Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

26 aprile 2023

Azioni di un gruppo e introduzione agli spazi affini

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Nota. Nel corso delle lezioni si è impiegata la notazione $g.x$ per indicare l'azione di un gruppo su un dato elemento $x \in X$. Tuttavia si è preferito indicare $g.x$ con $g \cdot x$ nel corso del documento.

Inoltre, con G si indicherà un generico gruppo, e con X un generico insieme, sul quale G agisce, qualora non indicato diversamente.

Definizione (azione di un gruppo su un insieme)**.** Sia G un gruppo e sia X un insieme. Un'azione sinistra, comunemente detta solo **azione**, di G su X è un'applicazione da $G \times X$ in X tale che $(g, x) \mapsto g \cdot x$ e che:

(i) $e \cdot x = x \;\forall\, x \in X$,

(ii) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \;\forall\, x \in X, \forall\, g, h \in G$.

Osservazione.
▶ Data un'azione di G su X, si può definire un'applicazione $f_g : X \to X$ tale che, dato $g \in G$, $f_g(x) = g \cdot x$.
▶ Tale applicazione f_g è bigettiva, dal momento che $f_{g^{-1}}$ è una sua inversa, sia destra che sinistra. Infatti $(f_g \circ f_{g^{-1}})(x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x$, e così il viceversa.

Definizione. L'azione di un gruppo G su un insieme X si dice **fedele** se l'omomorfismo φ_G da G in $S(G)$, ossia nel gruppo delle bigezioni su G, che associa g a f_g è iniettiva.

Osservazione. Si osserva che dire che un'azione di un gruppo è fedele è equivalente a dire che $\operatorname{Ker} \varphi_G = \{e\}$, ossia che $f_g = \mathrm{Id} \iff g = e$.

Esempio. Si possono fare alcuni esempi di azioni classiche su alcuni gruppi.

(i) $S(X)$ agisce su X in modo tale che $f \cdot x = f(x) \; \forall \, f \in S(X), x \in X$.

(ii) G agisce su G stesso tramite l'operazione del gruppo, ossia $g \cdot g' = gg'$ $\forall \, g, \, g' \in G$.

(iii) Data un'azione sinistra di G su X tale che $(g, x) \mapsto g \cdot x$, si può definire naturalmente un'azione destra da $X \times G$ in X in modo tale che $(x, g) \mapsto x \cdot g = g^{-1} \cdot x$. Infatti $x \cdot e = e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x$, e $(x \cdot g) \cdot g' = (g^{-1} \cdot x) \cdot g' = g'^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) = (g'^{-1} g^{-1}) \cdot x = (gg')^{-1} \cdot x = x \cdot (gg')$.

Definizione (G-insieme)**.** Se esiste un azione di G su X, si dice che X è un *G-insieme*.

Definizione (orbita di x)**.** Sia $\sim_G$ la relazione d'equivalenza tale che $x \sim_G y \overset{\text{def}}{\iff} \exists \, g \in G \mid g \cdot x = y$. Allora le classi di equivalenza si dicono **orbite**, ed in particolare si indica l'orbita a cui appartiene un dato $x \in X$ come $\operatorname{Orb}_G(x) = O_x$ (o come $\operatorname{Orb}(x)$, quando G è noto), ed è detta *orbita di x*.

Esempio. Si possono individuare facilmente alcune orbite per alcune azioni classiche.

(i) Se $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ è il gruppo delle matrici invertibili su $\mathbb{K}$ di taglia n rispetto all'operazione di moltiplicazione matriciale, G opera naturalmente su $M(n, \mathbb{K})$ tramite la similitudine, ossia G agisce in modo tale che $P \cdot M = PMP^{-1} \; \forall \, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \; M \in M(n, \mathbb{K})$. In particolare, data $M \in M(n, \mathbb{K})$, $\operatorname{Orb}(M)$ coincide esattamente con la classe di similitudine di M.

(ii) Se $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, G opera naturalmente anche su $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$ tramite la congruenza, ossia tramite la mappa $(P, A) \mapsto P^\top AP$. L'orbita $\operatorname{Orb}(A)$ è la classe di congruenza delle matrice simmetria $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$. Analogamente si può costruire un'azione per le matrici hermitiane.

(iii) Se $G = O_n$, il gruppo delle matrici ortogonali di taglia n su $\mathbb{K}$, G opera su $\mathbb{R}^n$ tramite la mappa $O \cdot \underline{v} \mapsto O\underline{v}$. L'orbita $\operatorname{Orb}(\underline{v})$ è in particolare la sfera n-dimensionale di raggio $\|x\|$.

Definizione (stabilizzatore di x)**.** Lo **stabilizzatore** di un punto $x \in X$ è l'insieme degli elementi di G che agiscono su x lasciandolo invariato, ossia lo stabilizzatore $\operatorname{Stab}_G(x)$ (scritto semplicemente come $\operatorname{Stab}(x)$ se G è noto) è il sottogruppo di G tale che:

$$\operatorname{Stab}_G(X) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Esempio. Sia $H \subseteq G$ un sottogruppo di G e sia $X = G/H$. Allora X è un G-insieme tramite l'azione $g' \cdot (gH) = g'gH$. In particolare vale che $\operatorname{Stab}(gH) = gH$, e quindi che $\operatorname{Stab}(eH) = H$.

Teorema (di orbita-stabilizzatore)**.** Sia X un G-insieme e sia $x \in X$. Allora esiste un'applicazione bigettiva da $G/\operatorname{Stab}(x)$ a $\operatorname{Orb}(x)$.

Dimostrazione. Sia τ l'applicazione da $G/\operatorname{Stab}(x)$ a $\operatorname{Orb}(x)$ tale che $\tau(g\operatorname{Stab}(x)) = g \cdot x$. Si dimostra innanzitutto che τ è ben definita. Sia infatti $g' = gs \in G$, con $g \in G$ e $s \in \operatorname{Stab}(x)$, allora $\tau(g'\operatorname{Stab}(x)) = g' \cdot x = g \cdot (s \cdot x) = g \cdot x = \tau(g\operatorname{Stab}(x))$, per cui τ è ben definita.

Chiaramente τ è surgettiva: sia infatti $y \in \operatorname{Orb}(x)$, allora $\exists\, g \in G \mid g \cdot x = y \implies \tau(g\operatorname{Stab}(x)) = g \cdot x = y$. Siano ora g, $g' \in G$ tali che $\tau(g\operatorname{Stab}(x)) = \tau(g'\operatorname{Stab}(x))$, allora $g \cdot x = g' \cdot x \implies (g'g^{-1}) \cdot x = x \implies g'g^{-1} \in \operatorname{Stab}(x)$. Pertanto $g\operatorname{Stab}(x) = g'\operatorname{Stab}(x)$, e τ è allora iniettiva, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. Come conseguenza del teorema di orbita-stabilizzatore, si osserva che $|G/\operatorname{Stab}(x)| = |\operatorname{Orb}(x)|$, se $\operatorname{Orb}(x)$ è finito, e quindi si conclude, per il teorema di Lagrange, che $|G| = |\operatorname{Stab}(x)|\,|\operatorname{Orb}(x)|$.

Definizione. Si dice che G **opera liberamente** su X se $\forall\, x \in X$, l'applicazione da G in $\operatorname{Orb}(x)$ tale che $g \mapsto g \cdot x$ è iniettiva, ossia se $\operatorname{Stab}(x) = \{e\}$.

Definizione. Si dice che G **opera transitivamente** su X se $x \sim_G y\ \forall\, x$, $y \in X$, cioè se c'è un'unica orbita, che coincide con X. In tal caso si dice che X è **omogeneo** per l'azione di G.

Esempio. Si possono fare alcuni esempi classici di insiemi X omogenei per la propria azione.

(i) O_n opera sulla sfera n-dimensione di $\mathbb{R}^n$ transitivamente. In particolare, si può trovare un'analogia per lo stabilizzatore di una coordinata di un vettore $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^n$. Per esempio, se si vuole fissare il vettore $\underline{e_n}$, $\forall\, O \in \operatorname{Stab}(\underline{e_n})$ deve valere che $O\underline{e_n} = \underline{e_n}$, ossia l'ultima colonna di O

deve essere esattamente $\underline{e_n}$. Dal momento però che O è ortogonale, le sue colonne devono formare una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e quindi tutta l'ultima riga di O, eccetto per il suo ultimo elemento, deve essere nulla. Allora O deve essere della seguente forma:

$$O = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

dove $A \in M(n-1, \mathbb{R})$. Affinché allora O sia ortogonale, anche A deve esserlo. Pertanto vi è una bigezione tra $\mathrm{Stab}(\underline{e_n})$ e O_{n-1}.

(ii) Sia $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = \{W \subseteq \mathbb{R}^n \mid \dim W = k\}$, detto la Grassmanniana di $\mathbb{R}^n$ di ordine k. O_n opera transitivamente su $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{R}^n)$.

Definizione. Si dice che G **opera in maniera semplicemente transitiva** su X se $\exists\, x \in X$ tale che l'applicazione da G in X $g \mapsto g \cdot x$ è una bigezione, ossia se G opera transitivamente e liberamente.

Definizione. Un insieme X con un'azione semplicemente transitiva di G è detto un G-insieme omogeneo *principale*.

Esempio. (i) $X = G$. L'azione naturale di G su X per moltiplicazione è semplicemente transitivo (per g, $g' \in G$, esiste un unico $h \in G$ tale che $g = h.g' = hg'$). Quindi X è G-omogeneo principale.

(ii) Se X è G-omogeneo principale, l'azione è fedele.

(iii) Se X è omogeneo per un gruppo G commutativo, allora G agisce fedelmente su $X \implies X$ è un G-insieme omogeneo principale.

Definizione (spazio affine)**.** Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Allora uno spazio affine E associato a V è un qualunque V-insieme omogeneo principale.

Pertanto, $\forall\, P, Q \in E$, esiste un unico vettore $\underline{v} \in V$ tale che $Q = \underline{v}.P$, denotato come $Q = P + \underline{v} = \underline{v} + P$. Si osserva che $\underline{v} + (\underline{w} + P) = (\underline{v} + \underline{w}) + P$. Essendo $\underline{v}$ unico, si scrive $\underline{v} = Q - P = \overrightarrow{PQ}$.
Fissato $O \in E$, l'applicazione $\underline{v} \mapsto \underline{v} + O$, $V \to E$ è una bigezione.

Osservazione.

- $P - P = \underline{0} \in V$, $P - Q = -(Q - P)$, $(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) = P_3 - P_1$.

- $O \in E$ l'applicazione $P \mapsto P - O$ è una bigezione di E su V.

Siano P_1, ..., $P_n \in E$. $\forall \lambda_1$, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$. $\forall O \in E$ possiamo individuare il punto $P = O + \sum_{i=1}^n \lambda_i(P_i - O)$.
$P = P' = \iff O + \sum_{i=1}^n \lambda_i(P_i - O) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i(P_i - O') \iff O + \sum_{i=1}^n \lambda_i(O' - O) = O' \iff (\sum \lambda_i)(O' - O) = O' - O \iff \sum \lambda_i = 1$.

Definizione. Un punto $P \in E$ è **combinazione affine** dei punti P_1, ..., P_k se $P = O + \sum \lambda_i(P_i - O)$ se $\sum \lambda_i = 1$. Si scriverà, in particolare, che $P = \sum \lambda_i P_i$.

Si chiama retta affine l'insieme dei punti che sono combinazione affine di due punti. Analogamente si fa per un piano e uno spazio.

Definizione. Un sottoinsieme $D \subseteq E$ si dirà **sottospazio affine** se è chiuso per combinazioni affini (finite).

Definizione. Il sottospazio affine $D \subseteq E$ generato da un sottoinsieme $S \subseteq E$ è l'insieme delle combinazioni affini (finite) di punti di S, detto $D = \mathrm{Aff}(S)$.