Equivalenza tra stati

Def. dato un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $p, q \in Q$, si dice che p e q sono STATI EQUIVALENTI ($p \equiv q$) se $\forall w \in \Sigma^*$, $\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F$, altrimenti si dice che sono STATI DISTINGUIBILI.

Algoritmo di riempimento-tabella

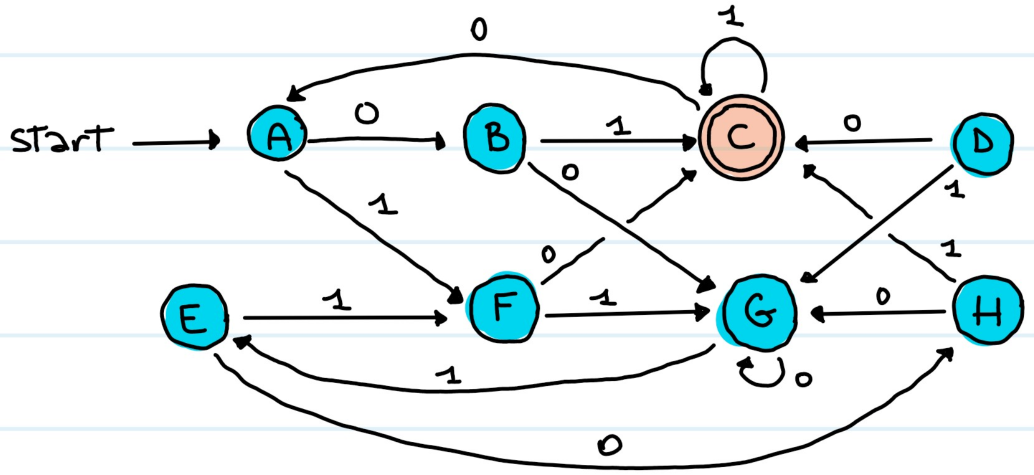
$R_A = Q \times Q$, relazione.

base $p \in F, q \notin F \Rightarrow p \not\equiv q$, $(p, q) \in R_A$

passo induttivo $\exists\, a \in \Sigma \mid (\delta(p,a), \delta(q,a)) \in R_A \Rightarrow$

$\Rightarrow p \not\equiv q$, $(p,q) \in R_A$

es.



$(C,A), (C,B), \dots, (C,H) \in R_A$

$(H,E) \in R_A \Leftarrow (\delta(H,1), \delta(E,1)) = (C,F) \in R_A$

$(D,A) \in R_A \quad (B,E) \in R_A \quad (F,A) \in R_A \quad \dots$

in tabella:

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

$\Longrightarrow A \equiv E, \; B \equiv H, \; D \equiv F$

Algoritmo di Hopcroft

(i) considero $Q \setminus F$ e F, dette classi

(ii) per ogni stato q di una classe controllo dato $a \in \Sigma$ se ricade nella stessa classe; qualora ciò non accadesse, creo un'altra partizione con gli elementi che con $a \in \Sigma$ ricadono nella sua stessa classe; reitero $\forall a \in \Sigma$

(iii) interseco le classi di ogni stato e reitero (ii)

Teorema $(p,q) \notin R_A \iff p \equiv q$

Supponiamo $\exists\ (p,q) \notin R_A \mid \exists\, w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p,w) \in F \wedge \hat{\delta}(q,w) \notin F$.

base $w \neq \varepsilon$, altrimenti $(p,q) \in R_A$, $\lightning$

passo induttivo $w \neq a_1 \cdots a_n$. Siano $r = \delta(p, a_1)$ e $s = \delta(r, a_1)$.

Allora $\hat{\delta}(p,w) = \hat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n)$, $\hat{\delta}(q,w) = \hat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n)$.

Tuttavia $(r,s) \in R_A$, altrimenti si vidererebbe il passo $n-1$.

Allora $(r,s) \in R_A \Rightarrow (p,q) \in R_A$, $\lightning$.

Quindi non esiste tale w, pertanto $p \equiv q$. $\boxtimes$

OSS. Per dimostrare che due automi sono equivalenti è sufficiente dimostrare che $q_{0_A} \equiv q_{0_B}$.

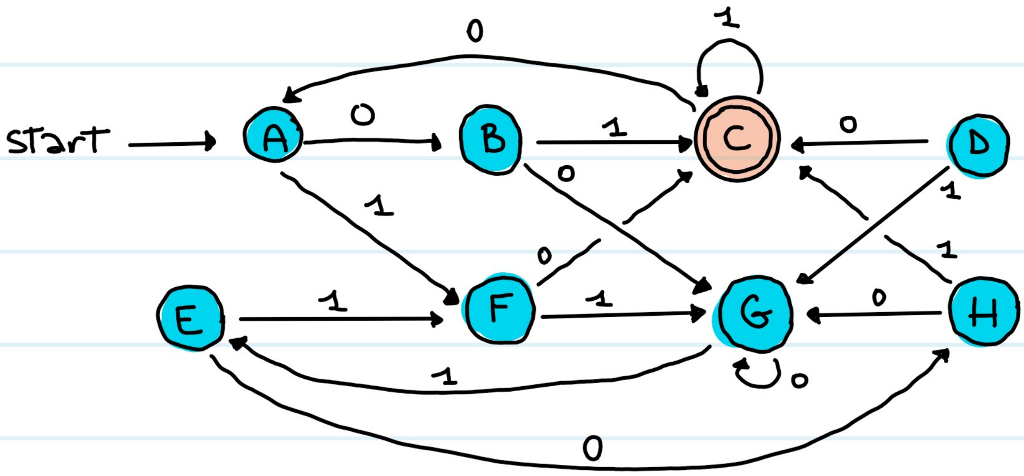
OSS. $\equiv$ è relazione di equivalenza.

Algoritmo di minimizzazione

Dato l'automa $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, esso è equivalente all'automa minimo $(Q/\equiv, \Sigma, \gamma, q_0/\equiv, F/\equiv)$, dove:

$$\gamma(q/\equiv, a) = \delta(q,a)/\equiv$$

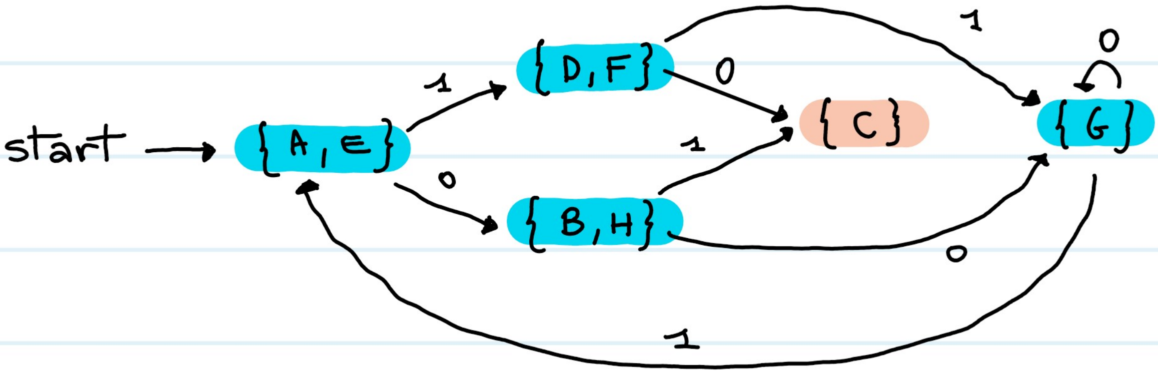
es.



$$Q/\equiv \; = \{\{A,E\},\{B,H\},\{C\},\{D,F\},\{G\}\}$$

$$q_0/\equiv \; = \{A,E\}$$

$$F/\equiv \; = \{C\}$$



$$L(A) = ((110^*1 + 000^*1)^* + \varepsilon)\,(10+01)$$

OSS. gli stati dell'automa minimo sono tutti distinguibili.