

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17, 19 e 26 aprile 2023

## Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale

**Nota.** Nel corso del documento, per  $V$  si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  e per  $\varphi$  un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

**Definizione.** (prodotto hermitiano) Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Una mappa  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **prodotto hermitiano** se:

- (i)  $\varphi$  è  $\mathbb{C}$ -lineare nel secondo argomento, ossia se  $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$  e  $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ ,
- (ii)  $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$ .

**Definizione.** (prodotto hermitiano canonico in  $\mathbb{C}^n$ ) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di  $\mathbb{C}^n$  il prodotto  $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tale per cui, detti  $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$  e  $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$ .

**Osservazione.**

- ▶  $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$ , ossia  $\varphi$  è additiva anche nel primo argomento.
- ▶  $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \bar{a}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ .
- ▶  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$ , e quindi  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Sia  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i$  e sia  $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v}_i$ , allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$ .
- ▶  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$ .

**Proposizione.** Data la forma quadratica  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  del prodotto hermitiano  $\varphi$  tale che  $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ , tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano  $\varphi$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \cdot \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2 \Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2 \Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto  $\varphi$  è univocamente determinato dalla sua forma quadratica.  $\square$

**Definizione.** Si definisce **matrice aggiunta** di  $A \in M(n, \mathbb{K})$  la matrice coniugata della trasposta di  $A$ , ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

**Osservazione.** Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
- $(AB)^* = B^*A^*$ ,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ , se  $A$  è invertibile.

**Definizione.** (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano**  $\varphi$  la matrice  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n}$ .

**Osservazione.** Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

**Proposizione.** (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi di  $V$ . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V).$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ . Allora  $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = \left( M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^i \right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^j = \left( M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) \right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^j$ , da cui si ricava l'identità desiderata.  $\square$

**Definizione.** (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto  $\varphi$  come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V\}.$$

**Proposizione.** Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e  $\varphi$  un prodotto hermitiano. Allora  $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))^1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  e sia  $\underline{v} \in V^\perp$ . Siano  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tali che  $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$ . Allora, poiché  $\underline{v} \in V^\perp$ ,  $0 = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) = a_1 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) + \dots + a_n \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$ , da cui si ricava che  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , e quindi che  $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ .

Sia ora  $\underline{v} \in V$  tale che  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Allora, per ogni  $\underline{w} \in V$ ,  $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$ , da cui si conclude che  $\underline{v} \in V^\perp$ , e quindi che  $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ , da cui  $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ , ossia la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

- ▶  $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{0\} \iff \varphi$  è degenere,
- ▶ Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di  $\mathbb{R}$ , il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.
- ▶ Come mostrato nei momenti finali del documento (vd. *Esercizio 3*), vale la formula delle dimensioni anche nel caso del prodotto hermitiano.

---

**Definizione.** (restrizione ai reali di uno spazio) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  con base  $\mathcal{B}$ . Si definisce allora lo spazio  $V_{\mathbb{R}}$ , detto **spazio di restrizione su  $\mathbb{R}$**  di  $V$ , come uno spazio su  $\mathbb{R}$  generato da  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ .

<sup>1</sup>Stavolta non è sufficiente considerare la mappa  $f : V \rightarrow V^*$  tale che  $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$ , dal momento che  $f$  non è lineare, bensì antilineare, ossia  $f(a\underline{v}) = \bar{a}f(\underline{v})$ .

**Esempio.** Si consideri  $V = \mathbb{C}^3$ . Una base di  $\mathbb{C}^3$  è chiaramente  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ . Allora  $V_{\mathbb{R}}$  sarà uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  generato dai vettori  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, i\underline{e}_1, i\underline{e}_2, i\underline{e}_3\}$ .

**Osservazione.** Si osserva che lo spazio di restrizione su  $\mathbb{R}$  e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti,  $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$ . Ciononostante,  $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$ , se  $\dim V \in \mathbb{N}$ .

**Definizione.** (complettizzazione di uno spazio) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Si definisce allora lo **spazio complessificato**  $V_{\mathbb{C}} = V \times V$  su  $\mathbb{C}$  con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$ ,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$ .

**Osservazione.** La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di  $\mathbb{C}$  come spazio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Infatti se  $z = (c, d)$ , vale che  $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ , mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme  $V \times \{\underline{0}\}$  come  $V$ , mentre  $\{\underline{0}\} \times V$  viene identificato come l'insieme degli immaginari  $iV$  di  $V_{\mathbb{C}}$ . Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di  $V \times \{\underline{0}\}$  equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di  $V$ . Allora, come accade per  $\mathbb{C}$ , si può sostituire la notazione  $(\underline{v}, \underline{w})$  con la più comoda notazione  $\underline{v} + i\underline{w}$ .

**Osservazione.** Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Innanzitutto si osserva che  $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$ . Pertanto si può concludere che  $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$  è una base dello spazio complessificato  $V_{\mathbb{C}}$  su  $\mathbb{C}$ .

Infatti, se  $(a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$ , allora  $(a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n) = (\underline{0}, \underline{0})$ . Poiché però  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che  $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$ , e quindi che  $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$  è linearmente indipendente.

Inoltre  $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$  genera  $V_{\mathbb{C}}$ . Se infatti  $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$ , e vale che:

$$\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, \quad \underline{w} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n,$$

allora  $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0})$ . Quindi  $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$ .

<sup>2</sup>Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema delle torri algebriche:  $[V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}] = [V : \mathbb{C}][\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[V : \mathbb{C}]$ .

**Definizione.** Sia  $f$  un'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Allora si definisce la **restrizione su  $\mathbb{R}$**  di  $f$ , detta  $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ , in modo tale che  $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$ .

**Osservazione.** Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$  su  $\mathbb{C}$ . Sia  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ . Si osserva allora che, se  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$  e  $A = A' + iA''$  con  $A', A'' \in M(n, \mathbb{R})$ , vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left( \begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array} \right).$$

Infatti, se  $f(\underline{v}_i) = (a_1 + b_1 i)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + b_n i)\underline{v}_n$ , vale che  $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n + b_1(i\underline{v}_1) + \dots + b_n(i\underline{v}_n)$ , mentre  $f_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = -b_1 \underline{v}_1 + \dots - b_n \underline{v}_n + a_1(i\underline{v}_1) + \dots + a_n(i\underline{v}_n)$ .

**Definizione.** Sia  $f$  un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Allora si definisce la **complettizzazione** di  $f$ , detta  $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ , in modo tale che  $f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w})$ .

**Osservazione.** Si verifica infatti che  $f_{\mathbb{C}}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare.

- $f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + i(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + if(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (f(\underline{v}_1) + if(\underline{w}_1)) + (f(\underline{v}_2) + if(\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$ .
- $f_{\mathbb{C}}((a + bi)(\underline{v} + i\underline{w})) = f_{\mathbb{C}}(a\underline{v} - b\underline{w} + i(a\underline{w} + b\underline{v})) = f(a\underline{v} - b\underline{w}) + if(a\underline{w} + b\underline{v}) = af(\underline{v}) - bf(\underline{w}) + i(af(\underline{w}) + bf(\underline{v})) = (a + bi)(f(\underline{v}) + if(\underline{w})) = (a + bi)f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w})$ .

**Proposizione.** Sia  $f_{\mathbb{C}}$  la completizzazione di  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Valgono allora i seguenti risultati:

- (i)  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_V$  assume gli stessi valori di  $f$ ,
- (ii)  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ ,
- (iii)  $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = \left( \begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}}(f) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right)$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i risultati separatamente.

- (i) Si osserva che  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$ . Dal momento che  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$  è  $\mathbb{R}$ -lineare, si conclude che  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$  assume gli stessi valori di  $f$ .

- (ii) Dal momento che  $\mathcal{B}$ , nell'identificazione di  $(\underline{v}, \underline{0})$  come  $\underline{v}$ , è sempre una base di  $V_{\mathbb{C}}$ , e  $f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$ , chiaramente  $[f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}} = [f(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}}$ , e quindi  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$ , dove si osserva anche che  $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ , essendo  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .
- (iii) Sia  $f(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$  con  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Come osservato in (i),  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}} = (f)_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}}$ , e quindi la prima metà di  $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})$  è formata da due blocchi: uno verticale coincidente con  $M_{\mathcal{B}}(f)$  e un altro completamente nullo, dal momento che non compare alcun termine di  $i\mathcal{B}$  nella scrittura di  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i)$ . Al contrario, per  $i\mathcal{B}$ ,  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = a_1(i\underline{v}_1) + \dots + a_n(i\underline{v}_n)$ ; pertanto la seconda metà della matrice avrà i due blocchi della prima metà, benché scambiati.

□

**Osservazione.** Dal momento che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$ ,  $f_{\mathbb{C}}$  e  $f$  condividono lo stesso polinomio caratteristico e vale che  $\text{sp}(f) \subseteq \text{sp}(f_{\mathbb{C}})$ , dove vale l'uguaglianza se e solo se tale polinomio caratteristico è completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, se  $V_{\lambda}$  è l'autospazio su  $V$  dell'autovalore  $\lambda$ , l'autospazio su  $V_{\mathbb{C}}$ , rispetto a  $f_{\mathbb{C}}$ , è invece  $V_{\mathbb{C}\lambda} = V_{\lambda} + iV_{\lambda}$ , la cui dimensione rimane invariata rispetto a  $V_{\lambda}$ , ossia  $\dim V_{\lambda} = \dim V_{\mathbb{C}\lambda}$  (infatti, analogamente a prima, una base di  $V_{\lambda}$  può essere identificata come base anche per  $V_{\mathbb{C}\lambda}$ ).

**Proposizione.** Sia  $f_{\mathbb{C}}$  la complessificazione di  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Allora un endomorfismo  $\tilde{g} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  complessifica un endomorfismo  $g \in \text{End}(V) \iff M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Se  $\tilde{g}$  complessifica  $g \in \text{End}(V)$ , allora, per la proposizione precedente,  $M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) = M_{\mathcal{B}}(g) \in M(n, \mathbb{R})$ . Se invece  $A = M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$ , si considera  $g = M_{\mathcal{B}}^{-1}(A) \in \text{End}(V)$ . Si verifica facilmente che  $\tilde{g}$  non è altro che il complessificato di tale  $g$ :

- $\tilde{g}(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i)$ , dove l'uguaglianza è data dal confronto delle matrici associate, e quindi  $\tilde{g}|_V = g$ ;
- $\tilde{g}(\underline{v} + i\underline{w}) = \tilde{g}(\underline{v}) + i\tilde{g}(\underline{w}) = g(\underline{v}) + ig(\underline{w})$ , da cui la tesi.

□

**Proposizione.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Allora esiste un unico prodotto hermitiano  $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  che estende  $\varphi$  (ossia tale che  $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$ ), il quale assume la stessa segnatura di  $\varphi$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  una base di Sylvester per  $\varphi$ . Si consideri allora il prodotto  $\varphi_{\mathbb{C}}$  tale che:

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)).$$

Chiaramente  $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$ . Si verifica allora che  $\varphi_{\mathbb{C}}$  è hermitiano:

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))] + [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_2))] = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$  (additività nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (a + bi)(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1)) = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1 + i(b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1)) = \varphi(\underline{v}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1) + \varphi(\underline{w}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1)) = a\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) - b\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(b\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - a\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) = a(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) - b(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + i(a(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + b(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1))) = (a + bi)(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))) = (a + bi)\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1)$  (omogeneità nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)) = \overline{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2))} = \overline{\varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}_2, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_2, \underline{v}_1))} = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \underline{v}_1 + \underline{w}_1)$  (coniugio nello scambio degli argomenti).

Ogni prodotto hermitiano  $\tau$  che estende il prodotto scalare  $\varphi$  ha la stessa matrice associata nella base  $\mathcal{B}$ , essendo  $\tau(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$  vero per ipotesi. Pertanto  $\tau$  è unico, e vale che  $\tau = \varphi_{\mathbb{C}}$ . Dal momento che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è una matrice di Sylvester,  $\varphi_{\mathbb{C}}$  mantiene anche la stessa segnatura di  $\varphi$ .  $\square$

**Teorema.** (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $\varphi$  un suo prodotto scalare non degenere. Allora per ogni  $f \in V^*$  esiste un unico  $\underline{v} \in V$  tale che  $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ .

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione  $a_{\varphi}$ . Poiché  $\varphi$  non è degenere,  $\text{Ker } a_{\varphi} = V^{\perp} = \{\underline{0}\}$ , da cui si deduce che  $a_{\varphi}$  è un isomorfismo. Quindi  $\forall f \in V^*$  esiste un unico  $\underline{v} \in V$  tale per cui  $a_{\varphi}(\underline{v}) = f$ , e dunque tale per cui  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_{\varphi}(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ .  $\square$

*Dimostrazione costruttiva.* Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortogonale di  $V$  per  $\varphi$ . Allora  $\mathcal{B}^*$  è una base di  $V^*$ . In particolare  $f = f(v_1)v_1^* + \dots + f(v_n)v_n^*$ . Sia  $\underline{v} = \frac{f(v_1)}{\varphi(v_1, v_1)}v_1 + \dots + \frac{f(v_n)}{\varphi(v_n, v_n)}v_n$ . Detto  $\underline{w} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ , si deduce che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(v_1) + \dots + a_nf(v_n) = f(\underline{w})$ . Se esistesse  $\underline{v}' \in V$  con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ . Si deduce dunque che  $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$ , contenente solo  $\underline{0}$  dacché  $\varphi$  è non degenere; e quindi si conclude che  $\underline{v} = \underline{v}'$ , ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ .  $\square$

**Teorema.** (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e sia  $\varphi$  un suo prodotto hermitiano non degenere. Allora per ogni  $f \in V^*$  esiste un unico  $\underline{v} \in V$  tale che  $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortogonale di  $V$  per  $\varphi$ . Allora  $\mathcal{B}^*$  è una base di  $V^*$ . In particolare  $f = f(v_1)v_1^* + \dots + f(v_n)v_n^*$ . Sia  $\underline{v} = \frac{f(v_1)}{\varphi(v_1, v_1)}v_1 + \dots + \frac{f(v_n)}{\varphi(v_n, v_n)}v_n$ . Detto  $\underline{w} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ , si deduce che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(v_1) + \dots + a_nf(v_n) = f(\underline{w})$ . Se esistesse  $\underline{v}' \in V$  con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ . Si deduce dunque che  $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$ , contenente solo  $\underline{0}$  dacché  $\varphi$  è non degenere; e quindi si conclude che  $\underline{v} = \underline{v}'$ , ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ .  $\square$

**Proposizione.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\varphi$  non degenere. Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora esiste un unico endomorfismo  $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$ , detto il **trasposto di  $f$**  e indicato con  $f^\top$  in assenza di ambiguità<sup>3</sup>, tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

*Dimostrazione.* Si consideri  $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$ . Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico  $\underline{v}'$  tale che

<sup>3</sup>Si tenga infatti in conto della differenza tra  $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$ , di cui si discute nell'enunciato, e  $f^\top : V^* \rightarrow V^*$  che invece è tale che  $f^\top \circ p(g) = g \circ f$ .



$(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ . Si costruisce allora una mappa  $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$  che associa a  $\underline{v}$  tale  $\underline{v}'$ . Si dimostra che  $f_\varphi^\top$  è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

- (i) Siano  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ . Si deve dimostrare innanzitutto che  $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2)$ , ossia che  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) \forall \underline{w} \in V$ .

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) &= \varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v}_2, f(\underline{w})) = (*), \\ \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) &= \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1), \underline{w}) + \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = (*), \end{aligned}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo  $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$  l'unico vettore di  $V$  con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

- (ii) Sia  $\underline{v} \in V$ . Si deve dimostrare che  $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$ , ossia che  $\varphi(af_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \forall a \in \mathbb{K}, \underline{w} \in V$ . È sufficiente moltiplicare per  $a$  l'identità  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ . Analogamente a prima, si deduce che  $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$ , essendo  $f_\varphi^\top(a\underline{v})$  l'unico vettore di  $V$  con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Infine si dimostra che  $f_\varphi^\top$  è unico. Sia infatti  $g$  un endomorfismo di  $V$  che condivide la stessa proprietà di  $f_\varphi^\top$ . Allora  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , da cui si deduce che  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , ossia che  $f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$ . Tuttavia  $\varphi$  è non degenere, e quindi  $V^\perp = \{0\}$ , da cui si deduce che deve valere l'identità  $f_\varphi^\top(\underline{v}) = g(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ , ossia  $g = f_\varphi^\top$ .  $\square$

**Proposizione.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e sia  $\varphi$  un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa<sup>4</sup>  $f^* : V \rightarrow V$ , detta **aggiunto di  $f$** , tale che  $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\underline{v} \in V$ . Si consideri il funzionale  $\sigma$  tale che  $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ . Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico  $\underline{v}' \in V$  tale per cui  $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$ . Si

<sup>4</sup>Si osservi che  $f^*$  non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

costruisce allora una mappa  $f^*$  che associa  $\underline{v}$  a tale  $\underline{v}'$ .

Si dimostra infine che la mappa  $f^*$  è unica. Sia infatti  $\mu : V \rightarrow V$  che condivide la stessa proprietà di  $f^*$ . Allora  $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , da cui si deduce che  $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , ossia che  $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$ . Tuttavia  $\varphi$  è non degenere, e quindi  $V^\perp = \{0\}$ , da cui si deduce che deve valere l'identità  $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ , ossia  $\mu = f^*$ .  $\square$

**Osservazione.** L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere  $\varphi$  è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ :

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché  $\varphi$  è non degenere, che  $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ , ossia che  $f = (f^\top)^\top$ .

**Osservazione.** Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano  $\varphi$  non degenere. Valgono infatti le seguenti identità  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ :

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che  $f = (f^*)^*$ .

**Definizione.** (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale  $V$  su un suo prodotto  $\varphi$  una base ortogonale  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  tale che  $\varphi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ .

**Proposizione.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare non degenere di  $V$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}^*$  la base relativa a  $\mathcal{B}$  in  $V^*$ . Per la proposizione precedente vale la seguente identità:

$$a_\varphi \circ f_\varphi^\top = f^\top \circ a_\varphi.$$

Pertanto, passando alle matrici associate, si ricava che:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi)M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}^*}(f^\top)M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi).$$

Dal momento che valgono le seguenti due identità:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top,$$

e  $a_\varphi$  è invertibile (per cui anche  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  lo è), si conclude che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

da cui la tesi.  $\square$

**Corollario.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare di  $V$ . Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $\varphi$  è non degenere e  $M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Pertanto  $\varphi$  è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top.$$

$\square$

**Proposizione.** Sia  $\varphi$  un prodotto hermitiano non degenere di  $V$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ . Dal momento che  $\varphi$  è non degenere,  $\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi) = V^\perp = \{\underline{0}\}$ , e quindi  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è invertibile.

Dacché allora  $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , vale la seguente identità:

$$[f^*(\underline{v})]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [f(\underline{w})]_{\mathcal{B}},$$

ossia si deduce che:

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Sostituendo allora a  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  i vettori della base  $\mathcal{B}$ , si ottiene che:

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} &= [v_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [v_j]_{\mathcal{B}} = \\ &= [v_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [v_j]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f))_{ij}, \end{aligned}$$

e quindi che  $M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)$ . Moltiplicando a destra per l'inversa di  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  e prendendo l'aggiunta di ambo i membri (ricordando che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , essendo  $\varphi$  un prodotto hermitiano), si ricava l'identità desiderata.  $\square$

**Corollario.** Sia  $\varphi$  un prodotto hermitiano di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $\varphi$  è non degenere e  $M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Pertanto  $\varphi$  è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^*.$$

$\square$

**Nota.** D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per  $\varphi$  un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di  $V$ .

**Definizione.** (operatori simmetrici) Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Si dice allora che  $f$  è **simmetrico** (o *autoaggiunto*) se  $f = f^{\top}$ .

**Definizione.** (applicazioni e matrici ortogonali) Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Si dice allora che  $f$  è **ortogonale** se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ , ossia se è un'isometria in  $V$ . Sia  $A \in M(n, \mathbb{K})$ . Si dice dunque che  $A$  è **ortogonale** se  $A^{\top} A = A A^{\top} = I_n$ .

**Definizione.** Le matrici ortogonali di  $M(n, \mathbb{K})$  formano un sottogruppo moltiplicativo di  $GL(n, \mathbb{K})$ , detto **gruppo ortogonale**, e indicato con  $O_n$ . Il sottogruppo di  $O_n$  contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con  $SO_n$ .

**Osservazione.** Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

- ▶  $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^{\top}) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$ .
- ▶  $A = (a) \in O_1 \iff A^{\top} A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$ , da cui si ricava che l'unica matrice di  $SO_1$  è (1). Si osserva inoltre che  $O_1$  è abeliano

di ordine 2, e quindi che  $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2.$$

Pertanto deve essere soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Si ricava dunque che si può identificare  $A$  con le funzioni trigonometriche  $\cos(\theta)$  e  $\sin(\theta)$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$  nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = -1).$$

**Definizione.** (applicazioni e matrici hermitiane) Sia  $f \in \text{End}(V)$  e si consideri il prodotto hermitiano  $\varphi$ . Si dice allora che  $f$  è **hermitiano** se  $f = f^*$ . Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Si dice dunque che  $A$  è **hermitiana** se  $A = A^*$ .

**Definizione.** (applicazioni e matrici unitarie) Sia  $f \in \text{End}(V)$  e si consideri il prodotto hermitiano  $\varphi$ . Si dice allora che  $f$  è **unitario** se  $\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ . Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Si dice dunque che  $A$  è **unitaria** se  $A^*A = AA^* = I_n$ .

**Definizione.** Le matrici unitarie di  $M(n, \mathbb{C})$  formano un sottogruppo moltiplicativo di  $GL(n, \mathbb{C})$ , detto **gruppo unitario**, e indicato con  $U_n$ . Il sottogruppo di  $U_n$  contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con  $SU_n$ .

**Osservazione.**

Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi unitari.

$$\blacktriangleright A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\det(\overline{A}) = |\det(A)|^2 = 1.$$

$$\blacktriangleright A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi),$$

ossia il numero complesso  $a$  appartiene alla circonferenza di raggio unitario.

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2 \iff AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = I_2,$$

$\det(A) = 1$ , ossia se il seguente sistema di equazioni è soddisfatto:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \\ a\bar{c} + b\bar{d} = 0, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni riassumono il gruppo  $SU_2$  nel seguente modo:

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \mid |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}.$$

**Definizione.** (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{R}$  dotato del prodotto scalare standard  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definizione.** (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{C}$  dotato del prodotto hermitiano standard  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Proposizione.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è simmetrico  $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è simmetrica.

*Dimostrazione.* Per il corollario precedente,  $f$  è simmetrico  $\iff f = f^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ .  $\square$

**Proposizione.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è ortogonale  $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$  è ortogonale.

*Dimostrazione.* Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ . Se  $f$  è ortogonale, allora  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$ . Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che  $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$ . Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri,  $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$ .

Se invece  $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ , e quindi  $f$  è ortogonale.  $\square$

**Proposizione.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo complesso e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è hermitiano  $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^* \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$  è hermitiana.

*Dimostrazione.* Per il corollario precedente,  $f$  è hermitiana  $\iff f = f^* \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ .  $\square$

**Proposizione.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo complesso e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è unitario  $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$  è unitaria.

*Dimostrazione.* Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ . Se  $f$  è unitario, allora  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$ . Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che  $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$ . Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri,  $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$ .

Se invece  $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ , e quindi  $f$  è unitario.  $\square$

**Osservazione.** Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale di  $(V, \varphi)$ , ricordando che  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$  e che  $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ , sono equivalenti allora i seguenti fatti:

- ▶  $f \circ f^{\top} = f^{\top} \circ f = \text{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è ortogonale  $\iff f$  è ortogonale,
- ▶  $f \circ f^* = f^* \circ f = \text{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è unitaria  $\iff f$  è unitario (se  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ ).

**Proposizione.** Sia  $V = \mathbb{R}^n$  uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard  $\varphi$ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i)  $A \in O_n$ ,
- (ii)  $f_A$  è un operatore ortogonale,
- (iii) le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $V$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ , e quindi, per una proposizione precedente,  $f_A$  è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se  $f_A$  è un operatore ortogonale,  $A \in O_n$ . Dunque è sufficiente dimostrare che  $A \in O_n \iff$  le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

( $\implies$ ) Se  $A \in O_n$ , in particolare  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , e quindi  $A$  è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di  $V$ , essendo  $n$  vettori di  $V$  linearmente indipendenti. Inoltre, poiché  $A \in O_n$ ,  $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$ , e quindi le colonne di  $A$  si mantengono a due a

due ortogonali tra di loro, mentre  $\varphi(Ae_i, Ae_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$ . Pertanto le colonne di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

Si osserva che anche  $A^\top \in O_n$ . Allora le righe di  $A$ , che non sono altro che le colonne di  $A^\top$ , formano anch'esse una base ortonormale di  $V$ .

( $\Leftarrow$ ) Nel moltiplicare  $A^\top$  con  $A$  altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare  $\varphi$  tra ogni riga di  $A^\top$  e ogni colonna di  $A$ , ossia  $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$ . Quindi  $A^\top A = AA^\top = I_n$ , da cui si deduce che  $A \in O_n$ .  $\square$

**Proposizione.** Sia  $V = \mathbb{C}^n$  uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard  $\varphi$ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i)  $A \in U_n$ ,
- (ii)  $f_A$  è un operatore unitario,
- (iii) le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $V$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ , e quindi, per una proposizione precedente,  $f_A$  è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se  $f_A$  è un operatore unitario,  $A \in U_n$ . Dunque è sufficiente dimostrare che  $A \in U_n \iff$  le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

( $\implies$ ) Se  $A \in U_n$ , in particolare  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , e quindi  $A$  è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di  $V$ , essendo  $n$  vettori di  $V$  linearmente indipendenti. Inoltre, poiché  $A \in U_n$ ,  $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(Ae_i, Ae_j)$ , e quindi le colonne di  $A$  si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre  $\varphi(Ae_i, Ae_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$ . Pertanto le colonne di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

Si osserva che anche  $A^\top \in U_n$ . Allora le righe di  $A$ , che non sono altro che le colonne di  $A^\top$ , formano anch'esse una base ortonormale di  $V$ .

( $\Leftarrow$ ) Nel moltiplicare  $A^*$  con  $A$  altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano  $\varphi$  tra ogni riga coniugata di  $A^*$  e ogni colonna di  $A$ , ossia  $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$ . Quindi  $A^*A = AA^* = I_n$ , da cui si deduce che  $A \in U_n$ .  $\square$



**Proposizione.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti tre risultati:

- (i)  $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$  è uno spazio euclideo complesso.
- (ii) Se  $f \in \text{End}(V)$  è simmetrico, allora  $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$  è hermitiano.
- (iii) Se  $f \in \text{End}(V)$  è ortogonale, allora  $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$  è unitario.

*Dimostrazione.* Dacché  $\varphi$  è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale  $V$ , esiste una base ortonormale di  $V$ . Sia allora  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- È sufficiente dimostrare che  $\varphi_{\mathbb{C}}$  altro non è che il prodotto hermitiano standard. Come si è già osservato precedentemente,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , e quindi, dacché  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ , essendo  $\mathcal{B}$  ortonormale, vale anche che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = I_n$ , ossia  $\varphi_{\mathbb{C}}$  è proprio il prodotto hermitiano standard.
- Poiché  $f$  è simmetrico,  $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ , e quindi anche  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top}$ . Dal momento che  $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ ,  $M_{\mathcal{B}}(f) = \overline{M_{\mathcal{B}}(f)} \implies M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$ , ossia  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$  è hermitiana, e pertanto anche  $f_{\mathbb{C}}$  è hermitiano.
- Poiché  $f$  è ortogonale,  $M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$ , e quindi anche  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n$ . Allora, come prima, si deduce che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$ , essendo  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ , da cui si ricava che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n$ , ossia che  $f_{\mathbb{C}}$  è unitario. □

**Esercizio 1.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti risultati:

- Se  $f, g \in \text{End}(V)$  commutano, allora anche  $f_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$  commutano.
- Se  $f \in \text{End}(V)$ ,  $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$ .
- Se  $f \in \text{End}(V)$ ,  $f$  diagonalizzabile  $\iff f^{\top}$  diagonalizzabile.

*Soluzione.* Dacché  $\varphi$  è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale  $V$ , esiste una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $V$ . Si dimostrano allora separatamente i tre risultati.

- Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$ , e quindi che  $f_{\mathbb{C}} \circ g_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$ .
- Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R}) \implies M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ , e quindi che  $M_{\mathcal{B}}((f^{\top})_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})^*)$ . Allora  $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$ .
- Poiché  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ . Allora, se  $f$  è diagonalizzabile, anche  $M_{\mathcal{B}}(f)$  lo è, e quindi  $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}), D \in M(n, \mathbb{K})$  diagonale tale che  $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1}$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = (P^{\top})^{-1}D^{\top}P^{\top}$  è simile ad una matrice diagonale, e pertanto  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top})$  è diagonalizzabile. Allora anche  $f^{\top}$  è diagonalizzabile. Vale anche il viceversa considerando l'identità  $f = (f^{\top})^{\top}$  e l'implicazione appena dimostrata.

**Nota.** D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che  $V$  sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

**Definizione.** (norma euclidea) Sia  $(V, \varphi)$  un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che  $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$ .

**Definizione.** (distanza euclidea tra due vettori) Sia  $(V, \varphi)$  un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che  $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$ .

**Osservazione.**

- ▶ Si osserva che in effetti  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \forall \underline{v} \in V$ . Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso,  $\varphi$  è definito positivo.
- ▶ Vale che  $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$ . Infatti, se  $\underline{v} = \underline{0}$ , chiaramente  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$ ; se invece  $\|\underline{v}\| = 0$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ , e quindi  $\underline{v} = \underline{0}$ , dacché  $V^{\perp} = \{\underline{0}\}$ , essendo  $\varphi$  definito positivo.
- ▶ Inoltre, vale chiaramente che  $\|\alpha\underline{v}\| = |\alpha| \|\underline{v}\|$ .
- ▶ Se  $f$  è un operatore ortogonale (o unitario), allora  $f$  mantiene sia le norme che le distanze tra vettori. Infatti  $\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|^2$ , da cui segue che  $\|\underline{v} - \underline{w}\| = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|$ .

**Proposizione.** (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Vale che  $\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$ ,  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente dipendenti.

*Dimostrazione.* Si consideri innanzitutto il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , e quindi il caso in cui  $\varphi$  è il prodotto scalare standard. Siano  $\underline{v}, \underline{w} \in V$ . Si consideri la disuguaglianza  $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$ , valida per ogni elemento di  $V$ . Allora  $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$ . L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se  $\frac{\Delta}{4} \leq 0$ , e quindi se e solo se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ . Vale in particolare l'equivalenza se e solo se  $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$ , ossia se  $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$ , da cui la tesi.

Si consideri ora il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , e dunque il caso in cui  $\varphi$  è il prodotto hermitiano standard. Siano  $\underline{v}, \underline{w} \in V$ , e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si consideri allora la disuguaglianza  $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 \geq 0$ , valida per ogni elemento di  $V$ . Allora  $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 = \|\alpha\underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha\underline{v}, \beta\underline{w}) + \varphi(\beta\underline{w}, \alpha\underline{v}) + \|\beta\underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \bar{\alpha}\beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \alpha\bar{\beta} \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$ . Ponendo allora  $\alpha = \|\underline{w}\|^2$  e  $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = -\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ , si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se  $\underline{w} = \underline{0}$ , la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per  $\|\underline{w}\|^2$  (dal momento che  $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$ ) per ottenere la tesi. Come prima, si osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente dipendenti.  $\square$

**Proposizione.** (disuguaglianza triangolare)  $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ .

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$ . Se  $\varphi$  è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza desiderata.

Se invece  $\varphi$  è il prodotto hermitiano standard,  $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$ . Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata.  $\square$

**Osservazione.** Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

- ▶ Se  $\underline{v} \perp \underline{w}$ , allora  $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$  (teorema di Pitagora),
- ▶ Se  $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$  e  $\varphi$  è un prodotto scalare, allora  $\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$ , e quindi  $\underline{v} + \underline{w} \perp \underline{v} - \underline{w}$  (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

**Osservazione.** Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è una base ortogonale di  $V$  per  $\varphi$ .

- ▶ Se  $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$ , con  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , si osserva che  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = a_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$ . Quindi  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i$ . In particolare,  $\frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$  è detto **coefficiente di Fourier** di  $\underline{v}$  rispetto a  $\underline{v}_i$ , e si indica con  $C(\underline{v}, \underline{v}_i)$ . Se  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$ .
- ▶ Quindi  $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$ . In particolare, se  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$ . In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel:  $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$  per  $k \leq n$ .

**Osservazione.** (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se  $\varphi$  è non degenere (o in generale, se  $\text{CI}(\varphi) = \{0\}$ ) ed è data una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  per  $V$  (dove si ricorda che deve valere  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da  $\mathcal{B}$  una nuova base  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n\}$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathcal{B}'$  è una base ortogonale,
- (ii)  $\mathcal{B}'$  mantiene la stessa bandiera di  $\mathcal{B}$  (ossia  $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_i)$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ ).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione  $\underline{v}_1$  e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore  $C(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \underline{v}_1 = \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1$ , rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con  $\underline{v}_1$ . Pertanto si applica la mappa  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_i^{(1)}$ . Si verifica infatti che  $\underline{v}_1$  e  $\underline{v}_i^{(1)}$  sono ortogonali per  $2 \leq i \leq n$ :

$$\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i^{(1)}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi\left(\underline{v}_1, \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1\right) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) = 0.$$

Poiché  $\underline{v}_1$  non è isotropo, si deduce la decomposizione  $V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ . In particolare  $\dim \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n - 1$ : essendo allora i vettori  $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$  linearmente indipendenti e appartenenti a  $\text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ , ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)})$ , fino a che non si ottiene  $V' = \{\underline{0}\}$ .

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da  $\mathcal{B}'$  normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

**Osservazione.** Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

**Esempio.** Si consideri  $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , ossia  $\mathbb{R}^3$  dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1 = \underline{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_2 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_2,$
- $\underline{v}_3^{(1)} = \underline{v}_3 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_3)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Si considera ora  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})$ . Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

$$\bullet \underline{v}_3^{(2)} = \underline{v}_3^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})}{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_2^{(1)})} \underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_3^{(1)} - \underline{v}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3.$$

Quindi la base ottenuta è  $\mathcal{B}' = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ , ossia la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , già ortonormale.

**Osservazione.** Si osserva adesso che se  $(V, \varphi)$  è uno spazio euclideo (e quindi  $\varphi > 0$ ), e  $W$  è un sottospazio di  $V$ , vale la seguente decomposizione:

$$V = W \oplus^\perp W^\perp.$$

Pertanto ogni vettore  $\underline{v} \in V$  può scriversi come  $\underline{w} + \underline{w}'$  dove  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{w}' \in W^\perp$ , dove  $\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$ .

**Definizione.** (proiezione ortogonale) Si definisce l'applicazione  $\text{pr}_W : V \rightarrow V$ , detta **proiezione ortogonale** su  $W$ , in modo tale che  $\text{pr}_W(\underline{v}) = \underline{w}$ , dove  $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ , con  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{w}' \in W^\perp$ .

**Osservazione.**

► Dacché la proiezione ortogonale è un caso particolare della classica applicazione lineare di proiezione su un sottospazio di una somma diretta,  $\text{pr}_W$  è un'applicazione lineare.

► Vale chiaramente che  $\text{pr}_W^2 = \text{pr}_W$ , da cui si ricava, se  $W^\perp \neq \{0\}$ , che  $\varphi_{\text{pr}_W}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ , ossia che  $\text{sp}(\text{pr}_W) = \{0, 1\}$ . Infatti  $\text{pr}_W(\underline{v})$  appartiene già a  $W$ , ed essendo la scrittura in somma di due elementi, uno di  $W$  e uno di  $W'$ , unica,  $\text{pr}_W(\text{pr}_W(\underline{v})) = \text{pr}_W(\underline{v})$ , da cui l'identità  $\text{pr}_W^2 = \text{pr}_W$ .

► Seguendo il ragionamento di prima, vale anche che  $\text{pr}_W|_W = \text{Id}_W$  e che  $\text{pr}_W|_{W^\perp} = 0$ .

► Inoltre, vale la seguente riscrittura di  $\underline{v} \in V$ :  $\underline{v} = \text{pr}_W(\underline{v}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{v})$ .

► Se  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è una base ortogonale di  $W$ , allora  $\text{pr}_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$ . Infatti  $\underline{v} - \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i \in W^\perp$ .

►  $\text{pr}_W$  è un operatore simmetrico (o hermitiano se lo spazio è complesso). Infatti  $\varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{w})) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \text{pr}_W(\underline{w}))$ .

**Proposizione.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo. Allora valgono i seguenti risultati:

- (i) Siano  $U, W \subseteq V$  sono sottospazi di  $V$ , allora  $U \perp W$ , ossia<sup>5</sup>  $U \subseteq W^\perp$ ,  
 $\iff \text{pr}_U \circ \text{pr}_W = \text{pr}_W \circ \text{pr}_U = 0$ .
- (ii) Sia  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ . Allora  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v}) \iff W_i \perp W_j$   
 $\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due risultati separatamente.

- (i) Sia  $\underline{v} \in V$ . Allora  $\text{pr}_W(\underline{v}) \in W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$ . Pertanto  
 $\text{pr}_U(\text{pr}_W(\underline{v})) = \underline{0}$ . Analogamente  $\text{pr}_W(\text{pr}_U(\underline{v})) = \underline{0}$ , da cui la tesi.
- (ii) Sia vero che  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ . Sia  $\underline{w} \in W_j$ . Allora  
 $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{w} + \sum_{i \neq j} \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) \implies \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{0} \forall i \neq j$ .  
 Quindi  $\underline{w} \in W_i^\perp \forall i \neq j$ , e si conclude che  $W_i \subseteq W_j^\perp \implies W_i \perp W_j$ .  
 Se invece  $W_i \perp W_j \forall i \neq j$ , sia  $\mathcal{B}_i = \{\underline{w}_i^{(1)}, \dots, \underline{w}_i^{(k_i)}\}$  una base  
 ortogonale di  $W_i$ . Allora  $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$  è anch'essa una base ortogonale  
 di  $V$ , essendo  $\varphi(\underline{w}_i^{(t_i)}, \underline{w}_j^{(t_j)}) = 0$  per ipotesi. Pertanto  
 $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} C(\underline{v}, \underline{w}_i^{(j)}) \underline{w}_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v})$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione.** (inversione ortogonale) Si definisce l'applicazione  $\rho_W : V \rightarrow V$ , detta **inversione ortogonale**, in modo tale che, detto  $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}' \in V$  con  $\underline{w} \in W, \underline{w}' \in W^\perp$ ,  $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w} - \underline{w}'$ . Se  $\dim W = \dim V - 1$ , si dice che  $\rho_W$  è una **riflessione**.

**Osservazione.**

- Si osserva che  $\rho_W$  è un'applicazione lineare.
- Vale l'identità  $\rho_W^2 = \text{Id}_V$ , da cui si ricava che  $\varphi_{\rho_W}(\lambda) \mid (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ . In particolare, se  $W^\perp \neq \{0\}$ , vale proprio che  $\text{sp}(\rho_W) = \{\pm 1\}$ , dove  $V_1 = W$  e  $V_{-1} = W^\perp$ .
- $\rho_W$  è ortogonale (o unitaria, se  $V$  è uno spazio euclideo complesso). Infatti se  $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{w}_1'$  e  $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{w}_2'$ , con  $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$  e  $\underline{w}_1', \underline{w}_2' \in W^\perp$ ,  $\varphi(\rho_W(\underline{v}_1), \rho_W(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{w}_1 - \underline{w}_1', \underline{w}_2 - \underline{w}_2') = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) - \underbrace{\varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2')}_{=0} + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2') = \varphi(\underline{w}_1 - \underline{w}_1', \underline{w}_2 - \underline{w}_2')$ .

Quindi  $\varphi(\rho_W(\underline{v}_1), \rho_W(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2') + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2') = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ .

<sup>5</sup>È sufficiente che valga  $U \subseteq W^\perp$  affinché valga anche  $W \subseteq U^\perp$ . Infatti  $U \subseteq W^\perp \implies W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$ . Si osserva che in generale vale che  $W \subseteq W^{\perp\perp}$ , dove vale l'uguaglianza nel caso di un prodotto  $\varphi$  non degenerare, com'è nel caso di uno spazio euclideo, essendo  $\varphi > 0$  per ipotesi.

**Lemma 1.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Siano  $\underline{u}, \underline{w} \in V$ . Se  $\|\underline{u}\| = \|\underline{w}\|$ , allora esiste un sottospazio  $W$  di dimensione  $n - 1$  per cui la riflessione  $\rho_W$  relativa a  $\varphi$  è tale che  $\rho_W(\underline{u}) = \underline{w}$ .

*Dimostrazione.* Se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente dipendenti, dal momento che  $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ , deve valere anche che  $\underline{v} = \underline{w}$ . Sia  $\underline{u} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{u} \in \text{Span}(\underline{v})^\perp$ . Si consideri  $U = \text{Span}(\underline{u})$ : si osserva che  $\dim U = 1$  e che, essendo  $\varphi$  non degenere,  $\dim U^\perp = n - 1$ . Posto allora  $W = U^\perp$ , si ricava, sempre perché  $\varphi$  è non degenere, che  $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$ . Si conclude pertanto che  $\rho_W(\underline{v}) = \underline{v} = \underline{w}$ .

Siano adesso  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  linearmente indipendenti e sia  $U = \text{Span}(\underline{v} - \underline{w})$ . Dal momento che  $\dim U = 1$  e  $\varphi$  è non degenere,  $\dim U^\perp = n - 1$ . Sia allora  $W = U^\perp$ . Allora, come prima,  $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$ . Si consideri dunque la riflessione  $\rho_W$ : dacché  $\underline{v} = \frac{\underline{v} + \underline{w}}{2} + \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2}$ , e  $\varphi(\frac{\underline{v} + \underline{w}}{2}, \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2}) = \frac{\|\underline{v}\| - \|\underline{w}\|}{4} = 0$ ,  $\underline{v}$  è già decomposto in un elemento di  $W$  e in uno di  $W^\perp$ , per cui si conclude che  $\rho_W(\underline{v}) = \frac{\underline{v} + \underline{w}}{2} - \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2} = \underline{w}$ , ottenendo la tesi. □

**Teorema** (di Cartan–Dieudonné). Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Ogni isometria di  $V$  è allora prodotto di al più  $n$  riflessioni.

*Dimostrazione.* Si dimostra la tesi applicando il principio di induzione sulla dimensione  $n$  di  $V$ .

(*passo base*) Sia  $n = 1$  e sia inoltre  $f$  un'isometria di  $V$ . Sia  $\underline{v}_1$  l'unico elemento di una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $V$ . Allora  $\|f(\underline{v}_1)\| = \|\underline{v}_1\| = 1$ , da cui si ricava che<sup>6</sup>  $f(\underline{v}_1) = \pm \underline{v}_1$ , ossia che  $f = \pm \text{Id}_V$ . Se  $f = \text{Id}_V$ ,  $f$  è un prodotto vuoto, e già verifica la tesi; altrimenti  $f = \rho_{\{0\}}$ , dove si considera  $V = V \oplus^\perp \{0\}$ . Pertanto  $f$  è prodotto di al più una riflessione.

(*passo induttivo*) Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Sia  $f$  un'isometria di  $V$ . Si assuma inizialmente l'esistenza di  $\underline{v}_i$  tale per cui  $f(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$ . Allora, detto  $W = \text{Span}(\underline{v}_i)$ , si può decomporre  $V$  come  $W \oplus^\perp W^\perp$ . Si osserva che  $W^\perp$  è  $f$ -invariante: infatti, se  $\underline{u} \in W^\perp$ ,  $\varphi(\underline{v}_i, f(\underline{u})) = \varphi(f(\underline{v}_i), f(\underline{u})) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{u}) = 0 \implies f(\underline{u}) \in W^\perp$ . Pertanto si può considerare l'isometria  $f|_{W^\perp}$ . Dacché  $\dim W^\perp = n - 1$ , per il passo induttivo esistono  $W_1, \dots, W_k$  sottospazi di  $W^\perp$  con  $k \leq n - 1$  per cui  $\rho_{W_1}, \dots, \rho_{W_k} \in \text{End}(W^\perp)$  sono tali che  $f|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \dots \circ \rho_{W_k}$ .

---

<sup>6</sup>Infatti, detto  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $f(\underline{v}_1) = \lambda \underline{v}_1$ ,  $\|\underline{v}_1\| = \|f(\underline{v}_1)\| = \lambda^2 \|\underline{v}_1\| \implies \lambda = \pm 1$ , ossia  $f = \pm \text{Id}$ , come volevasi dimostrare.



Si considerino allora le riflessioni  $\rho_{W_1 \oplus^\perp W}, \dots, \rho_{W_k \oplus^\perp W}$ . Si mostra che  $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_W = \text{Id}_W = f|_W$ . Affinché si faccia ciò è sufficiente mostrare che  $(\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W})(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$ . Si osserva che  $\underline{v}_i \in W_i \oplus^\perp W \forall 1 \leq i \leq k$ , e quindi che  $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$ . Reiterando l'applicazione di questa identità nel prodotto, si ottiene infine il risultato desiderato. Infine, si dimostra che  $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \dots \circ \rho_{W_k} = f|_{W^\perp}$ . Analogamente a prima, è sufficiente mostrare che  $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u}) \forall \underline{u} \in W^\perp$ . Sia  $\underline{u} = \rho_{W_k}(\underline{u}) + \underline{u}'$  con  $\underline{u}' \in W_k^\perp \cap W^\perp \subseteq (W_k \oplus^\perp W)^\perp$ , ricordando che  $W^\perp = W_k \oplus^\perp (W^\perp \cap W_k^\perp)$ . Allora, poiché  $\rho_{W_k}(\underline{u}) \in W_k \subseteq (W_k \oplus^\perp W)$ , si conclude che  $\rho_{W_k \oplus^\perp W}(\underline{u}) = \rho_{W_k}(\underline{u})$ . Pertanto, dacché vale che  $V = W \oplus^\perp W^\perp$  e che  $\rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W}$  e  $f$ , ristretti su  $W$  o su  $W^\perp$ , sono le stesse identiche mappe, allora in particolare vale l'uguaglianza più generale:

$$f = \rho_{W_1 \oplus^\perp W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus^\perp W},$$

e quindi  $f$  è prodotto di  $k \leq n - 1$  riflessioni.

Se invece non esiste alcun  $\underline{v}_i$  tale per cui  $f(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$ , per il *Lemma 1* esiste una riflessione  $\tau$  tale per cui  $\tau(f(\underline{v}_i)) = \underline{v}_i$ . In particolare  $\tau \circ f$  è anch'essa un'isometria, essendo composizione di due isometrie. Allora, da prima, esistono  $U_1, \dots, U_k$  sottospazi di  $V$  con  $k \leq n - 1$  tali per cui  $\tau \circ f = \rho_{U_1} \circ \dots \circ \rho_{U_k}$ , da cui  $f = \tau \circ \rho_{U_1} \circ \dots \circ \rho_{U_k}$ , ossia  $f$  è prodotto di al più  $n$  riflessioni, concludendo il passo induttivo.  $\square$

**Lemma 1.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Allora  $f$  ha solo autovalori reali<sup>7</sup>.

*Dimostrazione.* Si assuma che  $V$  è uno spazio euclideo complesso, e quindi che  $\varphi$  è un prodotto hermitiano. Allora, se  $f$  è hermitiano, sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  un suo autovalore<sup>8</sup> e sia  $\underline{v} \in V_\lambda$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))} \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) \in \mathbb{R}$ . Inoltre vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{v}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{v}),$$

da cui, ricordando che  $\varphi$  è non degenera e che  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ , si ricava che:

<sup>7</sup>Nel caso di  $f$  simmetrico, si intende in particolare che tutte le radici del suo polinomio caratteristico sono reali.

<sup>8</sup>Tale autovalore esiste sicuramente dal momento che  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  è un campo algebricamente chiuso.

$$\lambda = \frac{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))}{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \in \mathbb{R}.$$

Sia ora invece  $V$  è uno spazio euclideo reale e  $\varphi$  è un prodotto scalare. Allora,  $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$  è uno spazio euclideo complesso, e  $f_{\mathbb{C}}$  è hermitiano. Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Allora, come visto all'inizio di questa dimostrazione,  $f_{\mathbb{C}}$  ha solo autovalori reali, da cui si ricava che il polinomio caratteristico di  $f_{\mathbb{C}}$  è completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ . Si osserva inoltre che  $p_f(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = \det(M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) - \lambda I_n) = p_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda)$ . Si conclude dunque che anche  $p_f$  è completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Osservazione.** Dal lemma precedente consegue immediatamente che se  $A \in M(n, \mathbb{R})$  è simmetrica (o se appartiene a  $M(n, \mathbb{C})$  ed è hermitiana), considerando l'operatore simmetrico  $f_A$  indotto da  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ),  $f_A$  ha tutti autovalori reali, e dunque così anche  $A$ .

**Lemma 2.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Allora se  $\lambda, \mu$  sono due autovalori distinti di  $f$ ,  $V_{\lambda} \perp V_{\mu}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\underline{v} \in V_{\lambda}$  e  $\underline{w} \in V_{\mu}$ . Allora<sup>9</sup>  $\lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ . Pertanto vale la seguente identità:

$$(\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0.$$

In particolare, valendo  $\lambda - \mu \neq 0$  per ipotesi,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies V_{\lambda} \perp V_{\mu}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Lemma 3.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Se  $W \subseteq V$  è  $f$ -invariante, allora anche  $W^{\perp}$  lo è.

*Dimostrazione.* Siano  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{v} \in W^{\perp}$ . Allora  $\varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = \varphi(\underbrace{f(\underline{w})}_{\in W}, \underline{v}) =$

0, da cui si ricava che  $f(\underline{v}) \in W^{\perp}$ , ossia la tesi.  $\square$

**Teorema (spettrale reale).** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale (o complesso) e sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  di  $V$  composta di autovettori per  $f$ .

<sup>9</sup>Si osserva che non è stato coniugato  $\lambda$  nei passaggi algebrici, valendo  $\lambda \in \mathbb{R}$  dallo scorso lemma.

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tutti gli autovalori reali di  $f$ . Sia inoltre  $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ . Per i lemmi precedenti, vale che:

$$W = V_{\lambda_1} \oplus^\perp \dots \oplus^\perp V_{\lambda_k}.$$

Sicuramente  $W \subset V$ . Si assuma però che  $W \subsetneq V$ . Allora  $V = W \oplus^\perp W^\perp$ . In particolare, per il lemma precedente,  $W^\perp$  è  $f$ -invariante. Quindi  $f|_{W^\perp}$  è un endomorfismo di uno spazio di dimensione non nulla. Si osserva che  $f|_{W^\perp}$  è chiaramente simmetrico (o hermitiano), essendo solo una restrizione di  $f$ . Allora  $f|_{W^\perp}$  ammette autovalori reali per i lemmi precedenti; tuttavia questo è un assurdo, dal momento che ogni autovalore di  $f|_{W^\perp}$  è anche autovalore di  $f$  e si era supposto che<sup>10</sup>  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  fossero tutti gli autovalori di  $f$ ,  $\neq$ . Quindi  $W = V$ . Pertanto, detta  $\mathcal{B}_i$  una base ortonormale di  $V_{\lambda_i}$ ,  $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$  è una base ortonormale di  $V$ , da cui la tesi.  $\square$

**Corollario** (teorema spettrale per le matrici). Sia  $A \in M(n, \mathbb{R})$  simmetrica (o appartenente a  $M(n, \mathbb{C})$  ed hermitiana). Allora  $\exists P \in O_n$  (o  $P \in U_n$ ) tale che  $P^{-1}AP = P^\top AP$  (o  $P^{-1}AP = P^*AP$  nel caso hermitiano) sia una matrice diagonale reale.

*Dimostrazione.* Si consideri  $f_A$ , l'operatore indotto dalla matrice  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ). Allora  $f_A$  è un operatore simmetrico (o hermitiano) sul prodotto scalare (o hermitiano) standard. Pertanto, per il teorema spettrale reale, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  composta di autovettori di  $f_A$ . In particolare, detta  $\mathcal{B}'$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ), vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id})^{-1} M_{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}),$$

dove  $M_{\mathcal{B}'}(f) = A$ ,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale, essendo  $\mathcal{B}$  composta di autovettori, e  $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  si configura nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = (\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n).$$

Dacché  $\mathcal{B}$  è ortogonale,  $P$  è anch'essa ortogonale, da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► Un importante risultato che consegue direttamente dal teorema spettrale per le matrici riguarda la segnatura di un prodotto scalare (o hermitiano). Infatti, detta  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ,  $D = P^\top AP$ , e dunque  $D \cong A$ . Allora, essendo

<sup>10</sup>Infatti tale autovalore  $\lambda$  non può già comparire tra questi autovalori, altrimenti, detto  $i \in \mathbb{N}$  tale che  $\lambda = \lambda_i$ ,  $V_{\lambda_i} \cap W^\perp \neq \{0\}$ , violando la somma diretta supposta.

$D$  diagonale, l'indice di positività è esattamente il numero di valori positivi sulla diagonale, ossia il numero di autovalori positivi di  $A$ . Analogamente l'indice di negatività è il numero di autovalori negativi, e quello di nullità è la molteplicità algebrica di 0 come autovalore (ossia esattamente la dimensione di  $V_\varphi^\perp = \text{Ker } a_\varphi$ ).

**Teorema** (di triangolazione con base ortonormale). Sia  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $(V, \varphi)$  è uno spazio euclideo su  $\mathbb{K}$ . Allora, se  $p_f$  è completamente riducibile in  $\mathbb{K}$ , esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  tale per cui  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è triangolare superiore (ossia esiste una base ortonormale a bandiera per  $f$ ).

*Dimostrazione.* Per il teorema di triangolazione, esiste una base  $\mathcal{B}$  a bandiera per  $f$ . Allora, applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, si può ottenere da  $\mathcal{B}$  una nuova base  $\mathcal{B}'$  ortonormale e che mantenga le stesse bandiere. Allora, se  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è ordinata, dacché  $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$  è  $f$ -invariante,  $f(\underline{v}_i) \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$ , e quindi  $M_{\mathcal{B}'}(f)$  è triangolare superiore, da cui la tesi.  $\square$

**Corollario.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{R})$  (o  $M(n, \mathbb{C})$ ) tale per cui  $p_A$  è completamente riducibile. Allora  $\exists P \in O_n$  (o  $U_n$ ) tale per cui  $P^{-1}AP = P^\top AP$  (o  $P^{-1}AP = P^*AP$ ) è triangolare superiore.

*Dimostrazione.* Si consideri l'operatore  $f_A$  indotto da  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ). Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (o di  $\mathbb{C}^n$ ). Allora, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  (o di  $\mathbb{C}^n$ ) tale per cui  $T = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$  è triangolare superiore. Si osserva inoltre che  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$  e che  $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = (\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n)$  è ortogonale (o unitaria), dacché le sue colonne formano una base ortonormale. Allora, dalla formula del cambiamento di base per la applicazioni lineari, si ricava che:

$$A = PTP^{-1} \implies T = P^{-1}TP,$$

da cui, osservando che  $P^{-1} = P^\top$  (o  $P^{-1} = P^*$ ), si ricava la tesi.  $\square$

**Definizione** (operatore normale). Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Allora  $f \in \text{End}(V)$  si dice **normale** se commuta con il suo trasposto (i.e. se  $ff^\top = f^\top f$ ). Analogamente, se  $(V, \varphi)$  è uno spazio euclideo complesso, allora  $f$  si dice normale se commuta con il suo aggiunto (i.e. se  $ff^* = f^*f$ ).

**Definizione** (matrice normale). Una matrice  $A \in M(n, \mathbb{R})$  (o  $M(n, \mathbb{C})$ ) si dice **normale** se  $AA^\top = A^\top A$  (o  $AA^* = A^*A$ ).

**Osservazione.**

- ▶ Se  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $A$  è simmetrica ( $A = A^\top$ ), antisimmetrica ( $A = -A^\top$ ) o ortogonale ( $AA^\top = A^\top A = I_n$ ), sicuramente  $A$  è normale.
- ▶ Se  $A \in M(n, \mathbb{C})$  e  $A$  è hermitiana ( $A = A^*$ ), antihermitiana ( $A = -A^*$ ) o unitaria ( $AA^* = A^*A = I_n$ ), sicuramente  $A$  è normale.
- ▶  $f$  è normale  $\iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è normale, con  $\mathcal{B}$  ortonormale di  $V$ .
- ▶  $A$  è normale  $\iff f_A$  è normale, considerando che la base canonica di  $\mathbb{C}^n$  è già ortonormale rispetto al prodotto hermitiano standard.
- ▶ Se  $V$  è euclideo reale,  $f$  è normale  $\iff f_{\mathbb{C}}$  è normale. Infatti, se  $f$  è normale,  $f$  e  $f^\top$  commutano. Allora anche  $f_{\mathbb{C}}$  e  $(f^\top)_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$  commutano, e quindi  $f_{\mathbb{C}}$  è normale. Ripercorrendo i passaggi al contrario, si osserva infine che vale anche il viceversa.

**Lemma 1.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$  triangolare superiore e normale (i.e.  $AA^* = A^*A$ ). Allora  $A$  è diagonale.

*Dimostrazione.* Se  $A$  è normale, allora  $(A^*)_i A^i = \bar{A}^i A^i$  deve essere uguale a  $A_i (A^*)^i = A_i \bar{A}_i \forall 1 \leq i \leq n$ . Si dimostra per induzione su  $i$  da 1 a  $n$  che tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe  $A_1, \dots, A_i$  sono nulli.

(*passo base*) Si osserva che valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\bar{A}^1 A^1 &= |a_{11}|^2, \\ A_1 \bar{A}_1 &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2.\end{aligned}$$

Dovendo vale l'uguaglianza, si ricava che  $|a_{12}|^2 \dots + |a_{1n}|^2 = 0$ , e quindi che  $|a_{1i}|^2 = 0 \implies a_{1i} = 0 \quad \forall 2 \leq i \leq n$ , dimostrando il passo base<sup>11</sup>.

(*passo induttivo*) Analogamente a prima, si considerano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\bar{A}^i A^i &= |a_{1i}|^2 + \dots + |a_{ii}|^2 = |a_{ii}|^2, \\ A_i \bar{A}_i &= |a_{ii}|^2 + |a_{i(i+1)}|^2 + \dots + |a_{in}|^2,\end{aligned}$$

dove si è usato che, per il passo induttivo, tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe  $A_1, \dots, A_{i-1}$  sono nulli. Allora, analogamente a prima, si ricava che  $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \leq n$ , dimostrando il passo induttivo, e quindi la tesi.  $\square$

<sup>11</sup>Gli altri elementi sono infatti già nulli per ipotesi, essendo  $A$  triangolare superiore

**Osservazione.**

► Chiaramente vale anche il viceversa del precedente lemma: se infatti  $A \in M(n, \mathbb{C})$  è diagonale,  $A$  è anche normale, dal momento che commuta con  $A^*$ .

► Reiterando la stessa dimostrazione del precedente lemma per  $A \in M(n, \mathbb{R})$  triangolare superiore e normale reale (i.e.  $AA^\top = A^\top A$ ) si può ottenere una tesi analoga.

**Teorema.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo complesso. Allora  $f$  è un operatore normale  $\iff$  esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di autovettori per  $f$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Poiché  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso,  $p_f$  è sicuramente riducibile. Pertanto, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  a bandiera per  $f$ . In particolare,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è sia normale che triangolare superiore. Allora, per il *Lemma 1*,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale, e dunque  $\mathcal{B}$  è anche una base di autovettori per  $f$ .

( $\impliedby$ ) Se esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di autovettori per  $f$ ,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale, e dunque anche normale. Allora, poiché  $\mathcal{B}$  è ortonormale, anche  $f$  è normale.  $\square$

**Corollario.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Allora  $A$  è normale  $\iff \exists U \in U_n$  tale che  $U^{-1}AU = U^*AU$  è diagonale.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $\mathbb{C}^n$ . Si consideri l'applicazione lineare  $f_A$  indotta da  $A$  su  $\mathbb{C}^n$ . Se  $A$  è normale, allora anche  $f_A$  lo è. Pertanto, per il precedente teorema, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di autovettori per  $f_A$ . In particolare,  $U = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}) = (\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n)$  è unitaria ( $U \in U_n$ ), dacché le colonne di  $U$  sono ortonormali. Si osserva inoltre che  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$  e che  $D = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$  è diagonale. Allora, per la formula del cambiamento di base per le applicazioni lineari, si conclude che:

$$A = UDU^{-1} \implies D = U^{-1}AU = U^*AU,$$

ossia che  $U^*AU$  è diagonale.

( $\impliedby$ ) Sia  $D = U^*AU$ . Dacché  $D$  è diagonale,  $D$  è anche normale. Pertanto  $DD^* = D^*D$ . Sostituendo, si ottiene che  $U^*AUU^*A^*U = U^*A^*UU^*AU$ .

Ricordando che  $U^*U = I_n$  e che  $U \in U_n$  è sempre invertibile, si conclude che  $AA^* = A^*A$ , ossia che  $A$  è normale a sua volta, da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► Si può osservare mediante l'applicazione dell'ultimo corollario che, se  $A$  è hermitiana (ed è dunque anche normale),  $\exists U \in U_n \mid U^*AU = D$ , dove  $D \in M(n, \mathbb{R})$ , ossia tale corollario implica il teorema spettrale in forma complessa. Infatti  $\overline{D} = D^* = U^*A^*U = U^*AU = D \implies D \in M(n, \mathbb{R})$ .

► Se  $A \in M(n, \mathbb{R})$  è una matrice normale reale (i.e.  $AA^\top = A^\top A$ ) con  $p_A$  completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ , allora è possibile reiterare la dimostrazione del precedente teorema per concludere che  $\exists O \in O_n \mid O^\top AO = D$  con  $D \in M(n, \mathbb{R})$ , ossia che  $A = ODO^\top$ . Tuttavia questo implica che  $A^\top = (ODO^\top) = OD^\top O^\top = ODO^\top = A$ , ossia che  $A$  è simmetrica. In particolare, per il teorema spettrale reale, vale anche il viceversa. Pertanto, se  $A \in M(n, \mathbb{R})$ ,  $A$  è una matrice normale reale con  $p_A$  completamente riducibile in  $\mathbb{R} \iff A = A^\top$ .

**Esercizio 2.** Sia  $V$  uno spazio dotato del prodotto  $\varphi$ . Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Sia  $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$  una base di  $W$  e sia  $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si dimostrino allora i seguenti risultati.

- (i)  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$ ,
- (ii)  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid A_{1, \dots, k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\} = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } A_{1, \dots, k})$ ,
- (iii)  $\dim W^\perp = \dim V - \text{rg}(A_{1, \dots, k})$ ,
- (iv) Se  $\varphi$  è non degenere,  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ .

*Soluzione.* Chiaramente vale l'inclusione  $W^\perp \subseteq \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$ . Sia allora  $\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \forall 1 \leq i \leq k$  e sia  $\underline{w} \in W$ . Allora esistono  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tali che  $\underline{w} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k$ . Pertanto si conclude che  $\varphi(\underline{v}, \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k) = \alpha_1 \varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + \dots + \alpha_k \varphi(\underline{v}, \underline{w}_k) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$ . Pertanto  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$ , dimostrando (i).

Si osserva che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \iff \varphi(\underline{w}_i, \underline{v}) = 0$ . Se  $\varphi$  è scalare, allora  $\varphi(\underline{w}_i, \underline{v}) = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = (\underline{e}_i)^\top A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$ . Pertanto  $\underline{v} \in W^\perp \iff A_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0 \forall 1 \leq i \leq k$ , ossia se  $A_{1, \dots, k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$  e  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } A_{1, \dots, k}$ , dimostrando (ii). Analogamente si ottiene la tesi se  $\varphi$  è hermitiano. Applicando la formula delle dimensioni, si ricava dunque che

$\dim W^\top = \dim \text{Ker } A_{1,\dots,k} = \dim V - \text{rg } A_{1,\dots,k}$ , dimostrando (iii).

Se  $\varphi$  è non degenere,  $A$  è invertibile, dacché  $\dim V^\perp = \dim \text{Ker } A = 0$ . Allora ogni minore di taglia  $k$  di  $A$  ha determinante diverso da zero. Dacché ogni minore di taglia  $k$  di  $A_{1,\dots,k}$  è anche un minore di taglia  $k$  di  $A$ , si ricava che anche ogni minore di taglia  $k$  di  $A_{1,\dots,k}$  ha determinante diverso da zero, e quindi che  $\text{rg}(A_{1,\dots,k}) \geq k$ . Dacché deve anche valere  $\text{rg}(A_{1,\dots,k}) \leq \min\{k, n\} = k$ , si conclude che  $\text{rg}(A_{1,\dots,k})$  vale esattamente  $k = \dim W$ . Allora, dal punto (iii), vale che  $\dim W^\perp + \dim W = \dim W^\perp + \text{rg}(A_{1,\dots,k}) = \dim V$ , dimostrando il punto (iv).  $\square$

**Esercizio 3.** Sia  $V$  uno spazio dotato del prodotto  $\varphi$ . Sia  $U \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Si dimostrino allora i seguenti due risultati.

- (i) Il prodotto  $\varphi$  induce un prodotto  $\tilde{\varphi} : V/U \times V/U \rightarrow \mathbb{K}$  tale che  $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}')$  se e soltanto se  $U \subseteq V^\perp$ , ossia se e solo se  $U \perp V$ .
- (ii) Se  $U = V^\perp$ , allora il prodotto  $\tilde{\varphi}$  è non degenere.
- (iii) Sia  $\pi : V \rightarrow V/V^\perp$  l'applicazione lineare di proiezione al quoziente. Allora  $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0 \ \forall \underline{u} \in U\} = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ .
- (iv) Vale la formula delle dimensioni per il prodotto  $\varphi$ :  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$ .

*Soluzione.* Sia  $\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}_1 \in \underline{v} + U$ , con  $\underline{u}_1 \in U$ . Se  $\tilde{\varphi}$  è ben definito, allora deve valere l'uguaglianza  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{w}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u}_1, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}')$ , ossia  $\varphi(\underline{u}_1, \underline{v}') = 0 \ \forall \underline{v}' \in V \implies \underline{u}_1 \in V^\perp \implies U \subseteq V^\perp$ . Viceversa, se  $U \subseteq V^\perp$ , sia  $\underline{w}' = \underline{v}' + \underline{u}_2 \in \underline{v}' + U$ , con  $\underline{u}_2 \in U$ . Allora vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u}_1, \underline{v}' + \underline{u}_2) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{u}_2) + \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2)}_{=0}.$$

Pertanto  $\tilde{\varphi}$  è ben definito, dimostrando (i).

Sia ora  $U = V/V^\perp$ . Sia  $\underline{v} + U \in (V/U)^\perp = \text{Rad}(\tilde{\varphi})$ . Allora,  $\forall \underline{v}' + U \in V/U$ ,  $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') = 0$ , ossia  $\underline{v} \in V^\perp = U$ . Pertanto  $\underline{v} + U = U \implies \text{Rad}(\tilde{\varphi}) = \{V^\perp\}$ , e quindi  $\tilde{\varphi}$  è non degenere, dimostrando (ii).



Si dimostra adesso l'uguaglianza  $U^\perp = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ . Sia  $\underline{v} \in U^\perp$ . Allora  $\tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \forall \underline{u} \in U$ , da cui si ricava che vale l'inclusione  $U^\perp \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ . Sia ora  $\underline{v} \in \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ , e sia  $\underline{u} \in U$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0$ , da cui vale la doppia inclusione, e dunque l'uguaglianza desiderata, dimostrando (iii).

Dall'uguaglianza del punto (iii), l'applicazione della formula delle dimensioni e l'identità ottenuta dal punto (iv) dell'*Esercizio 2* rispetto al prodotto  $\tilde{\varphi}$  non degenerare, si ricavano le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim \pi(U) = \dim U - \dim(U \cap \text{Ker } \pi) = \dim U - \dim(U \cap V^\perp), \\ \dim \pi(U)^\perp = \dim V/V^\perp - \dim \pi(U) = \dim V - \dim V^\perp - \dim \pi(U), \\ \dim U^\perp = \dim \pi(U)^\perp + \dim \text{Ker } \pi = \dim \pi(U)^\perp + \dim V^\perp, \end{cases}$$

dalle quali si ricava la seguente identità:

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim V^\perp - (\dim U - \dim(U \cap V^\perp)) + \dim V^\perp,$$

da cui si ricava che  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$ , dimostrando (iv).  $\square$

**Esercizio 4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale dotato del prodotto  $\varphi$ . Si dimostri allora che  $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$ .

*Soluzione.* Sia  $\underline{v} = \underline{w}' + \underline{v}' \in W + V^\perp$ , con  $\underline{w}' \in W$  e  $\underline{v}' \in V^\perp$ . Sia inoltre  $\underline{w} \in W^\perp$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}' + \underline{v}', \underline{w}) = \varphi(\underline{w}', \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w}) = 0$ , dove si è usato che  $\underline{w}' \perp \underline{w}$  dacché  $\underline{w} \in W^\perp$  e  $\underline{w}' \in W$  e che  $\underline{v}' \in V^\perp$ . Allora vale l'inclusione  $W + V^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp$ .

Applicando le rispettive formule delle dimensioni a  $W^\perp$ ,  $(W^\perp)^\perp$  e  $W + V^\perp$  si ottengono le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp) - \dim W, \\ \dim (W^\perp)^\perp = \dim V + \dim(W^\perp \cap V^\perp) - \dim W^\perp, \\ \dim(W + V^\perp) = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp), \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$\dim (W^\perp)^\perp = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp) = \dim(W + V^\perp).$$

Dal momento che vale un'inclusione e l'uguaglianza dimensionale, si conclude che  $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$ , da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 5.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$  anti-hermitiana (i.e.  $A = -A^*$ ). Si dimostri allora che  $A$  è normale e che ammette solo autovalori immaginari.

*Soluzione.* Si mostra facilmente che  $A$  è normale. Infatti  $AA^* = A(-A) = -A^2 = (-A)A = A^*A$ . Sia allora  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalore di  $A$  e sia  $\underline{v} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{v} \in V_\lambda$ . Si consideri il prodotto hermitiano standard  $\varphi$  su  $\mathbb{C}^n$ . Allora vale la seguente identità:

$$\begin{aligned}\lambda \varphi(\underline{v}, \underline{v}) &= \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, A\underline{v}) = \varphi(A^* \underline{v}, \underline{v}) = \\ &= \varphi(-A\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(-\lambda \underline{v}, \underline{v}) = -\bar{\lambda} \varphi(\underline{v}, \underline{v}).\end{aligned}$$

Dacché  $\varphi$  è definito positivo,  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0 \implies \lambda = -\bar{\lambda}$ . Allora  $\Re(\lambda) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = 0$ , e quindi  $\lambda$  è immaginario, da cui la tesi.  $\square$