in D^n.$$

Poiché f non ammette punti fissi, $u_x \neq 0$ per ogni $x \in D^n$.

Costruiamo $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$ liscia tale per cui $f(x) = x + tu_x$ e $f|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$.

Allora deve valere $\|f(x)\|^2 = 1$, e quindi:

$$\begin{aligned} t^2 + 2(x \cdot u_x)t + (\|x\|^2 - 1) &= 0 \implies \\ t_{\pm} &= -x \cdot u_x \pm \sqrt{(x \cdot u_x)^2 - \|x\|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Scegliamo $t \stackrel{\text{def}}{=}} t_+$. Affinché f sia liscia, occorre che l'espressione $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot u_x)^2 - \|x\|^2 + 1$ dentro la radice quadrata in t sia sempre maggiore di 0.

Osserviamo che per $x \in D^n$ si ha $h(x) \geq (x \cdot u_x)^2 \geq 0$. Se allora $h(x) > (x \cdot u_x)^2$, $h(x)$ è maggiore strettamente di 0. Se invece $h(x) = (x \cdot u_x)^2$, necessariamente $\|x\|^2 = 1$, e quindi $x \in S^{n-1}$. Ma allora:

$$x \cdot u_x = \frac{1 - x \cdot f(x)}{\|x - g(x)\|}.$$

Dal momento che x non può essere un punto fisso di f , $x \cdot f(x)$ non può essere uguale a 1; quindi $x \cdot u_x > 0$ per $x \in S^{n-1}$. Si conclude allora che $h(x) > 0$ per ogni $x \in D^n$, e quindi f è una funzione liscia.

Si verifica facilmente che $f|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Questo tuttavia è un assurdo per il Lemma 4.61, ∇ . Quindi f ammette almeno un punto fisso. $\square$

Teorema 4.63 (del punto fisso di Brouwer).

Ogni mappa continua $f : D^n \rightarrow D^n$ ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che f non ammetta alcun punto fisso. Poiché D^n è compatto, per il Teorema di approssimazione di Weierstrass, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione polinomiale $P_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale per cui $\|P_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$ per ogni $x \in D^n$.

Osserviamo che:

$$\|P_\varepsilon(x)\| \leq \|P_\varepsilon(x) - f(x)\| + \|f(x)\| < \varepsilon + 1,$$

quindi $Q_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon+1} P_\varepsilon$ si restringe su D^n a un'endofunzione $Q_\varepsilon|_{D^n} : D^n \rightarrow D^n$.

Dal momento che f non ammette alcun punto fisso, $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in D^n} \|f(x) - x\|$ è tale per cui $\mu > 0$.

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \|Q_\varepsilon(x) - f(x)\| &= \frac{1}{\varepsilon+1} (\|P_\varepsilon(x) - f(x)\| + \varepsilon \|f(x)\|) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}. \end{aligned}$$

Scegliendo allora ε tale per cui $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} < \mu$, Q_ε non può ammettere punti fissi: un punto fisso violerebbe infatti la minimalità di μ secondo la scorsa disuguaglianza. Tuttavia Q_ε è una funzione liscia, e per il Lemma 4.62 deve ammettere punti fissi, ∇ . Dunque f ammette almeno un punto fisso. $\square$

4.5 Teoria del grado modulo 2

4.5.1 Omotopie C^∞

Osservazione 4.64 ($M \times [0, 1]$ è una varietà con bordo).

Sia M una m -varietà senza bordo. Allora, per la Proposizione 4.13, $M \times \mathbb{R}$ è una $(m+1)$ -varietà senza bordo.

Consideriamo la mappa liscia $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui $f(x, t) = t(t-1)$. Allora per il Teorema 4.53 $\{f \leq 0\} = M \times [0, 1]$ è una $(m+1)$ -varietà con bordo $\{f = 0\} = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$.

Definizione 4.65 (Omotopia C^∞ e funzioni C^∞ -omotope).

Siano f e g due funzioni da una varietà M in una N . Un'omotopia C^∞ da f a g è una funzione liscia $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tale per cui:

- $H(-, 0) = f$,
- $H(-, 1) = g$.

Definiamo inoltre:

$$H_t \stackrel{\text{def}}{=} H(-, t).$$

Due funzioni f e g per le quali esiste un'omotopia da f a g si dicono C^∞ -omotope.

Osservazione 4.66.

È immediato verificare che “essere C^∞ -omotope” è una relazione di equivalenza per le funzioni lisce da M a N .

Lemma 4.67 (di omotopia).

Siano f e g due funzioni C^∞ -omotope da una varietà M in una N , con M compatta e $\dim M = \dim N$. Se $y \in N$ è un valore regolare sia per f che per g , allora:

$$|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \pmod{2}.$$

Dimostrazione.

Sia H una omotopia C^∞ da f a g . Allora, poiché M è compatta, per il Lemma 4.31:

- esiste un intorno V_1 di $y \in N$ su cui $|f^{-1}(-)|$ è costante;
- esiste un intorno V_2 di $y \in N$ su cui $|g^{-1}(-)|$ è costante.

È sufficiente allora mostrare la tesi per un qualsiasi valore $y' \in V_1 \cap V_2$; poiché i valori regolari sono densi per il Teorema di Brown (per le varietà, Corollario 4.34), possiamo prendere $y' \in V_1 \cap V_2$ valore regolare di H .

Allora $H^{-1}(y')$ è una varietà di dimensione 1, il cui bordo ha un numero pari di punti per il Corollario 4.60.

Osserviamo che $\partial(M \times [0, 1]) = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$. Allora:

$$\partial H^{-1}(y') = (f^{-1}(y') \times \{0\}) \sqcup (g^{-1}(y') \times \{1\}).$$

Quindi:

$$0 \equiv |\partial H^{-1}(y')| \equiv |f^{-1}(y')| + |g^{-1}(y')| \pmod{2}.$$

$\square$

4.5.2 Isotopie e lemma di omogeneità

Definizione 4.68 (Isotopia).

Una omotopia C^∞ $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ si dice **isotopia** se per ogni $t \in [0, 1]$, $H(-, t)$ è un diffeomorfismo liscio.

Definizione 4.69 (Isotopia a supporto compatto).

Un'isotopia $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ si dice **a supporto compatto** se esiste un compatto $K \subseteq N$ tale per cui $H(-, t)|_{N \setminus K} = \text{id}_{N \setminus K}$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Definizione 4.70 (Punti isotopi di una varietà).

Due punti $y, z \in N$, dove N è una varietà, si dicono **isotopi** se esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ con $h(y) = z$ e un'isotopia a supporto compatto da h a id_N .

Osservazione 4.71.

È immediato osservare che la relazione “essere isotopi” sui punti di una varietà è una relazione di equivalenza.

Lemma 4.72.

Le classi di equivalenza della relazione “essere isotopi” sui punti di una varietà (senza bordo) M sono aperti della varietà.

Dimostrazione.

Sia x un punto di M . Supponiamo M sia una $(n+1)$ -varietà. Usando le carte locali, eventualmente riparametrizzate per avere come immagine una palla di centro 0, è sufficiente mostrare che per ogni r , esiste $0 < r_0 \leq r$ tale per cui tutti i punti di $B_{r_0}(0) \subseteq B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sono isotopi a 0.

Possiamo ridurre il problema ulteriormente concentrando ci sui punti della forma $z = (a, 0, \dots, 0)$ con $a < r_0$, dal momento che una rotazione permette poi di rendere isotopi tutti gli altri punti di $\partial B_a(0)$. Se infatti H è un isotopia a supporto compatto che porta z in 0, allora:

$$H'(-, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_\theta^{-1} \circ H(-, t) \circ R_\theta$$

è l'isotopia cercata, dove R_θ è l'opportuna rotazione scelta.

Siano $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ due funzioni di test (*bump function*) lisce con $\rho(0) = \sigma(0) = 1$ e:

$$|x| > 1 \implies \rho(x) = 0, \quad \|y\| > 1 \implies \sigma(y) = 0.$$

Osserviamo che:

$$|x| > \varepsilon \implies \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \|y\| > \delta \implies \sigma\left(\frac{y}{\delta}\right) = 0.$$

Scelti allora ε e δ di modo che $\varepsilon^2 + \delta^2 < r_0^2$, definiamo allora l'omotopia C^∞ H tale per cui:

$$H : \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^{n+1}} \times [0, 1] \rightarrow \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^{n+1}},$$

$$H(x, y, t) = \left(x + at\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\sigma\left(\frac{y}{\delta}\right), y \right).$$

Osserviamo subito che $H_0 = \text{id}_N$, $H_1(0) = z$ e che H_t fissa tutto ciò che è fuori da $B_{r_0}(0)$. Mostriamo che per r_0 sufficientemente piccolo H_t è un diffeomorfismo.

Lo jacobiano di H_t è il seguente:

$$JH_t = \left(\begin{array}{c|c} 1 + \frac{at}{\varepsilon}\sigma\left(\frac{y}{\delta}\right)\rho'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & * \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right).$$

Si verifica facilmente che si può scegliere r_0 , e successivamente ε e δ in modo tale che:

$$\left| \frac{at}{\varepsilon}\sigma\left(\frac{y}{\delta}\right)\rho'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| < 1, \quad \forall a, x, y,$$

e conseguentemente $\det(JH_t) > 0$, da cui si deduce che H_t è un diffeomorfismo locale. Analogamente, H_t è bigettiva sulle rette $\{y = \text{cost.}\}$ dal momento che la derivata sulle rette è strettamente positiva. Dunque H_t è bigettiva e diffeomorfismo locale, e quindi è diffeomorfismo.

Si conclude che H è l'isotopia cercata, e quindi ogni classe di isotopia è aperta. $\square$

Lemma 4.73 (di omogeneità).

Sia N una varietà connessa e siano y, z due suoi punti. Allora y e z sono isotopi.

Dimostrazione.

Poiché N è connessa, per il Lemma 4.72 esiste allora un'unica classe di equivalenza per la relazione “essere isotopi”, da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

4.5.3 Grado modulo 2 e buona definizione

Teorema 4.74.

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M chiusa (ovverosia anche compatta) e N connessa. Siano y e z due valori regolari di una funzione $f : M \rightarrow N$ liscia. Allora:

$$|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)| \pmod{2}.$$

Dimostrazione.

Poiché N è connessa, per il Lemma 4.73 esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ con $h(y) = z$ e un'isotopia a supporto compatto $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ da id_N a h .

$$M \times [0, 1] \xrightarrow{f \times \text{id}_{[0, 1]}} N \times [0, 1] \xrightarrow{H} N$$

Poiché y è regolare per f e h è diffeomorfismo, si deduce che z è regolare per $h \circ f$. Consideriamo l'omotopia $H' = H \circ (f \times \text{id}_{[0, 1]})$. Osserviamo che $H'_0 = f$ e che $H'_1 = h \circ f$. Quindi, per il Lemma 4.67, si conclude che:

$$|f^{-1}(z)| \equiv |(h \circ f)^{-1}(z)| \equiv |f^{-1}(y)| \pmod{2}.$$

$\square$

Definizione 4.75 (Grado modulo 2 di una funzione liscia).

Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione liscia da una varietà compatta M a una di stessa dimensione e connessa N . Allora si definisce il **grado modulo 2 di f** come:

$$\boxed{\deg_2 f \stackrel{\text{def}}{=} |f^{-1}(y)| \pmod{2},}$$

dove y è un qualsiasi valore regolare di f .

Lemma 4.76.

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M chiusa (ovverosia anche compatta) e N connessa. Se $f : M \rightarrow N$ è liscia, allora i valori regolari di f formano un aperto di N .

Dimostrazione.

Dall'Osservazione 4.28 sappiamo che i punti regolari di f formano un aperto di M ; dunque i punti critici formano un chiuso di M . Dacché M è compatta, in particolare i punti critici formano un compatto di M . Tramite f , si deduce che i valori critici formano un compatto di N , che, essendo N T2, è dunque chiuso in N . Quindi i valori regolari formano un aperto. $\square$

Teorema 4.77.

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M chiusa (ovverosia anche compatta) e N connessa. Se f e g sono due mappe lisce C^∞ -omotope da M in N , allora:

$$\deg_2 f = \deg_2 g.$$

Dimostrazione.

Per il Lemma 4.76, i valori regolari di f formano un aperto in N . Allora, per il Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), esiste in questo aperto anche un valore regolare di g . Per il Lemma 4.67, dunque f e g condividono lo stesso grado modulo 2. $\square$

Corollario 4.78.

La mappa costante $c_{x_0} : S^n \rightarrow S^n$ non è C^∞ -omotopa a id_{S^n} .

Dimostrazione.

Poiché c_{x_0} non è surgettiva, $\deg_2 c_{x_0} = 0$ (ogni punto diverso da x_0 è valore regolare con controimmagine vuota); mentre $\deg_2 \text{id}_{S^n} = 1$. Quindi per il Teorema 4.77 le due mappe non possono essere C^∞ -omotope. $\square$

4.6 Varietà orientate

4.6.1 Orientazione di basi su spazi vettoriali, orientazione canonica di $\mathbb{R}^n$

Definizione 4.79 (Stessa orientazione).

Si dice che due basi (ordinate) $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale finito-dimensionale **hanno la stessa orientazione** se la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha determinante positivo.

Osservazione 4.80.

È immediato verificare che “avere la stessa orientazione” è una relazione d’equivalenza sulle basi dello spazio in esame avente solo due classi di equivalenza per le orientazioni.

Definizione 4.81 (Orientazione).

Definiamo **orientazione** una classe di equivalenza per la relazione “avere la stessa orientazione”.

Data un’orientazione Θ indichiamo con $-\Theta$ l’unica altra classe di equivalenza.

Definizione 4.82 (Orientazione canonica).

Si definisce l’**orientazione canonica** Θ_0 di $\mathbb{R}^n$ come la classe di equivalenza indotta dall’orientazione della base canonica.

Osservazione 4.83.

Un isomorfismo $L : V \rightarrow V'$ induce una bigezione dalle orientazioni di V a quelle di V' tramite:

$$[\mathcal{B}] \mapsto [L(\mathcal{B})].$$

Infatti la matrice di cambio di base è invariante per isomorfismo.

Indicheremo tale mappa con il simbolo dell’isomorfismo da cui è indotta.

Definizione 4.84 (Segno di una base).

Dato uno spazio vettoriale V orientato con Θ , si definisce il **segno** di una base $\mathcal{B}$ come:

$$\text{sgn}_\Theta(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \mathcal{B} \sim \Theta, \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4.6.2 Orientazione su prodotti di spazi vettoriali

Definizione 4.85 (Orientazione prodotto).

Siano V e W due $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali di dimensione finita. Se Θ^V è un’orientazione di V e Θ^W lo è di W , allora si definisce l’**orientazione prodotto** $\Theta^V \times \Theta^W$ su $V \times W$ come l’orientazione indotta dalla giustapposizione di $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$:

$$\mathcal{B}_V \sqcup \mathcal{B}_W \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_V \times \{0_W\} \cup \{0_V\} \times \mathcal{B}_W,$$

dove $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ sono basi di V e W con $[\mathcal{B}_V] = \Theta^V$ e $[\mathcal{B}_W] = \Theta^W$.

Osservazione 4.86 (Regola dei segni per l’orientazione prodotto).

Siano V e W $\mathbb{R}$ -spazi orientati con Θ^V e Θ^W . Siano $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ basi di V e W . Sia M_V la matrice di cambio di base da una base positiva di V a $\mathcal{B}_V$. Sia M_W l’analogo per W .

La matrice di cambio di base dalla giustapposizione delle basi positive alla giustapposizione di $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è esattamente:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_V & 0 \\ \hline 0 & M_W \end{array} \right).$$

Quindi vale la seguente *regola dei segni*:

$$\text{sgn}_{\Theta^V \times \Theta^W}(\mathcal{B}_V \sqcup \mathcal{B}_W) = \text{sgn}_{\Theta^V}(\mathcal{B}_V) \text{sgn}_{\Theta^W}(\mathcal{B}_W).$$

4.6.3 Orientazione su varietà e prime proprietà

Definizione 4.87 (m -varietà orientata, $m > 1$ o $\partial M = \emptyset$).

Una **varietà orientata di dimensione m** (con $m > 1$ o $\partial M = \emptyset$) è una coppia (M, Θ) , dove M è una m -varietà, eventualmente con bordo, e $\Theta = \{\Theta_x\}_{x \in M}$ è una famiglia di orientazioni degli spazi tangenti dei punti di M tale per cui:

Per ogni $x \in M$ esiste una parametrizzazione locale $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U) \subseteq M$ con $dg_u(\Theta_0) = \Theta_{g(u)}$ per ogni $u \in U$ (**condizione di compatibilità di g con Θ**).

Una varietà M per cui esiste una famiglia di orientazioni tali per cui (M, Θ) è orientata si dice **orientabile**.

Osservazione 4.88.

Sia $(M, \Theta = \{\Theta_x\}_{x \in M})$ una m -varietà orientata (con $\dim M > 1$ o $\partial M = \emptyset$). Allora si può definire l’**orientazione opposta** $-\Theta$:

$$-\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{-\Theta_x\}_{x \in M}.$$

In effetti $(M, -\Theta)$ è orientata: presa una parametrizzazione locale g compatibile con Θ , ristretta e traslata eventualmente a una palla di centro 0, è sufficiente precomporla con una riflessione rispetto a un asse della palla per ottenere una parametrizzazione locale compatibile con $-\Theta$.

Questo ragionamento non è attuabile sul bordo di una 1-varietà: su H^1 una riflessione come quella sopracitata non è possibile. Questo ci suggerisce di modificare la definizione per il caso delle 1-varietà bordate:

Definizione 4.89 (1-varietà compatta orientata bordata). Sia M una 1-varietà connessa compatta con bordo (questo succede, per il Corollario 4.59, se e solo se $M \cong [0, 1]$). Allora un'orientazione su M è per definizione una famiglia $\Theta = \{d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0,1]}$ dove $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ è un diffeomorfismo.

Se M è sconnessa, un'orientazione è un'orientazione su ciascuna componente connessa.

Osservazione 4.90.

Se M è una 1-varietà connessa compatta con bordo, e $\Theta = \{d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0,1]}$ è una sua orientazione, allora

$$-\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{-d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0,1]}$$

è una sua altra orientazione, indotta dalla precomposizione del diffeomorfismo φ con una riflessione di $[0, 1]$ (e.g., $\psi(x) = 1 - x$).

Proposizione 4.91.

Una varietà orientata e connessa, eventualmente con bordo, ammette esattamente due orientazioni.

Dimostrazione.

Poiché una varietà orientata ammette almeno due orientazioni (vd. Osservazione 4.88 e Osservazione 4.90), per concludere la dimostrazione mostriamo che esistono al più due orientazioni.

Si fissi un'orientazione Θ per la varietà M . Sia Θ' un'altra orientazione. Dividiamo la dimostrazione in due casi:

- $\boxed{\dim M > 1 \text{ o } \partial M = \emptyset}$ Si definiscano i seguenti due insiemi:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \Theta_x = \Theta'_x\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \Theta_x = -\Theta'_x\}.$$

Osserviamo che A e B sono disgiunti, e che la loro unione è la varietà M . Poiché M è connessa, mostrando che A e B sono aperti, necessariamente uno dei due deve essere vuoto, da cui la tesi.

Senza perdita di generalità, mostriamo solo che A è aperto. Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x compatibile con Θ e $g(u) = x$, e sia $h : V \rightarrow h(V)$ una parametrizzazione compatibile con Θ' e $h(v) = x$. Assumiamo senza perdita di generalità che $g(U) = h(V)$.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ g \nearrow & & \nwarrow h \\ U & \xleftarrow{g^{-1} \circ h} & V \end{array}$$

Osserviamo che:

$$dh_{v'} = dg_{g^{-1}(h(v'))} \circ d(g^{-1} \circ h)_{v'}.$$

Poiché g è compatibile con Θ , si ha $dg(\Theta_0) = \Theta_x$, e così per h si ha $dh_x(\Theta_0) = \Theta'_x$. Quindi, per la precedente equazione:

$$dg_u(\Theta_0) = dh_v(\Theta_0) \implies d(g^{-1} \circ h)_v(\Theta_0) = \Theta_0.$$

Pertanto $\det(J(g^{-1} \circ h)_v) > 0$. Per continuità esiste allora un intorno J di v in cui:

$$\det(J(g^{-1} \circ h)_{v'}) > 0, \quad \forall v' \in J.$$

Questo si traduce nell'avere $\Theta_{h(v')} = \Theta'_{h(v')}$ su tutto J , e quindi $h(J)$ è un aperto di M contenente x e contenuto in A ; dunque A è aperto.

- $\boxed{M \cong [0, 1]}$ Se φ e ψ sono due diffeomorfismi da $[0, 1]$ in M che inducono Θ e Θ' , allora $\varphi^{-1} \circ \psi$ è un diffeomorfismo da $[0, 1]$ in sé. In quanto tale, la sua derivata è ovunque non nulla, e il suo segno determina se Θ' è Θ o $-\Theta$.

□

Definizione 4.92 (Base positiva o negativa per $T_x M$).

Sia (M, Θ) una varietà orientata. Allora una base per $T_x M$ si dice **positiva** se è della stessa orientazione di Θ_x ; altrimenti si dice **negativa**.

Definizione 4.93 (Varietà di orientazione opposta).

Data (M, Θ) una varietà orientata, indichiamo con $-M$ la varietà $(M, -\Theta)$, dove $-\Theta$ è l'unica altra orientazione possibile.

Osservazione 4.94.

Una varietà è sempre “localmente orientabile”: è sufficiente prendere l'orientazione indotta da un'unica parametrizzazione locale.

4.6.4 Orientabilità di m -varietà immerse in $\mathbb{R}^m$

Proposizione 4.95 (m -varietà immerse in $\mathbb{R}^m$ sono orientabili).

Sia M una m -varietà immersa in $\mathbb{R}^m$. Allora M è orientabile secondo l'orientazione canonica di $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione.

Sia $x \in M$. Osserviamo che deve valere necessariamente $T_x M = \mathbb{R}^m$, dal momento che $T_x M$ è uno spazio vettoriale m -dimensionale immerso in $\mathbb{R}^m$. Definiamo allora $\Theta_x \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_0$, dove Θ_0 è l'orientazione canonica di $\mathbb{R}^m$.

Se $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione locale di x , possiamo restringere e riparametrizzare g in modo tale che il suo dominio sia una semipalla di $\mathbb{R}^m$. Se dg_- preserva l'orientazione canonica, scegliamo g come parametrizzazione

locale compatibile per $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{\Theta_x\}_{x \in M}$. Altrimenti possiamo precomporre g con una riflessione rispetto all'asse della semipalla e ottenere una nuova parametrizzazione, stavolta compatibile.

Infatti, g si estende a un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^m$ e, per il Teorema della permanenza del segno, lo jacobiano deve essere localmente o positivo o negativo, e quindi g preserva localmente l'orientazione. Dunque M è orientabile secondo l'orientazione canonica di $\mathbb{R}^m$. $\square$

4.6.5 Orientazione nel prodotto di due varietà orientate

Definizione 4.96 (Orientazione prodotto per varietà).

Siano (M, Θ^M) e (N, Θ^N) due varietà orientate. Si definisce l'**orientazione prodotto** su $M \times N$ come l'orientazione $\Theta^{M \times N}$ tale per cui:

$$\Theta_{(x,y)}^{M \times N} = \Theta_x^M \times \Theta_y^N, \quad \forall x \in M, y \in N$$

dove $\Theta_x^M \times \Theta_y^N$ è l'orientazione prodotto su $T_{(x,y)}M \times N \cong T_xM \times T_yN$ indotta da Θ_x^M e Θ_y^N .

Il prodotto di parametrizzazioni locali compatibili induce parametrizzazioni locali compatibili con l'orientazione prodotto appena definita.

4.6.6 Semispazio interno o esterno

Osservazione 4.97 (Il semispazio interno è ben definito).

L'orientazione locale di una m -varietà M con bordo determina sempre la scelta di uno dei semispazi di $T_xM \setminus T_x\partial M$ per ogni x sul bordo ∂M .

Se infatti $g : U \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione di un punto $x \in \partial M$ con $g(u) = x$, il semispazio scelto è proprio:

$$dg_u(H^m \setminus \partial H^m).$$

Questo semispazio non dipende dalla parametrizzazione scelta. Se infatti $h : V \rightarrow h(V)$ è un'altra parametrizzazione con $h(v) = x$, a meno di restringere le mappe possiamo considerare la funzione di transizione $h^{-1} \circ g$. Osserviamo che:

$$dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Mostrando allora che $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m \setminus \partial H^m) = H^m \setminus \partial H^m$, otteniamo la tesi.

Osserviamo che $h^{-1} \circ g$ è una funzione da un aperto intersecante il bordo di H^m in un altro aperto dello stesso tipo. Pertanto $d(h^{-1} \circ g) : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ deve mandare lo spazio tangente $T_u\partial U = \partial H^m$ in $T_v\partial V = \partial H^m$, dal momento che $h^{-1} \circ g$ si restringe a una parametrizzazione di ∂V a partire da ∂U .

Quindi $J(h^{-1} \circ g)_u$ deve essere della seguente forma:

$$J(h^{-1} \circ g)_u = \begin{pmatrix} * & | & * \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se $h^{-1} \circ g = (\Psi_1, \Psi_2)$, con Ψ_1 funzione a valori in $\mathbb{R}^{m-1}$ e Ψ_2 a valori in $\mathbb{R}$, allora:

$$\lambda = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_m}(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\Psi_2(x + \varepsilon x_m)}^{\geq 0} - \overbrace{\Psi_2(x)}^{=0}}{\varepsilon} \geq 0.$$

Quindi $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m) = H^m$, da cui segue poi facilmente la tesi.

Definizione 4.98.

Data una m -varietà bordata M e un punto x appartenente al bordo ∂M , si definisce il **semispazio interno** riferito a x come:

$$dg_u(H^m \setminus \partial H^m),$$

dove g è una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$. I suoi vettori sono detti **interni**.

Si dice **semispazio esterno** il semispazio complementare a quello interno rispetto al taglio dell'iperpiano $T_x\partial M$ in T_xM , e i suoi vettori sono detti **esterni**.

Lemma 4.99.

Sia $M \cong [0, 1]$. Si fissi un diffeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$. Allora $d\varphi_0(1)$ è un vettore interno, mentre $d\varphi_1(1)$ è esterno.

Dimostrazione.

Si fissi ε tale per cui $0 < \varepsilon < 1$. Poniamo $I_0 = [0, \varepsilon]$ e $I_1 = (\varepsilon, 1]$. Osserviamo che $\varphi|_{I_0}$ è una parametrizzazione locale di $\varphi(0)$, una volta identificato I_1 naturalmente con H^1 .

Allora $d\varphi_0(1)$ è interno dal momento che $d\varphi_0^{-1}(d\varphi_0(1)) = 1 > 0$.

Per quanto riguarda invece $\varphi(1)$, una parametrizzazione locale è data su I_1 con H^1 secondo $\Psi(t) = \varphi(1 - t)$.

Osserviamo che $d\Psi_0^{-1}(d\varphi_1(1)) = -1 < 0$, e dunque $d\varphi_1(1)$ è invece esterno. $\square$

4.6.7 Orientazione sul bordo della varietà

Osservazione 4.100 (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – *esistenza*).

Sia $x \in \partial M$ un punto della m -varietà orientata (M, Θ) , con $m > 1$. Sia $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$ che sia compatibile con l'orientazione Θ . Allora:

- per definizione, $dg_u(-e_m)$ è un vettore *esterno* per x ;
- $\{dg_u(e_i)\}_{i=1, \dots, m-1}$ è una base di $T_x\partial M$, dacché $g|_{\partial H^m}$ si identifica come una parametrizzazione locale di x in ∂M ;
- $\{dg_u(e_i)\}_{i=1, \dots, m}$ è una base positiva di T_xM , dacché g è compatibile e $\{e_i\}_i$ ha l'orientazione canonica in $\mathbb{R}^m$.

Osservazione 4.101 (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – *unicità*).

Sia $x \in \partial M$ un punto della m -varietà orientata (M, Θ) , con $m > 1$. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di T_xM tale per cui v_1 un

vettore esterno per $x \in \partial M$ e $\{v_2, \dots, v_n\}$ è base di $T_x \partial M$.

Sia $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ un'altra tale base di $T_x M$. Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$. Allora dg_u è un isomorfismo, e in quanto tale lascia invariate le relazioni di orientazioni delle basi di $T_u U = \mathbb{R}^m$ quando portate in $T_x M$.

Sia $w_i = dg_u^{-1}(v_i)$ e sia $w'_i = dg_u^{-1}(v'_i)$. Dal momento che v_1 e v'_1 sono vettori esterni, si deve avere necessariamente $(w_1)_m, (w'_1)_m < 0$. Dal momento che $g|_{\partial H^m}$ si identifica naturalmente come una parametrizzazione locale di x in ∂M , e che i v_i e i v'_i per $i > 1$ formano una base di $T_x \partial M$, si ha $(w_i)_m = (w'_i)_m = 0$ per ogni $i > 1$.

Dunque la matrice di cambio di base da $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ è della seguente forma:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline * & A \end{array} \right),$$

dove $\lambda > 0$ affinché w_1 e w'_1 abbiano ancora lo stesso segno sull'ultima coordinata. Dal momento che $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ sono basi positive di $T_x M$, allora hanno stesso orientazione, e quindi $\det(M) > 0$. Ne segue che $\det(A) > 0$.

Osserviamo che A è proprio la matrice di cambio di base da $\{v_2, \dots, v_n\}$ a $\{v'_2, \dots, v'_n\}$. Dunque queste due basi hanno stessa orientazione.

Osservazione 4.102 (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – è effettivamente un'orientazione).

Sia $x \in \partial M$ un punto della m -varietà orientata (M, Θ) , con $m > 1$. Denotiamo con $\Theta_x^{\partial M}$ l'orientazione indotta da $\{v_2, \dots, v_n\}$ su $T_x \partial M$ da una base positiva $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di $T_x M$ con v_1 esterno e $\{v_2, \dots, v_n\}$ base di $T_x \partial M$.

Definiamo:

$$\Theta^{\partial M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Theta_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}.$$

Data $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U) \subseteq M$ parametrizzazione locale compatibile di $x \in \partial M$ in M , $g|_{\partial U}$, identificata come parametrizzazione da $\mathbb{R}^{m-1}$, è compatibile rispetto a $\Theta^{\partial M}$, a meno di restringimento del dominio a una palla con conseguente riflessione rispetto a un asse.

Si può infatti estendere in tal caso la base canonica di $\mathbb{R}^{m-1} \cong \partial H^m$ a una base di $\mathbb{R}^m$ con l'aggiunta di un vettore la cui immagine tramite dg_- risulta essere sempre esterna. Quindi $\Theta^{\partial M}$ è un'orientazione per ∂M .

Definizione 4.103 (Orientazione indotta sul bordo).

Sia (M, Θ) una m -varietà bordata e orientata con $m > 1$. Per $x \in \partial M$ denotiamo con $\Theta_x^{\partial M}$ l'orientazione indotta da $\{v_2, \dots, v_n\}$ su $T_x \partial M$ da una base positiva $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di $T_x M$ con v_1 esterno e $\{v_2, \dots, v_n\}$ base di $T_x \partial M$.

Si definisce allora $\Theta^{\partial M} = \{\Theta_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}$ come l'**orientazione indotta sul bordo** (o *orientazione di bordo*) per ∂M .

Per $M \cong [0, 1]$ orientata tramite un diffeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$, si associa -1 a $\varphi(0)$ e $+1$ a $\varphi(1)$.

Corollario 4.104.

Sia M una m -varietà orientabile immersa in $\mathbb{R}^m$. Allora ∂M è orientabile con l'orientazione indotta sul bordo dall'orientazione canonica di $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla Proposizione 4.95. $\square$

Corollario 4.105.

S^n è orientabile per ogni n .

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Corollario 4.104, dacché $S^n = \partial D^{n+1}$ e D^{n+1} è una $(n+1)$ -varietà immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

4.7 Teoria del grado su $\mathbb{Z}$

4.7.1 Grado intero rispetto a un valore regolare

Definizione 4.106 (Segno di un differenziale in un punto). Sia M una varietà orientata con Θ^M e N orientata con Θ^N e $\dim M = \dim N$. Se $f : M \rightarrow N$ è una mappa liscia, si definisce il **segno di df_x** per un punto regolare $x \in M$ come:

$$\text{sgn}(df_x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x(\Theta^M) = \Theta^N, \\ -1 & \text{se } df_x(\Theta^M) = -\Theta^N. \end{cases}$$

Definizione 4.107 (Grado intero di un valore regolare).

Sia M una varietà chiusa e sia N una varietà connessa con $\partial N = \emptyset$ e $\dim M = \dim N$. Sia M orientata con Θ^M e sia N orientata con Θ^N .

Se $y \in N$ è regolare per $f : M \rightarrow N$ liscia, si definisce il **grado di f rispetto a y** come:

$$\deg(f; y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x).$$

Osservazione 4.108 (Il grado intero è localmente costante).

Se $y \in N$ è regolare, possiamo scegliere per il Lemma 4.31 un intorno I_1 sul quale $|f^{-1}(-)|$ è costante.

Inoltre, per il Teorema della permanenza del segno applicato sul determinante dello jacobiano di $h^{-1} \circ f \circ g$, dove $g : U \rightarrow g(U)$ parametrizza localmente $x \in f^{-1}(y)$ e $h : V \rightarrow h(V)$ un intorno di y , esiste un intorno I_2 di y sul quale le orientazioni sono preservate allo stesso modo in cui lo sono preservate dalle controimmagini di y .

Poiché i valori regolari sono aperti (vd. Lemma 4.76), possiamo allora prendere un intorno aperto di valori regolari in $I_1 \cap I_2$ entro cui $\deg(f; -)$ è costante; quindi il grado intero è *localmente* costante.

4.7.2 Grado di una mappa estendibile dal bordo

Lemma 4.109 (Il grado di una mappa estendibile dal bordo è nullo).

Sia X una varietà compatta e orientata con bordo non nullo. Sia N una varietà connessa, orientata, senza bordo e con $\dim X = \dim N + 1$. Sia $F : X \rightarrow N$ una mappa liscia.

Se $y \in N$ è un valore regolare per $f \stackrel{\text{def}}{=} F|_{\partial X}$, allora $\deg(f; y) = 0$.

Dimostrazione.

Denotiamo con n la dimensione di X .

Grazie all'Osservazione 4.108, sappiamo che esiste un intorno di y fatto di valori regolari di f su cui $\deg(f; -)$ è costante. Possiamo prendere allora in questo intorno, per il Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), un valore regolare z di F . Per definizione, z è valore regolare sia di F che di f ; mostrando che $\deg(f; z) = 0$, mostriamo dunque anche che $\deg(f; y) = 0$, per costruzione.

Per il Teorema 4.57, allora $F^{-1}(z)$ è una 1-varietà compatta e chiusa topologicamente con bordo $F^{-1}(z) \cap \partial M = f^{-1}(z)$. Per il Corollario 4.59, $F^{-1}(z)$ è unione di archi (con 2 punti sul bordo ciascuno) e cerchi (che non hanno bordo). Per mostrare la tesi è sufficiente mostrare che per ogni arco i punti di bordo abbiano segno opposto sul differenziale, in modo tale che la somma complessiva dei segni sia ancora nulla.

Sia $A \subseteq F^{-1}(z) \subseteq X$ un tale arco. Fissiamo un diffeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$. Poniamo $v_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} d\varphi_t(1)$. Allora vale:

$$T_{\varphi(t)}X = \underbrace{T_{\varphi(t)}A \oplus (T_{\varphi(t)}A)^\perp}_{=\text{span}(v_1(t))},$$

dove ricordiamo che, per una generalizzazione della Proposizione 4.36, $dF_{\varphi(t)}|_{(T_{\varphi(t)}A)^\perp} : (T_{\varphi(t)}A)^\perp \rightarrow T_zN$ è un isomorfismo.

Fissiamo una base positiva $\{w_2, \dots, w_n\}$ di T_yN . Possiamo allora porre:

$$v_i(t) = dF_{\varphi(t)}|_{(T_{\varphi(t)}A)^\perp}^{-1}(w_i), \quad i = 2, \dots, n.$$

Poiché $v_1(t)$ è ortogonale agli altri $v_i(t)$, $\{v_i(t)\}_i$ è una base di $T_{\varphi(t)}X$.

Se poniamo $A \stackrel{\text{def}}{=} \{t \mid \{v_i(t)\}_i \text{ positiva}\} \subseteq [0, 1]$, allora A è un aperto di $[0, 1]$. Infatti, per il Teorema della permanenza del segno applicato allo jacobiano di una parametrizzazione locale, in un intorno di t_0 si mantiene la stessa orientazione. Analogamente anche il complementare di A è aperto. Dacché $[0, 1]$ è connesso, allora uno tra A e il suo complementare è vuoto: in altre parole $\{v_i(t)\}_i$ è sempre positiva per ogni $t \in [0, 1]$, o altrimenti è sempre negativa.

A meno di invertire l'orientazione di φ usando al suo posto $\varphi(1 - t)$, possiamo assumere che $\mathcal{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{v_i(t)\}_i$ sia sempre positiva.

Mostriamo che $\text{sgn}(df_{\varphi(0)}) = -1$. Sia $\mathcal{B}' \stackrel{\text{def}}{=} \{v_1(0), v_2'(0), \dots, v_n'(0)\}$ una base di $T_{\varphi(0)}\partial X$ tale per cui $\{dF_{\varphi(0)}(v_i'(0))\}_{i \geq 2}$ è una base positiva di T_zN . Se mostriamo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ hanno la stessa orientazione, dal momento che $\mathcal{B}$ è positiva e $v_1(0)$ è interno per il Lemma 4.99, si deduce dalla definizione di orientazione di bordo che $\{v_2'(0), \dots, v_n'(0)\}$ è negativa; in particolare $df_{\varphi(0)}$ invertirebbe l'orientazione, e quindi avrebbe segno -1 .

Consideriamo la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, della seguente forma:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & | & * \\ 0 & | & B \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che B è la matrice di cambio di base ottenuta togliendo ad entrambi le basi il vettore $v_1(0)$. Per costruzione, queste tali basi hanno la stessa orientazione dal momento che $dF_{\varphi(0)}$ mantiene invariate le orientazioni. Dunque $\det(B) > 0$, da cui si deduce che $\det(M) > 0$, e quindi che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ hanno effettivamente la stessa orientazione.

Per $\varphi(1)$ il ragionamento è del tutto analogo, ma essendo $v_1(1)$ esterno per il Lemma 4.99, il segno sarà invece $+1$. Questo conclude la dimostrazione per le osservazioni fatte in precedenza. $\square$

4.7.3 Passaggio per omotopia e buona definizione del grado intero di una mappa

Lemma 4.110 (di omotopia, per il grado intero).

Siano M e N due varietà orientate con M chiusa e $\dim M = \dim N$. Sia $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ un'omotopia C^∞ con $f \stackrel{\text{def}}{=} F_0$ e $g \stackrel{\text{def}}{=} F_1$. Se $y \in N$ è un valore regolare comune a f e g , allora:

$$\deg(f; y) = \deg(g; y).$$

Dimostrazione.

Dal momento che $M \times [0, 1]$ è un prodotto, allora acquisisce l'orientazione prodotto di quella di M con quella canonica di $[0, 1]$. Grazie all'Osservazione 4.108 e al Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), possiamo assumere senza perdita di generalità che y sia un valore regolare anche di F .

Sia $\mathcal{B}_x$ una base positiva di T_xM per $x \in M$. Allora, per l'Osservazione 4.86 la base $\mathcal{B}_x \cup \{1\}$ è positiva per $T_{(x,t)}M \times [0, 1] \cong T_xM \times T_t[0, 1]$.

Ricordiamo che il bordo di $M \times [0, 1]$ è $M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$ per 4.64. Studiamo l'orientazione indotta su tale bordo. Poiché $(0, 1) \in T_{(x,0)}M \times [0, 1]$ è interno per il Lemma 4.99, $\{-\mathcal{B}_x\} \cup \{-1\}$ è positiva per $(x, 0)$, e quindi $\mathcal{B}_x$ è una base negativa di $(x, 0)$ sul bordo. Dunque $M \times \{0\} \cong M$ è orientata come $-M$. Analogamente, $(0, 1) \in T_{(x,1)}M \times [0, 1]$ è esterno, quindi $M \times \{1\} \cong M$ è orientata come M .

Allora, per il Lemma 4.109, si ha:

$$\deg(g; y) - \deg(f; y) = \deg(F|_{\partial(M \times [0, 1])}; y) = 0,$$

da cui la tesi. $\square$

Teorema 4.111 (Il grado intero è ben definito).

Siano M e N varietà con M chiusa, N connessa e $\dim M = \dim N$. Se $f : M \rightarrow N$ è liscia e $y, z \in N$ sono suoi valori regolari, allora:

$$\deg(f; y) = \deg(f; z).$$

Dimostrazione.

Per il Lemma 4.73, esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ con $h(y) = z$ isotopo all'identità id_N . Sia $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ una tale isotopia.

Consideriamo la mappa $f(t) = \text{sgn}(d(H_t)_y(\Theta_y^N))$. Poiché $H_1 = \text{id}_N$, si ha chiaramente $f(1) = 1$. Inoltre f è continua e localmente costante, utilizzando l'usuale argomento sulla permanenza del segno sul determinante dello jacobiano, una volta scelta una parametrizzazione locale. Dunque, poiché $[0, 1]$ è connesso, f deve essere costantemente uguale a 1. Quindi $d(H_t)_y(\Theta_y^N) = \Theta_{H_t(y)}^N$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Segue quindi che $dh_y(\Theta_y^N) = \Theta_z^N$, da cui per la regola della catena:

$$\deg(h \circ f; z) = \deg(f; y).$$

D'altra parte $h \circ f$ e f sono C^∞ -omotope tramite $H \circ (f \times \text{id}_{[0,1]})$, e quindi, per il Lemma 4.110:

$$\deg(f; y) = \deg(h \circ f; z) = \deg(f; z).$$

□

Definizione 4.112 (Grado intero di una mappa liscia).

Sia M una varietà chiusa e sia N una varietà connessa. Siano M e N della stessa dimensione e orientate. Se $f : M \rightarrow N$ è una mappa liscia, si definisce il suo **grado intero** come:

$$\deg(f) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(f; y),$$

dove y è un valore regolare qualsiasi di f .

Teorema 4.113.

Sia M una varietà chiusa e sia N una varietà connessa. Siano M e N della stessa dimensione e orientate. Se f e g sono due mappe lisce C^∞ -omotope da M in N , allora:

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Dimostrazione.

Per il Lemma 4.76, i valori regolari di f formano un aperto in N . Allora, per il Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), esiste in questo aperto anche un valore regolare di g . Per il Lemma 4.110, dunque f e g condividono lo stesso grado intero. □

Corollario 4.114.

Sia M una varietà chiusa e connessa. Se $f : M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo di grado $\deg(f) = -1$, allora f non è omotopa all'identità id_M , né a una mappa costante c_x per $x \in M$.

Dimostrazione.

La tesi è un'immediata conseguenza del Teorema 4.113, dal momento che $\deg(\text{id}_M) = 1$ e $\deg(c_x) = 0$ (infatti c_x non è surgettiva). □

Proposizione 4.115 (Il grado è moltiplicativo).

Sia M una varietà orientata, chiusa e connessa. Se f e g sono due mappe lisce da M in sé stessa, allora:

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g).$$

Dimostrazione.

Sia z un valore regolare di $f \circ g$. Sia $x \in (f \circ g)^{-1}(z)$. Allora, per la regola della catena:

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$

Dal momento che z è regolare, x è un punto regolare e dunque $d(f \circ g)_x$ è un isomorfismo. Dunque necessariamente $df_{g(x)}$ e dg_x sono isomorfismi, oltretutto x è regolare anche per g , mentre $g(x)$ lo è per f .

Sia $f^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Da quanto appena visto, ogni y_i è valore regolare. Allora:

$$g^{-1}(f^{-1}(z)) = \bigsqcup_{i=1}^n g^{-1}(y_i).$$

Allora, sfruttando anche l'Osservazione 4.86:

$$\deg(f \circ g) = \sum_{x \in g^{-1}(f^{-1}(z))} \text{sgn}(df_{g(x)}) \text{sgn}(dg_x).$$

Raccogliendo i termini utilizzando $f^{-1}(z)$ si ottiene dunque, anche usando il Teorema 4.111:

$$\deg(f \circ g) = \sum_{y_i \in f^{-1}(z)} \text{sgn}(df_{y_i}) \deg(g) = \deg(f) \deg(g).$$

□

4.7.4 Grado di z^k , delle riflessioni e della mappa antipodale su S^1

Lemma 4.116.

Sia $f_k : S^1 \rightarrow S^1$ tale per cui:

$$f_k(z) = z^k \in \mathbb{C},$$

dove si è identificato $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$. Allora 1 è un valore regolare di f_k e $\deg(f_k) = k$.

Quindi, per $k \neq 0$, f_k non può estendersi a una mappa liscia da D^2 a S^1 .

Dimostrazione.

Consideriamo l'elemento $1 \in S^1$. Osserviamo che $f_k^{-1}(1)$ è l'insieme delle radici k -esime dell'unità, e quindi contiene esattamente k elementi (a meno del segno).

La funzione f_k si estende a $F_k(z) = z^k$ su tutto $\mathbb{C}$. Osserviamo che $T_1 S^1 = \text{span}(i)$. Per determinare allora il segno di $d(f_k)_1$ è sufficiente considerare la seguente derivata:

$$d(f_k)_1(i) = \left. \frac{d}{dt} e^{itk} \right|_{t=0} = ki.$$

Dunque $d(f_k)_1$ è un isomorfismo per $k \neq 0$, e preserva l'orientazione se $k > 0$, mentre non la preserva se $k < 0$.

Sia ora $\xi = e^{i\theta_0} \in f_k^{-1}(1)$. Consideriamo il diffeomorfismo $h_\xi : S^1 \rightarrow S^1$ tale per cui:

$$h_\xi(z) = \xi \cdot z,$$

ovverosia la rotazione indotta da ξ . Si verifica facilmente che:

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1, \quad H(z, t) = e^{i\theta_0 t} z$$

è un'omotopia liscia da id_{S^1} a h_ξ . Dunque $\deg(h_\xi; 1) = \deg(\text{id}_{S^1}; 1) = 1$.

Osserviamo che $f_k = f_k \circ h_\xi$. Quindi:

$$d(f_k)_1 = d(f_k \circ h_\xi)_1 = d(f_k)_\xi \circ d(h_\xi)_1 = d(f_k)_\xi \circ h_\xi.$$

Dal momento che h_ξ è invertibile, si deduce che $d(f_k)_\xi$ è sempre un isomorfismo, e dunque che 1 è un valore regolare. Inoltre, dalla stessa uguaglianza si deduce per la moltiplicatività del segno dei differenziali che $\text{sgn}(d(f_k)_1) = \text{sgn}(d(f_k)_\xi)$.

Si conclude facilmente allora che $\deg(f) = \deg(f; 1) = k$. L'ultima affermazione è conseguenza del Lemma 4.109. $\square$

Osservazione 4.117 (Un diffeomorfismo ha grado 1 o -1). Per un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ su M chiusa e connessa, possono esistere solo due gradi, +1 o -1, dacché l'insieme controimmagine di un valore regolare contiene un singolo elemento.

In particolare, $\deg(f) = 1$ se e solo se per un elemento $x \in M$, df_x preserva l'orientazione.

Lemma 4.118.

Sia $r_i : S^n \rightarrow S^n$ la riflessione tale per cui:

$$r_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} (\underbrace{x_1, \dots, x_i}_{\text{invariati}}, -x_i, \underbrace{\dots, x_{n+1}}_{\text{invariati}}).$$

Allora $\deg(r_i) = -1$.

Dimostrazione.

Per l'Osservazione 4.117 è sufficiente studiare $d(r_i)_{e_i}$. Per il Corollario 4.37, si ha:

$$T_{e_i} S^n = e_i^\perp = T_{-e_i} S^n.$$

r_i si estende con la stessa formula a un diffeomorfismo $\tilde{r}_i$ su D^{n+1} . Poiché $\tilde{r}_i$ è lineare e $T_{e_i} D^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, si ha $d\tilde{r}_i|_{e_i} = \tilde{r}_i$. Tale differenziale manda la base $\{e_i, e_1, \dots, e_{n+1}\}$ in $\{-e_i, e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Queste due basi hanno orientazione diversa, e quindi solo una di queste induce l'orientazione canonica su $\mathbb{R}^{n+1}$.

Osserviamo che e_i è esterno per sé stesso; allo stesso modo $-e_i$ è esterno per sé stesso. Segue allora facilmente che $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ cambia orientazione tramite r_i , e quindi $\deg(r_i) = -1$. $\square$

Lemma 4.119.

Sia $A : S^n \rightarrow S^n$ la mappa antipodale, ossia tale per cui $A(x) = -x$. Allora $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla Proposizione 4.115 e il Lemma 4.118. $\square$

4.7.5 Campi vettoriali tangenti su S^n e pettinabilità

Definizione 4.120 (Campo vettoriale tangente).

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà liscia, con o senza bordo. Un **campo vettoriale tangente** è una mappa liscia $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale per cui:

$$v(x) \in T_x M, \quad \forall x \in M.$$

Definizione 4.121 (Pettinabilità).

Una varietà liscia, con o senza bordo, si dice **pettinabile** se ammette un campo vettoriale tangente mai nullo.

Teorema 4.122 (di pettinabilità della sfera).

S^n è pettinabile se e solo se n è dispari.

Dimostrazione.

Se n è dispari, un campo vettoriale tangente mai nullo è il seguente:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+1}, x_n) \in x^\perp.$$

Sia ora n pari. Supponiamo v sia un campo vettoriale tangente mai nullo. Senza perdita di generalità, possiamo considerarlo unitario. Allora possiamo costruire un omotopia liscia dalla mappa antipodale A a id_{S^n} nel seguente modo:

$$H : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad H(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x).$$

Tuttavia una tale omotopia non può esistere per il Teorema 4.113: l'identità ha grado 1, mentre la mappa antipodale ha grado $(-1)^{n+1} = -1$ per il Lemma 4.119. Quindi v non può esistere per n pari. $\square$

4.8 Indici di campi vettoriali su aperti di $\mathbb{R}^m$

4.8.1 Zero isolato e indice di un campo in uno zero

Definizione 4.123 (Zero isolato).

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto. Allora z si dice **zero isolato** di f se esiste un raggio $\varepsilon > 0$ tale per cui f in $B_\varepsilon(z)$ ammette come unico zero z .

Osservazione 4.124 (L'indice è ben definito).

Sia $\varepsilon > 0$ tale per cui z è unico zero per f in $B_\varepsilon(z)$. Sia $v_\varepsilon : S^m \rightarrow \partial B_\varepsilon(z)$ tale per cui:

$$v_\varepsilon(x) = z + \varepsilon x.$$

Osserviamo che v_ε preserva l'orientazione. Consideriamo

$$\overline{f}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial B_\varepsilon(z)}.$$

Poiché v_ε preserva l'orientazione, $\deg(\overline{f}_\varepsilon) = \deg(\overline{f}_\varepsilon \circ v_\varepsilon)$. Scelto un altro ε' , possiamo definire un'omotopia H nel seguente modo:

$$H_t = \overline{f}_{(1-t)\varepsilon + \varepsilon'} \circ v_{(1-t)\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Allora, per il Teorema 4.113:

$$\deg(\overline{f}_\varepsilon) = \deg(\overline{f}_\varepsilon \circ v_\varepsilon) = \deg(\overline{f}_{\varepsilon'} \circ v_{\varepsilon'}) = \deg(\overline{f}_{\varepsilon'}).$$

Definizione 4.125 (Indice di f in z).

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto. Sia z uno zero isolato di f . Si definisce allora l'**indice di f in z** come:

$$\text{ind}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(\overline{f_\varepsilon}), \quad \overline{f_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial B_\varepsilon(z)},$$

dove ε è un raggio tale per cui z è unico zero in $B_\varepsilon(z)$.

Corollario 4.126 (Indice di z^k in 0).

Sia $v_k : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tale per cui $v_k(z) = z^k$. Allora $\text{ind}(v_k, 0) = k$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Lemma 4.116. $\square$

4.8.2 Lemma di Hopf e teorema fondamentale dell'algebra

Lemma 4.127 (di Hopf).

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ una m -varietà compatta con bordo. Sia $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vettoriale con zeri isolati e $v|_{\partial X}$ mai nullo.

Allora:

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z) = \deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial X} : \partial X \rightarrow S^{m-1} \right).$$

Dimostrazione.

Poiché gli zeri di v sono isolati, possiamo togliere a X una famiglia di dischi disgiunti $\{B_{\varepsilon_i}(z_i)\}$ contenenti tali zeri. Allora, poiché tali dischi sono interni, l'orientazione indotta su ∂W sarà:

$$\partial W = \partial X \cup \bigsqcup_i -\partial B_{\varepsilon_i}(z_i).$$

Quindi, rispettando le orientazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial W} : \partial W \rightarrow S^{m-1} \right) &= \\ \deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial X} : \partial X \rightarrow S^{m-1} \right) &- \sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z). \end{aligned}$$

Tuttavia, poiché $\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial W}$ è la restrizione di $\frac{v}{\|v\|} : W \rightarrow S^{m-1}$ sul bordo, per il Lemma 4.109, si ha anche:

$$\deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial W} : \partial W \rightarrow S^{m-1} \right) = 0,$$

da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Teorema 4.128 (fondamentale dell'algebra).

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con $\deg(p) = n$. Allora:

$$\deg(p) = \sum_{z_0 \in p^{-1}(0)} \text{mult}(p, z_0),$$

dove mult indica la molteplicità algebrica di uno zero in un polinomio.

Dimostrazione.

Dal momento che $p(x)$ non può avere più di n zeri, questi sono sicuramente isolati e possiamo prendere inoltre una palla $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ con $p^{-1}(0) \subseteq B_r(0)$. Possiamo allora applicare il Lemma 4.127 su $p : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ e ottenere:

$$\deg \left(\frac{p}{\|p\|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right) = \sum_{z_0 \in p^{-1}(0)} \text{ind}(p, z_0).$$

Mostriamo che il termine a sinistra coincide con $\deg(p)$ (1), e che $\text{ind}(p, z_0)$ coincide con $\text{mult}(p, z_0)$ (2), ottenendo infine la tesi.

(1) Supponiamo che $\deg(p)$ sia n e che $p(z)$ sia dunque della seguente forma:

$$p(z) = a_n z^n + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}_{g(z)},$$

dove $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} p(z) - a_n z^n$.

Osserviamo che:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{g(z)}{z^n} \right| = 0. \quad (*)$$

Una volta posto $p_t(z) = a_n z^n + t g(z)$, si ottiene:

$$\left| \frac{p_t(z)}{z^n} \right| \geq |a_n| - t \left| \frac{g(z)}{z^n} \right|.$$

Allora, per (*), possiamo scegliere r sufficientemente grande in modo tale che si verifichi sempre:

$$\left| \frac{p_t(z)}{z^n} \right| > 0, \quad z \in \partial B_r(0).$$

In particolare, $p_t(z)$ non si annulla su $\partial B_r(0)$. Possiamo allora considerare l'omotopia indotta da $\frac{p_t(z)}{|p_t(z)|}$. Osserviamo che $p_0(z) = a_n z^n$ e che $p_1(z) = p(z)$. Per il Teorema 4.113, si ha allora:

$$\begin{aligned} \deg \left(\frac{p(z)}{|p(z)|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right) &= \\ \deg \left(\frac{a_n}{|a_n|} \frac{z^n}{|z^n|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right), \end{aligned}$$

a cui, applicando il Lemma 4.116 e il fatto secondo cui la moltiplicazione per una costante di fase è isotopa all'identità (vd. dimostrazione del Lemma 4.116), si ottiene facilmente che:

$$\deg \left(\frac{p(z)}{|p(z)|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right) = n = \deg(p).$$

(2) Sia z_0 uno zero di $p(z)$. Allora $p(z)$ si scrive come:

$$p(z) = (z - z_0)^\ell q(z),$$

per un qualche polinomio $q(z) \in \mathbb{C}[z]$, dove $\ell = \text{mult}(p, z_0)$. Entro una certa palla di raggio ε centrata in z_0 , $q(z)$ non ha alcuno zero. Se consideriamo la

mappa $f : S^1 \rightarrow \partial B_{z_0}(\varepsilon)$ tale per cui $f(z) = z_0 + \varepsilon z$, che preserva l'orientazione, allora si ha:

$$\text{ind}(p, z_0) = \deg \left(\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|} : \partial S^1 \rightarrow S^1 \right).$$

Osserviamo che:

$$\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|}(z) = \frac{z^\ell q(z_0 + \varepsilon z)}{|q(z_0 + \varepsilon z)|}.$$

Possiamo definire un'omotopia $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ tale per cui:

$$H_t(z) = \frac{z^\ell q(z_0 + t\varepsilon z)}{|q(z_0 + t\varepsilon z)|},$$

che porta $z^\ell \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|}$ in $\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|}$. Quindi, per il Teorema 4.113, si ha:

$$\deg \left(z^\ell \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|} : S^1 \rightarrow S^1 \right) = \deg \left(\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|} : \partial S^1 \rightarrow S^1 \right).$$

Come visto nella dimostrazione del Lemma 4.116, la moltiplicazione per elemento di S^1 è isotopa all'identità, e dunque:

$$\deg \left(z^\ell \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|} : S^1 \rightarrow S^1 \right) = \deg(z^\ell : S^1 \rightarrow S^1) = \ell,$$

da cui segue, combinando i pezzi, che:

$$\text{ind}(p, z_0) = \ell.$$

4.9 Campi vettoriali su varietà

4.9.1 Indice di un campo vettoriale tangente su una varietà

Fatto 4.129.

Sia $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente della varietà $M \subseteq \mathbb{R}^m$, con $z \in M$ zero isolato di v .

Se $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione di M in z con $g(u) = z$, allora possiamo considerare il campo vettoriale $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale per cui:

$$\xi(u) = (dg_u)^{-1}(v(g(u))), \quad \forall u \in U.$$

Allora $\text{ind}(\xi, g^{-1}(z))$ non dipende dalla scelta della parametrizzazione scelta g .

Definizione 4.130 (Indice di un campo vettoriale tangente su varietà rispetto a un punto).

Sia $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente della varietà $M \subseteq \mathbb{R}^m$, con $z \in M$ zero isolato di v .

Si definisce allora l'**indice di v in z** come:

$$\text{ind}(v, z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}(\xi, g^{-1}(z)),$$

dove $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione locale di M in z con $g(u) = z$ e $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ è tale per cui:

$$\xi(u) = (dg_u)^{-1}(v(g(u))), \quad \forall u \in U.$$

4.9.2 Simplessi e caratteristica di Eulero

Definizione 4.131 (m -simpleso).

Un m -simpleso $\Delta^{(m)}$ in $\mathbb{R}^k$ con $k \geq m$ è definito come l'involuppo convesso di $m + 1$ punti affinementemente indipendenti.

Si dice **faccia** di $\Delta^{(m)}$ un simpleso generato da alcuni dei generatori di $\Delta^{(m)}$.

Definizione 4.132 (Complesso simpliciale).

Si dice **complesso simpliciale** l'unione di simplessi in $\mathbb{R}^k$ che si intersecano a due a due nell'insieme vuoto oppure in una faccia.

Fatto 4.133.

Ogni varietà M è omeomorfa ad un complesso simpliciale, finito se M è compatta.

Definizione 4.134 (Caratteristica di Eulero-Poincaré).

Sia M compatta. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero-Poincaré** $\chi(M)$ come:

$$\chi(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i s_i(C),$$

dove C è un complesso simpliciale finito a cui M è omotopicamente equivalente e $s_i(C)$ è il numero di i -simplessi in C .

Fatto 4.135.

La caratteristica di Eulero-Poincaré è ben definita e invariante per equivalenza omotopica. $\square$

4.9.3 Teorema di Poincaré-Hopf

Teorema 4.136 (Poincaré-Hopf).

Sia M una varietà compatta con bordo, eventualmente vuoto. Se $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un campo vettoriale tangente con zeri isolati e $v|_{\partial M}$ è esterno in ogni punto (se $\partial M \neq \emptyset$), allora:

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z) = \chi(M).$$

Corollario 4.137.

Si può calcolare $\chi(S^m)$ nel seguente modo:

$$\chi(S^m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ 1 & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases}$$

Dimostrazione.

...

$\square$