

Teoria del corso di
Geometria e topologia differenziale

A cura di Gabriel Antonio Videtta¹
g.videtta1@studenti.unipi.it

Testo basato sul contenuto del corso del prof. Lisca
tenutosi presso l'Università di Pisa.

A.A. 2025-2026

¹Basato su un layout di [Luca Lombardo](#) e di [Francesco Sorce](#).

Indice

Notazioni impiegate	3	2 Teoria delle superfici	12
Algebra lineare	3	2.1 Definizioni preliminari	12
Analisi matematica	3	2.1.1 Parametrazioni regolare	12
Geometria differenziale delle curve e delle superfici	3	2.1.2 Superficie	12
Teoria della misura	4	2.2 Classi fondamentali di superfici	12
Teoria delle varietà	4	2.2.1 Superfici di rotazione	12
Topologia	4	2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello	13
Prerequisiti matematici	6	2.3 Piano tangente e orientabilità	13
Algebra lineare	6	2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse	13
Analisi matematica	6	2.3.2 Versori normali e orientabilità	13
Teoria della misura	6	3 Curve su superfici	15
1 Teoria delle curve	7	3.1 Piano tangente e derivata direzionale	15
1.1 Definizioni preliminari	7	3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare	15
1.1.1 Curve, tracce e velocità	7	3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve	15
1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica	7	3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale	15
1.2 (Ri)parametrazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a.	7	3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale	15
1.2.1 Riparametrazione e prime proprietà	7	3.2.1 Operatore forma e prime proprietà	15
1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco	7	3.2.2 I e II forma fondamentale	16
1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.)	8	3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale	16
1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva	8	3.2.4 Direzioni e curvature principali, formula di Eulero	17
1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale	8	3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti	18
1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet	8	3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium	18
1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametrazioni p.l.a. di una stessa curva	9	3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche	18
1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale)	9	3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze	19
1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.	9	3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali	19
1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale	10	3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante	19
1.5 Proprietà di curvatura e torsione	10	3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo	19
1.5.1 Torsione e piano osculatore	10	3.5 Geodetiche	20
1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore	11	3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo	20
1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve	11	3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale	20
		3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze	21
		3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione	21
		3.5.5 Curvatura geodetica	22
		3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet	22
		3.6.1 Prime definizioni	22
		3.6.2 Regione di una superficie e area	22
		3.6.3 Integrazione rispetto a una regione	22
		3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario	23
		3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione	23

3.6.6	Teorema di Radó e caratteristica di Eulero	23	4.7.3	Passaggio per omotopia e buona definizione del grado intero di una mappa	39
3.6.7	Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse	23	4.7.4	Grado di z^k , delle riflessioni e della mappa antipodale su S^1	40
4	Varietà e teoria del grado	25	4.7.5	Campi vettoriali tangenti su S^n e pettinabilità	41
4.1	Varietà differenziabili e prime definizioni . . .	25	4.8	Indici di campi vettoriali su aperti di \mathbb{R}^m . .	41
4.1.1	Mappe C^∞ e diffeomorfismi	25	4.8.1	Zero isolato e indice di un campo in uno zero	41
4.1.2	Varietà differenziabili, varietà chiuse, carte, atlanti, parametrizzazioni locali e funzioni di transizione	25	4.8.2	Lemma di Hopf e teorema fondamentale dell'algebra	42
4.1.3	Prodotto di varietà	26	4.9	Campi vettoriali su varietà	43
4.2	Spazio tangente e differenziale su mappe tra varietà	26	4.9.1	Indice di un campo vettoriale tangente su una varietà	43
4.2.1	Differenziale su aperti di \mathbb{R}^n	26	4.9.2	Simplessi e caratteristica di Eulero . .	43
4.2.2	Spazio tangente in un punto di una varietà	26	4.9.3	Teorema di Poincaré-Hopf	43
4.2.3	Differenziale per mappe lisce tra varietà	27			
4.3	Valori regolari e critici	27			
4.3.1	Prime definizioni	27			
4.3.2	Teorema di invertibilità locale per varietà e lemma della pila di dischi . .	28			
4.3.3	Misura nulla e teoremi di Sard e Brown	28			
4.3.4	Varietà a partire da valori regolari . .	29			
4.4	Varietà con bordo	30			
4.4.1	Semispazio superiore e varietà con bordo	30			
4.4.2	Proprietà del bordo di una varietà con bordo	30			
4.4.3	Differenziale e spazio tangente su varietà con bordo	30			
4.4.4	Varietà con bordo da valori regolari .	31			
4.4.5	Classificazione delle 1-varietà, lemma di non retrazione sul bordo e teorema del punto fisso di Brouwer	32			
4.5	Teoria del grado modulo 2	33			
4.5.1	Omotopie C^∞	33			
4.5.2	Isotopie e lemma di omogeneità	33			
4.5.3	Grado modulo 2 e buona definizione .	34			
4.6	Varietà orientate	35			
4.6.1	Orientazione di basi su spazi vettoriali, orientazione canonica di \mathbb{R}^n	35			
4.6.2	Orientazione su prodotti di spazi vettoriali	35			
4.6.3	Orientazione su varietà e prime proprietà	35			
4.6.4	Orientabilità di m -varietà immerse in \mathbb{R}^m	36			
4.6.5	Orientazione nel prodotto di due varietà orientate	37			
4.6.6	Semispazio interno o esterno	37			
4.6.7	Orientazione sul bordo della varietà .	37			
4.7	Teoria del grado su \mathbb{Z}	38			
4.7.1	Grado intero rispetto a un valore regolare	38			
4.7.2	Grado di una mappa estendibile dal bordo	38			

Notazioni impiegate

Cercheremo di impiegare caratteri latini (x, y, z) per indicare quantità reali; caratteri latini sottolineati $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ per indicare vettori o campi vettoriali; caratteri greci minuscoli (α, β, γ) per indicare curve; e caratteri greci maiuscoli (Σ) per indicare superfici.

Algebra lineare

- rk – rango di un'applicazione lineare o di una matrice.
- $M(n)$ – matrici $n \times n$ a elementi reali.
- $S(n)$ – matrici simmetriche $n \times n$ a elementi reali.

Analisi matematica

- $\{f \text{ op } a\}$ – data una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a valori reali, $\{f \text{ op } a\}$ denota l'insieme $\{x \in X \mid f(x) \text{ op } a\}$, dove $a \in \mathbb{R}$.
- $f \times g$ – date due funzioni $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow D$, la funzione $f \times g : (A \times B) \rightarrow (C \times D)$ è definita in modo tale che $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$.
- $f|_A$ – restrizione di una funzione f al sottinsieme A del dominio.
- f_i – nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la proiezione di f sulla i -esima coordinata, ovvero sia $\pi_i \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\frac{df}{dt}(x)$, $f'(x)$, \dot{f} – derivata di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nel caso $n > 1$, coincide con il vettore $(f_i'(t))_i$. La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- $\partial_{x_i} f(\underline{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$, $f_{x_i}(\underline{x})$ – derivata parziale nella i -esima coordinata di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto \underline{x} . La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- x_i – derivate parziali nella i -esima coordinata di un campo \underline{x} da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , ovvero sia $((x_1)_i, \dots, (x_m)_i)^\top$.
- $\nabla f(\underline{x})$, $\nabla f_{\underline{x}}$ – gradiente di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ovvero sia il vettore $(\partial_{x_i} f(\underline{x}))_i^\top$.
- $Jf(\underline{x})$, $Jf_{\underline{x}}$ – jacobiano di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nel punto x , ovvero sia la matrice $(\partial_{x_j} f_i(\underline{x}))_{i,j} = (\nabla f_i(\underline{x}))_i$.

- $J_{\underline{y}} f(\underline{p})$ – nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la sottomatrice $n \times n$ quadrata di $Jf(\underline{p})$ date dalle ultime n colonne. Coincide con $J(\pi_{\mathbb{R}^n} \circ f)(\underline{p})$.
- C^n – classe delle funzioni dotate di derivate parziali continue fino all'ordine n . Per $n = 0$, coincide con la classe delle funzioni continue (C^0).
- C^∞ , liscio – classe delle funzioni derivabili parzialmente per un numero arbitrario di volte con continuità.
- diffeomorfismo di classe C^k – funzione di classe C^k con inversa di classe C^k .

Geometria differenziale delle curve e delle superfici

- $B_R(P, \mathbb{R}^n)$, $B_R(P)$ – la palla n -dimensionale di raggio R e centro P . Ometteremo \mathbb{R}^n quando la dimensione si deduce dal contesto.
- $S_a^i(P)$ – l'ipersfera i -dimensionale di raggio a e centro P , ovvero sia $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{i+1} \mid \|\underline{x} - P\| = a\}$.
- $\mathbb{T}_{a,b}$ – toro di raggio maggiore a e raggio minore b .
- $\ell(\alpha)$ – lunghezza di una curva α .
- p.l.a. – parametrizzata a lunghezza d'arco, ovvero sia con velocità unitaria.
- κ_α – curvatura di una curva α in un punto.
- τ_α – torsione di una curva α in un punto.
- T_α – versore tangente di una curva regolare in un punto.
- N_α – versore normale di una curva di Frenet in un punto.
- B_α – versore binormale di una curva di Frenet in un punto.
- Π_α – piano osculatore di α in un punto.
- R_α – raggio di curvatura di α in un punto.
- $T_P \Sigma$ – piano tangente di P rispetto a Σ .
- \underline{n} , $n_{\underline{x}}$ – (versore) normale (eventualmente locale) di una superficie o di una parametrizzazione regolare.

- $D_\xi f(P)$ – derivata direzionale con direzione ξ della funzione f nel punto P di una superficie.
- S_P – operatore forma nel punto P di una superficie.
- I_P – I forma fondamentale nel punto P di una superficie.
- II_P – II forma fondamentale nel punto P di una superficie.
- E, F, G – elementi della rappresentazione matriciale della I forma fondamentale: $I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.
- ℓ, m, n – elementi della rappresentazione matriciale della II forma fondamentale: $II_P = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$.
- a, b, c, d – elementi della rappresentazione matriciale dell'operatore forma: $S_P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
- κ_n – curvatura normale di una superficie in un punto P secondo un dato vettore unitario.
- $\kappa_{\alpha, n}$ – curvatura normale di α rispetto a una superficie.
- κ_1, κ_2 – curvatures principali di una superficie in un punto.
- κ – curvatura gaussiana di una superficie in un punto.
- H – curvatura media di una superficie in un punto.
- Γ_{ij}^k – simbolo di Christoffel, ovverosia coefficiente di \underline{x}_k in \underline{x}_{ij} .
- $\nabla_v X(P)$ – derivata covariante di un campo vettoriale X tangente alla superficie Σ in direzione v nel punto P .
- $(\cdot)^\top$ – proiezione di \cdot sul piano tangente $T_P \Sigma$.
- γ_v – geodetica locale di direzione v .
- U_P – intorno di definizione della mappa esponenziale in un punto P .
- \exp_P – mappa esponenziale in un punto P .
- v_k – data una base ortonormale $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, la mappa $t \mapsto k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2)$.
- N_P – intorno normale di un punto P .
- $\varphi(\gamma(t))$ – angolo tra la curva γ e il parallelo di $\gamma(t)$ al tempo t .
- $r(\gamma(t))$ – distanza di $\gamma(t)$ dall'asse di rotazione.
- $k_{\alpha, g}$ – curvatura geodetica di una curva α rispetto a una superficie Σ .
- $A(R)$ – area di una regione R di una superficie Σ .
- $\int_R \varphi dA$ – integrazione rispetto all'area in una regione R , equivalente a $\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv$.

- ε_i – angolo esterno i -esimo di una regione o superficie con bordo.
- ι_i – angolo interno i -esimo di una regione o superficie con bordo.
- $\partial \Sigma$ – bordo di una superficie con bordo, come unione delle tracce delle regioni con cui è definita per differenza.
- $\chi(\Sigma)$ – caratteristica di Eulero di una superficie con bordo.

Teoria della misura

- vol – applicazione per calcolare il volume di un rettangolo in \mathbb{R}^n ; tale per cui $\text{vol}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_i (b_i - a_i)$.
- m – misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n .

Teoria delle varietà

- $\dim M$ – dimensione di una varietà M .
- $(f, W \cap M)$ – carta locale di una varietà M ; si sottintende che W sia un aperto dello spazio ambiente in cui è contenuto M e che f sia un diffeomorfismo con dominio $W \cap M$ verso un aperto di $\mathbb{R}^{\dim M}$.
- $T_x M$ – spazio tangente di un punto x di una varietà M .
- df_x – differenziale di una mappa liscia $f: M \rightarrow N$ tra varietà nel punto x .
- $\text{crit}(f)$ – insieme dei punti critici di una mappa liscia $f: M \rightarrow N$ tra varietà.
- S^n – sfera n -dimensionale reale, ovverosia $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\underline{x}\| = 1\}$.
- D^n – disco n -dimensionale reale, ovverosia $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$.
- H^n – semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$.
- ∂H^n – bordo del semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0\}$, ovverosia $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$.
- ∂M – bordo di una varietà bordata M .

Topologia

- II-numerabile – spazio topologico che ammette una base numerabile.
- T1 – spazio topologico i cui singoletti sono insiemi chiusi.
- T2 – spazio topologico per cui due punti distinti ammettono l'esistenza di una coppia di intorni disgiunti.

- \overline{X} – chiusura di un insieme.
- $\text{int}(X)$ – parte interna di un insieme.
- ∂X – frontiera di un insieme, ovvero $\overline{X} \setminus \text{int}(X)$.

Prerequisiti matematici

Algebra lineare

- **Caratterizzazione del rango di una matrice** – Sia $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice. Allora $\text{rk}(M) = k$ se e solo se i minori di taglia superiore a k in M hanno tutti determinante nullo ed esiste un minore di taglia k con determinante non nullo.

Analisi matematica

- **Teorema di Schwarz** – Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che ammette derivate seconde miste continue in \underline{x} . Allora $\partial_{x_i x_j} f(\underline{x}) = \partial_{x_j x_i} f(\underline{x})$ per ogni variabile x_i, x_j .
- **Teorema della funzione implicita** – Sia U un aperto di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Sia $\underline{p} = (x_0, y_0)$ un punto in U con $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{a}$ e $J_y f(\underline{p})$ invertibile.

Allora esiste un intorno $A = I_{\underline{x}} \times I_{\underline{y}}$ di \underline{p} in U all'interno del quale esiste un'unica funzione $g : I_{\underline{x}} \rightarrow I_{\underline{y}}$ di classe C^k per cui:

$$\underline{y} = g(\underline{x}) \iff f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{a}, \quad (\text{in } A).$$

Inoltre per tale g vale:

$$Jg(\underline{x}_0) = -J_y f(\underline{p})^{-1} J_x f(\underline{p}).$$

- **Teorema di invertibilità locale** (o della funzione inversa) – Sia U un aperto di \mathbb{R}^n e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k , con $k \geq 1$. Sia \underline{x}_0 un punto in U con $Jf(\underline{x}_0)$ invertibile.

Allora esiste un intorno A di \underline{x}_0 in U dentro al quale $f|_A$ ha un'inversa g , anch'essa di classe C^k , per la quale $Jg(f(\underline{x})) = Jf(\underline{x})^{-1}$.

- **Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali** – Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano date due funzioni continue:

$$A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{e} \quad \underline{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Fissato $(t_0, \underline{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, esiste un'unica soluzione $\underline{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t), \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale** – Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Si supponga inoltre che \underline{f} sia *localmente lipschitziana* rispetto alla seconda variabile.

Allora, per ogni $(t_0, \underline{y}_0) \in \Omega$, esistono $\delta > 0$ e un'unica funzione $\underline{y} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 che risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali** – Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Indichiamo con $\Phi(t, t_0, \underline{y}_0)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy con dato iniziale $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$.

Allora l'insieme di definizione del flusso:

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, t_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \begin{array}{l} \text{la soluzione } \underline{y}(t, t_0, \underline{y}_0) \\ \text{esiste al tempo } t \end{array} \right\}$$

è un aperto di $\mathbb{R} \times \Omega$ e l'applicazione $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^k .

- **Teorema di Sard sugli aperti di \mathbb{R}^n** – Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa liscia. Allora l'insieme $\text{crit}(f)$ dei valori critici di f ha misura nulla.
- **Teorema di approssimazione di Weierstrass** – Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto, e sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa continua. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione polinomiale $P : K \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.

Teoria della misura

- **Caratterizzazione dell'annullamento della misura di Lebesgue** – Sia A un sottinsieme di \mathbb{R}^n . Allora A ha misura nulla se e solo se, per ogni scelta di $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia numerabile $\{B_i\}_{i \geq 0}$ di rettangoli $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ tali per cui:

$$A \subseteq \bigcup_{i \geq 0} B_i, \quad \sum_{i \geq 0} \text{vol}(B_i) < \varepsilon.$$

- **Lemma per la nullità della misura su un'unione numerabile di insiemi di misura nulla** – Se $\{A_k\}_{k \geq 0}$ è una famiglia di sottinsiemi di misura nulla di \mathbb{R}^n , allora anche $\bigcup_{k \geq 0} A_k$ ha misura nulla.

Parte 1

Teoria delle curve

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe C^∞ .

Se $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ e f è una funzione relativa a una curva α , ammettiamo l'abuso di notazione $f(\underline{x})$, intendendo $f(\alpha^{-1}(\underline{x}))$; per esempio useremo $\kappa(P)$ per intendere $\kappa(\alpha^{-1}(P))$.

1.1 Definizioni preliminari

1.1.1 Curve, tracce e velocità

Definizione 1.1 (Curva parametrizzata).

Una **curva parametrizzata** (o semplicemente *curva*) è una mappa $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , dove I è un intervallo.

Definizione 1.2 (Traccia di una curva).

Si dice **traccia** (o *supporto*) di una curva parametrizzata $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, la sua immagine $\alpha(I)$.

Definizione 1.3 (Velocità di una curva).

Si definisce la **velocità** di una curva parametrizzata $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ come la curva indotta dalla derivata di α :

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica

Definizione 1.4 (Lunghezza di una curva).

Si definisce la **lunghezza** $\ell(\alpha)$ di una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ come:

$$\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

Osservazione 1.5.

La definizione data per la lunghezza di una curva corrisponde alla nostra idea intuitiva di lunghezza tramite i seguenti due risultati:

1. **Validità sul segmento:** Su un segmento lineare $\alpha(t) = A + t(B - A)$ con $I = [0, 1]$, $\ell(\alpha) = \|B - A\|$.
2. **Approssimazione poligonale:** La lunghezza $\ell(\alpha)$ è il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte nella curva. In termini teorici:

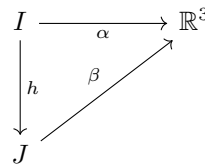
Sia dato $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale per cui, per ogni partizione $\{t_i\}_{i=0}^n$ di I di finezza inferiore a δ (i.e., $\max |t_{i+1} - t_i| < \delta$), vale $\|S - \ell(\alpha)\| < \varepsilon$, dove $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$.

1.2 (Ri)parametrizzazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a.

1.2.1 Riparametrizzazione e prime proprietà

Definizione 1.6 (Riparametrizzazione di una curva).

Data una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, una **riparametrizzazione** β di α è una curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui esiste un diffeomorfismo liscio $h : I \rightarrow J$ con $\alpha = \beta \circ h$.



Se $h' > 0$, si dice che h mantiene l'orientazione di α ; se $h' < 0$, h inverte l'orientazione.

Proposizione 1.7.

Se β è una riparametrizzazione di α , allora $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$.

1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco

Definizione 1.8 (Curva regolare).

Si dice che una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è **regolare** se $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Definizione 1.9 (Curva parametrizzata a lunghezza d'arco).

Si dice che una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è **parametrizzata a lunghezza d'arco (p.l.a.)** se α' è un vettore unitario (i.e., $\|\alpha'\| = 1$). In tal caso, $\ell(\alpha|_{[a,b]}) = b - a$.

Proposizione 1.10 (Riparametrizzazione a lunghezza d'arco).

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva regolare, allora α ammette una riparametrizzazione a lunghezza d'arco, ossia ammette una riparametrizzazione $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui β sia p.l.a.

Dimostrazione.

Poiché α è regolare, la funzione $s : I \rightarrow [0, \ell(\alpha)]$ tale per cui

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt$$

è un diffeomorfismo liscio. Quindi $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ è una riparametrizzazione di α , e vale:

$$\beta'(s) = \frac{\alpha'(s^{-1}(s))}{s'(s^{-1}(s))} = \frac{\alpha'(s^{-1}(s))}{\|\alpha'(s^{-1}(s))\|},$$

che è un vettore unitario. \square

Osservazione 1.11.

Tutte le riparametrizzazioni p.l.a. di una curva regolare α sono ottenibili da una singola riparametrizzazione p.l.a. β come $\beta(\pm t + v)$, al variare di $v \in \mathbb{R}$. In particolare, le riparametrizzazioni che mantengono l'orientazione sono quelle della forma $\beta(t + v)$, mentre quelle che la invertono sono della forma $\beta(-t + v)$.

Se infatti γ è una riparametrizzazione p.l.a. di β (e quindi di α), deve valere $\beta = \gamma \circ f$ per f diffeomorfismo. Quindi, per ogni tempo possibile di β , vale:

$$\beta'(s) = \gamma'(f(s))f'(s).$$

Dal momento che $\beta'(s)$ e $\gamma'(f(s))$ sono vettori unitari per ipotesi, $f'(s)$ può assumere solo ± 1 come valore. Dacché il dominio di f è connesso e f' è liscia, f' è costantemente 1 o -1 , e dunque $f(t)$ è della forma $\pm t + v$ con $v \in \mathbb{R}$.

1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.)

In tutta questa sezione consideriamo una curva p.l.a. β .

Se implicito, tralascieremo β nella notazione.

1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva

Definizione 1.12 (Versore tangente).

Sia β una curva p.l.a., allora si definisce il suo **versore tangente** T_β come β' .

Definizione 1.13 (Curvatura).

Sia β una curva p.l.a., allora si definisce la **curvatura** $\kappa_\beta(s)$ di β al tempo s come $\|\dot{T}_\beta(s)\|$.

Laddove è chiaro dal contesto quale sia β , scriviamo solo $\kappa(s)$.

1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale

Definizione 1.14 (Curva di Frenet p.l.a.).

Una curva p.l.a. β si dice **curva di Frenet** se ad ogni tempo s , la curvatura è positiva ($\kappa_\beta(s) > 0$).

Definizione 1.15 (Versore normale).

Se β è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo s il **versore normale** $N_\beta(s)$ così definito:

$$N_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{T}_\beta(s)}{\|\dot{T}_\beta(s)\|}.$$

Definizione 1.16 (Versore binormale).

Se β è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo s il **versore binormale** $B_\beta(s)$ così definito:

$$B_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_\beta(s) \times N_\beta(s).$$

Osservazione 1.17 (Triedro di Frenet).

Se β è di Frenet, allora, dacché $\dot{T}_\beta \perp T_\beta$, N_β e T_β sono linearmente indipendenti. Dunque $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ formano una base ortonormale a ogni tempo s . Tale base è detta **triedro di Frenet**.

1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet

Assumiamo in questa sottosezione di star lavorando con curve di Frenet p.l.a.

Proposizione 1.18 (Prima equazione di Frenet).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\boxed{\dot{T}_\beta(s) = \kappa_\beta(s) \cdot N_\beta(s).} \quad (\text{F1})$$

Osservazione 1.19.

Osserviamo che \dot{N}_β è ortogonale in ogni tempo a N_β , e dunque \dot{N}_β sarà contenuto in $\text{span}(T_\beta, B_\beta)$.

Inoltre, derivando $N_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = 0$, otteniamo:

$$\dot{N}_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = -N_\beta(s) \cdot \dot{T}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s).$$

Definizione 1.20 (Torsione).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora definiamo la **torsione** $\tau_\beta(s)$ come il coefficiente di $\dot{N}_\beta(s)$ in $B_\beta(s)$, ovverosia:

$$\boxed{\tau_\beta(s) = \dot{N}_\beta(s) \cdot B_\beta(s).}$$

Proposizione 1.21 (Seconda equazione di Frenet).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\boxed{\dot{N}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s) T_\beta(s) + \tau_\beta(s) B_\beta(s).} \quad (\text{F2})$$

Proposizione 1.22 (Terza equazione di Frenet).

Sia β una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\boxed{\dot{B}_\beta(s) = -\tau_\beta(s) N_\beta(s),} \quad (\text{F3})$$

e quindi $\boxed{\tau_\beta(s) = -\dot{B}_\beta(s) \cdot N_\beta(s).}$

Osservazione 1.23.

Dal momento che $B_\beta = T_\beta \times N_\beta$, derivando B_β otteniamo:

$$\dot{B}_\beta = \dot{T}_\beta \times N_\beta + T_\beta \times \dot{N}_\beta,$$

dal quale, applicando le prime due equazioni di Frenet, ricaviamo (F3).

Osservazione 1.24.

In termini matriciali, le tre equazioni di Frenet possono scriversi in modo più compatto come:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametrizzazioni p.l.a. di una stessa curva

Proposizione 1.25.

Sia $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione p.l.a. di una curva p.l.a. $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora le curvatures delle due curve coincidono nei punti delle tracce.

In altre parole, se $f : J \rightarrow I$ è il diffeomorfismo per cui $\gamma = \beta \circ f$, allora:

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\beta(f(s)).$$

Inoltre, se β è di Frenet, anche γ è di Frenet, e se f preserva l'orientazione, allora i triedri di Frenet e la torsione coincidono nei punti delle tracce, ossia:

$$T_\gamma(s) = T_\beta(f(s)), \quad N_\gamma(s) = N_\beta(f(s)),$$

$$B_\gamma(s) = B_\beta(f(s)), \quad \tau_\gamma(s) = \tau_\beta(f(s)).$$

Qualora f non preservasse l'orientazione, le quantità sopracitate di γ coincidono con quelle di β nei punti, ma sono cambiate di segno (eccetto per la normale N_γ , che invece ha stesso verso).

1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale)

1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.

Definizione 1.26 (Curva di Frenet).

Sia α una curva regolare. Allora si dice che α è una **curva di Frenet** se una sua qualsiasi riparametrizzazione p.l.a. è di Frenet.

Osservazione 1.27.

Per la Proposizione 1.25, se α è di Frenet, allora ogni sua riparametrizzazione p.l.a. è di Frenet.

Possiamo estendere questa idea anche per definire il triedro di Frenet e la torsione.

Definizione 1.28 (Versore tangente).

Sia α una curva regolare. Allora si definisce il **versore tangente** di α al tempo t come:

$$T_\alpha(t) = T_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Osservazione 1.29.

Se t è un tempo in cui $\alpha'(t) \neq 0$, allora, per continuità, esiste un intorno di t in cui α è regolare (i.e., α è localmente regolare in t). Questo ci permette di definire la curvatura come segue:

Definizione 1.30 (Curvatura).

Sia α una curva regolare al tempo t . Allora si definisce la **curvatura** al tempo t come:

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione locale p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo.

Qualora α non fosse regolare in t (i.e., $\alpha'(t) = 0$), si pone $\kappa_\alpha(t) = 0$.

Proposizione 1.31.

Una curva α è regolare e di Frenet se e solo se $\kappa_\alpha(t) > 0$ per ogni t .

Definizione 1.32 (Versore normale).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore normale** di α al tempo t come:

$$N_\alpha(t) = N_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo.

Definizione 1.33 (Versore binormale).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore binormale** di α al tempo t come:

$$B_\alpha(t) = B_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Definizione 1.34 (Torsione).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce la **torsione** di α al tempo t come:

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(f(s)),$$

dove β è una riparametrizzazione p.l.a. di α con $\alpha = \beta \circ f$ e f diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Proposizione 1.35.

Valgono le equazioni di Frenet (F1, F2, F3) anche nel caso generale.

1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale

Osservazione 1.36.

Se α è una curva regolare e $\alpha = \beta \circ f$, dove β è una sua riparametrizzazione p.l.a. e f è un diffeomorfismo, allora:

$$\alpha'(t) = \beta'(f(t))f'(t) = T_\alpha(t)f'(t), \quad (1.1)$$

da cui si ricava applicando $f'(t) = \|\alpha'(t)\|$ la seguente proposizione:

Proposizione 1.37 (Formula per il versore tangente).

Sia α una curva regolare. Allora vale:

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

ovverosia il versore tangente è dato dalla normalizzazione della derivata al tempo t .

Osservazione 1.38.

Derivando ulteriormente l'eq. (1.1), si ottiene:

$$\alpha''(t) = \dot{T}_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^2 + T_\alpha(t)f''(t). \quad (1.2)$$

Applicando $\alpha'(t) \times -$ all'eq. (1.2) e sfruttando che $\alpha' \parallel T_\alpha$ si ricava:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \|\alpha''(t)\|^2 (\alpha'(t) \times \dot{T}_\alpha(t)), \quad (1.3)$$

dalla quale, usando che $\alpha'(t) \perp \dot{T}_\alpha$, e prendendo le norme, si ottiene la seguente proposizione:

Proposizione 1.39 (Formula per la curvatura).

Sia α una curva regolare. Allora vale:

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Osservazione 1.40.

Assumendo che α sia di Frenet, applicando (F1) all'eq. (1.3), si ottiene:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^3 (T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)),$$

dalla quale equazione, usando che $B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)$, si ottengono subito la seguente proposizione:

Proposizione 1.41 (Formula per il versore binormale).

Sia α una curva di Frenet. Allora vale:

$$B_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|},$$

ovverosia il versore binormale è dato dalla normalizzazione di $\alpha' \times \alpha''$ al tempo t .

Osservazione 1.42 (Formula per il versore normale).

Per calcolare $N_\alpha(t)$ si sfrutta la relazione:

$$N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \times T_\alpha(t).$$

Osservazione 1.43.

Deriviamo per l'ultima volta l'eq. (1.2), e sostituendovi (F2), otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= (f'''(t) - \kappa_\alpha(t)f'(t)^3) \underline{T}_\alpha(t) \\ &\quad + (\kappa'_\alpha(t)f'(t)^3 + 3\kappa_\alpha(t)f'(t)f''(t)) \underline{N}_\alpha(t) \\ &\quad + \kappa_\alpha(t)\tau_\alpha(t)f'(t)^3 \underline{B}_\alpha(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Applicando $(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot -$ all'eq. (1.4), e usando che $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ è ortogonale a T_α , N_α , ma parallelo a B_α , ricaviamo la seguente proposizione:

Proposizione 1.44 (Formula per la torsione).

Sia α una curva di Frenet. Allora vale:

$$\tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

1.5 Proprietà di curvatura e torsione

1.5.1 Torsione e piano osculatore

La torsione rappresenta “quanto una curva è distante dall'essere un piano”. Più $\tau_\alpha(t)$ si avvicina a 0 e più la curva α in 0 è localmente simile a un piano, in particolare il piano osculatore:

Definizione 1.45 (Piano osculatore).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **piano osculatore** $\Pi_\alpha(t)$ al tempo t di α come il seguente piano affine:

$$\Pi_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t) + \text{span}(T_\alpha(t), N_\alpha(t)).$$

L'intuizione presentata precedentemente è formalizzata dal seguente risultato:

Proposizione 1.46.

Sia α una curva di Frenet con $\tau_\alpha \equiv 0$. Allora $\Pi_\alpha(t)$ è costante e la traccia di α è contenuta in Π_α .

Dimostrazione.

Possiamo assumere senza perdita di generalità che $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia p.l.a. Allora da (F3), si ricava $\dot{B}_\alpha \equiv 0$, e quindi B_α è costante. Poiché B_α è costante, la normale di $\Pi_\alpha(t)$ è costante.

Osserviamo che $T_\alpha \in B_\alpha^\perp$, da cui $T_\alpha \cdot B_\alpha = \alpha' \cdot B_\alpha = 0$. Ciò, unito al fatto che I è connesso, implica che $\alpha(t) \cdot B_\alpha$ sia costante. Pertanto $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot B_\alpha = 0$ per ogni t_0 in I su tutto I . Questa è esattamente l'equazione di appartenenza al piano $\Pi_\alpha(t_0)$: si conclude allora che $\Pi_\alpha(t)$ è costante e che la traccia di α è contenuta in Π_α . \square

1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore

La curvatura rappresenta “quanto una curva è distante dall’essere una retta”. Più $\kappa_\alpha(t)$ si avvicina a 0 e più la curva α in 0 è localmente simile a una retta.

I due seguenti risultati formalizzano proprio questa intuizione.

Proposizione 1.47.

Sia α una curva regolare con $\kappa_\alpha \equiv 0$. Allora α è contenuta in una retta affine. Viceversa, una retta affine si parametrizza con una curva avente curvatura nulla.

Dimostrazione.

Possiamo supporre senza perdita di generalità che α sia p.l.a. Allora $\kappa_\alpha \equiv 0$ implica che $\dot{T}_\alpha \equiv 0$, ovvero che T_α è costante. Pertanto $\alpha(t) = T_\alpha \cdot t + P$ per un $P \in \mathbb{R}^3$.

Il viceversa è poi immediato. \square

Definizione 1.48 (Raggio di curvatura).

Sia α una curva di Frenet. Allora si definisce il **raggio di curvatura** $R_\alpha(t)$ al tempo t di α come:

$$R_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}.$$

Definizione 1.49 (Cerchio osculatore).

Sia α una curva di Frenet. Si definisce il **cerchio osculatore** $\mathcal{C}_\alpha(t)$ al tempo t di α come il cerchio di raggio $R_\alpha(t)$ e centro $\alpha(t) + R_\alpha(t)N_\alpha(t)$ contenuto nel piano osculatore $\Pi_\alpha(t)$.

Proposizione 1.50 (Il raggio di curvatura è il raggio del cerchio che meglio approssima α in un punto).

Sia α una curva p.l.a. di Frenet. Si ponga:

$$f_{P,R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha(t) - P\|^2 - R^2.$$

Consideriamo i cerchi di raggio P e R nel piano $\Pi_\alpha(t_0)$, denotati con $\mathcal{C}(P, R)$. Si pongano le seguenti condizioni:

- $f_{P,R}(t_0) = 0$, ovvero il cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ passa per $\alpha(t_0)$;
- $f'_{P,R}(t_0) = f''_{P,R}(t_0) = 0$, ovvero il cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ approssima α in t_0 fino al secondo ordine.

Allora l’unico cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ soddisfacente le sopracitate condizioni è il cerchio osculatore $\mathcal{C}_\alpha(t_0)$ al tempo t_0 di α .

Dimostrazione.

Osserviamo che:

$$f'_{P,R}(t) = 2\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - P),$$

e quindi $f'_{P,R}(t_0) = 0$ implica $T_\alpha(t_0) \perp \alpha(t_0) - P$. Dal momento che il cerchio $\mathcal{C}(P, R)$ deve essere contenuto nel piano osculatore di $\alpha(t_0)$, allora $\alpha(t_0) - P \parallel N_\alpha(t_0)$.

Inoltre:

$$f''_{P,R}(t) = 2(\alpha''(t) \cdot (\alpha(t) - P) + \|\alpha'(t)\|^2),$$

da cui, ponendo $f''_{P,R}(t_0) = 0$, si ottiene:

$$P = \alpha(t_0) + R_\alpha(t_0)N_\alpha(t_0).$$

Infine, usando che $f_{P,R}(t_0) = 0$, si conclude che $R = R_\alpha(t_0)$. \square

1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve

La curvatura e la torsione delimitano essenzialmente un’unica curva:

Teorema 1.51 (fondamentale della teoria delle curve).

Due curve p.l.a. di Frenet $\alpha, \hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ hanno curvatura e torsione coincidente se e solo se la traccia di una curva è ottenibile dall’altra tramite movimento rigido dello spazio (i.e., isometria con parte lineare in $SO(3)$).

Parte 2

Teoria delle superfici

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe C^∞ .

Se \underline{x} è una parametrizzazione regolare o una funzione con dominio un sottinsieme di \mathbb{R}^2 , ammettiamo l'abuso di notazione $\underline{x}(P)$ per sottintendere $\underline{x}(\underline{y}^{-1}(P))$, dove \underline{y} è una parametrizzazione regolare di P sulla superficie studiata.

2.1 Definizioni preliminari

2.1.1 Parametrizzazioni regolari

Definizione 2.1 (Parametrizzazione regolare).

Si dice **parametrizzazione regolare** una mappa $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con U aperto di \mathbb{R}^2 tale che:

- \underline{x} è iniettiva;
- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ per ogni $(u, v) \in U$ (**regolarità**);
- \underline{x}^{-1} è continua.

Osservazione 2.2.

Osserviamo che $J\underline{x} = [\underline{x}_u \ \underline{x}_v]$. Allora richiedere la regolarità è equivalente a richiedere che $\text{rk}(J\underline{x})$ sia sempre massimo, ovvero:

$$\text{rk}(J\underline{x}) = 2.$$

Proposizione 2.3.

Ogni parametrizzazione regolare è un diffeomorfismo C^∞ .

Dimostrazione.

Sia $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ una parametrizzazione regolare surgettiva su Σ . Sia $(u_0, v_0) \in U$. Dal momento che \underline{x} è regolare, esiste un minore 2×2 in $J\underline{x}(u_0, v_0)$ invertibile. Sia π la proiezione da \mathbb{R}^3 sul piano $\text{span}(e_i, e_j) \cong \mathbb{R}^2$, dove i e j sono gli indici delle righe del minore rispetto a $J\underline{x}(u_0, v_0)$.

Allora $J(\pi \circ \underline{x})(u_0, v_0)$ è invertibile, e per il Teorema di invertibilità locale, $\pi \circ \underline{x}$ è localmente invertibile. Dacché \underline{x}^{-1} è localmente uguale a $(\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi^{-1}$, che è composizione di funzioni C^∞ , si ricava che \underline{x} è un diffeomorfismo C^∞ locale. Dal momento che \underline{x} è però iniettiva, si ricava che è anche un diffeomorfismo C^∞ . \square

2.1.2 Superficie

Definizione 2.4 (Superficie).

Una **superficie** è un sottinsieme Σ di \mathbb{R}^3 tale per cui ogni punto P di Σ ammette una parametrizzazione regolare \underline{x}_P la cui immagine sia contenuta in Σ e che sia intorno di P in Σ . Ci riferiremo a \underline{x}_P come a una **parametrizzazione regolare per P** .

Osservazione 2.5.

Chiaramente, se $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione regolare, allora $\underline{x}(U)$ è una superficie.

Proposizione 2.6.

Σ è una superficie se e solo se ogni suo punto ammette una parametrizzazione regolare della forma $\underline{x} : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$.

Dimostrazione.

Siccome ogni parametrizzazione regolare $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ ha come dominio un aperto, possiamo restringerci a una palla di raggio ε di $\underline{x}^{-1}(P)$. Tramite traslazione possiamo infine riportare $\underline{x}^{-1}(P)$ al centro, ottenendo una parametrizzazione del tipo desiderato. \square

Proposizione 2.7.

Se Σ è una superficie, una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua se e solo se $f \circ \underline{x}$ è una funzione continua per ogni parametrizzazione regolare \underline{x} di un punto di Σ .

Dimostrazione.

Deriva dal fatto che una funzione è continua se e solo se è localmente continua. \square

2.2 Classi fondamentali di superfici

2.2.1 Superfici di rotazione

Definizione 2.8 (Superficie di rotazione).

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata della forma $(a(t), 0, b(t))$ tale che α è regolare e omeomorfismo locale. Si definisce allora la **superficie di rotazione** (intorno all'asse z) di α come l'immagine della seguente parametrizzazione canonica:

$$\underline{x}(u, v) = (a(u) \cos(v), a(u) \sin(v), b(u)).$$

Definizione 2.9 (Paralleli e meridiani).

Sia Σ una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica \underline{x} . Allora l'immagine della curva $\alpha_{u_0}(t) = \underline{x}(u_0, t)$ è detta **parallelo**, mentre quella della curva $\gamma_{v_0}(t) = \underline{x}(t, v_0)$ è detta **meridiano**.

I paralleli sono dunque le intersezioni della superficie con i piani della forma $\{z = k\}$, mentre i meridiani lo sono rispetto ai piani della forma $\{ax + by = 0\}$.

Proposizione 2.10.

Una superficie di rotazione è effettivamente una superficie, poiché la sua parametrizzazione canonica è regolare.

2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello

Proposizione 2.11 (Il grafico di una funzione C^∞ a valori reali con dominio $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è una superficie).

Il grafico Γ_f di una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è parametrizzato come $\underline{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, ed è dunque una superficie.

Definizione 2.12.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ una funzione liscia. Allora si dice che $a \in f(A)$ è un **valore regolare** per f se:

$$\nabla f(p) \neq 0, \quad \forall p \in f^{-1}(a).$$

Proposizione 2.13.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ una funzione liscia. Allora, se a è un valore regolare per f , $f^{-1}(a)$ è una superficie ed è detta **superficie di livello a rispetto a f** .

Dimostrazione.

La tesi discende direttamente come applicazione del Teorema della funzione implicita. Infatti, se a è un valore regolare, $f^{-1}(a)$ è localmente un grafico su ogni suo punto. Allora, per la Proposizione 2.11, $f^{-1}(a)$ è una superficie. \square

2.3 Piano tangente e orientabilità

2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse

Definizione 2.14 (Funzione di transizione).

Siano $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni regolari per P su una superficie Σ aventi stessa immagine. Si definisce allora la **funzione di transizione** $f_{\underline{x}, \underline{y}} : U \rightarrow U'$ da \underline{x} a \underline{y} come:

$$f_{\underline{x}, \underline{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{y}^{-1} \circ \underline{x},$$

in modo tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma & \\ \underline{x} \nearrow & & \nwarrow \underline{y} \\ U & \xrightarrow{f_{\underline{x}, \underline{y}}} & U' \end{array}$$

Proposizione 2.15.

Una funzione di transizione $f_{\underline{x}, \underline{y}}$ è un diffeomorfismo C^∞ .

Dimostrazione.

Dal momento che \underline{x} e \underline{y} sono diffeomorfismi C^∞ per la Proposizione 2.3, essendo f composizione di variazioni di queste, anche f lo è. \square

Proposizione 2.16.

Siano \underline{x} e \underline{y} due parametrizzazioni regolari per P su una superficie Σ . Allora vale:

$$\text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)) = \text{span}(\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)).$$

Dimostrazione.

Possiamo assumere senza perdita di generalità che le immagini di \underline{x} e \underline{y} (basta prendere l'intersezione delle immagini).

Posto allora $f_{\underline{x}, \underline{y}}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$, vale $\underline{x}(s, t) = \underline{y}(u(s, t), v(s, t))$, e quindi:

$$\begin{cases} \underline{x}_s(P) = u_s(P) \cdot \underline{y}_u(P) + v_s(P) \cdot \underline{y}_t(P), \\ \underline{x}_t(P) = u_t(P) \cdot \underline{y}_u(P) + v_t(P) \cdot \underline{y}_t(P). \end{cases}$$

Dal momento che $Jf_{\underline{x}, \underline{y}}(P)$ ha rango 2, allora il precedente sistema induce un cambio di base da $\{\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)\}$ a $\{\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)\}$, da cui la tesi. \square

Definizione 2.17 (Piano tangente).

Sia Σ una superficie. Allora, se P è un punto di Σ , si definisce il **piano tangente** $T_P \Sigma$ di P rispetto a Σ come:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)),$$

dove \underline{x} è una qualsiasi parametrizzazione regolare di P .

2.3.2 Versori normali e orientabilità

Definizione 2.18 (Versore normale su \underline{x}).

Sia \underline{x} una parametrizzazione regolare di un punto P su una superficie Σ . Definiamo il **versore normale** $n_{\underline{x}}(P)$ come:

$$n_{\underline{x}}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}.$$

Proposizione 2.19.

Due parametrizzazioni regolari $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$ con stessa immagine hanno stessa normale in ogni punto se e solo se la funzione di transizione ha in ogni punto jacobiano di determinante positivo.

Dimostrazione.

Segue dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16. \square

Definizione 2.20 (Parametrizzazioni regolari compatibili).

Due parametrizzazioni regolari $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$ si dicono **compatibili** se l'intersezione delle immagini è vuota o se hanno stessa normale sull'intersezione delle immagini.

Definizione 2.21 (Superficie orientabile).

Una superficie Σ si dice **orientabile** se è ricoperta da parametrizzazioni regolari a due a due compatibili.

Proposizione 2.22.

Una superficie Σ è orientabile se e solo se esiste una funzione continua $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui $\underline{n}(P)$ sia unitario e perpendicolare a $T_P\Sigma$ per ogni punto P di Σ .

Corollario 2.23.

Ogni superficie Σ di livello ℓ rispetto a f , per f liscia e ℓ regolare, è orientabile.

Dimostrazione.

Il gradiente $\nabla f / \|\nabla f\|$ è un campo vettoriale unitario e ortogonale a $T_P\Sigma$ per ogni punto P . Si conclude per la Proposizione 2.22. \square

\triangle **Attenzione.** Ogni superficie è localmente orientabile!

È sufficiente prendere per ogni punto come ricoprimento la sua stessa parametrizzazione regolare.

Parte 3

Curve su superfici

3.1 Piano tangente e derivata direzionale

3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare

Proposizione 3.1.

Sia $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare e sia $\alpha : I \rightarrow \underline{x}(U)$ una curva. Allora α si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t)),$$

con $u(t), v(t) : I \rightarrow U$ funzioni di classe C^∞ .

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla Proposizione 2.3. \square

3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve

Proposizione 3.2 (Il piano tangente è l'insieme delle velocità delle curve sulla superficie considerata).

Sia Σ una superficie. Allora vale:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha'(P) \mid \alpha : I \rightarrow \Sigma \text{ curva con } P \in \alpha(I) \}.$$

Dimostrazione.

Sia $P = \underline{x}(0,0)$, dove $\underline{x} : B_\varepsilon \rightarrow \Sigma$ è una parametrizzazione regolare di P . È sufficiente osservare che ogni vettore tangente è una combinazione lineare della forma $\lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$; allora la curva $\alpha(t) = \underline{x}(t\lambda, t\mu)$ ha velocità $\lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$ in P . \square

3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale

Definizione 3.3 (Funzioni C^∞ sulla superficie).

Sia Σ una superficie. Una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^∞ se per ogni parametrizzazione regolare \underline{x} di ogni punto $P \in \Sigma$, $f \circ \underline{x}$ è di classe C^∞ .

Proposizione 3.4.

Sia Σ una superficie. Sia $P \in \Sigma$ e venga dato $\xi \in T_P \Sigma$. Sia data una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se α, β sono due curve su Σ passanti per P al tempo 0 con $\alpha'(0) = \beta'(0) = \xi$, allora:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dimostrazione.

Sia \underline{x} una parametrizzazione regolare di P rispetto a Σ . Allora, per la Proposizione 3.1, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ e $\beta(t) = (p(t), q(t))$, con u, v, p, q lisce.

Pertanto:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ \underline{x})(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= (f \circ \underline{x})_u u'(0) + (f \circ \underline{x})_v v'(0). \end{aligned}$$

Osserviamo che $(u'(0), v'(0)) = (p'(0), q'(0))$, dal momento che rappresentano le coordinate in U del vettore ξ . La tesi segue allora dal fatto che il membro a destra diventa $(f \circ \beta)'(0)$. \square

Definizione 3.5 (Derivata direzionale).

Sia Σ una superficie. Sia $P \in \Sigma$ e venga dato $\xi \in T_P \Sigma$. Allora, data una funzione $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$, la derivata direzionale $D_\xi f(P)$ è definita come:

$$D_\xi f(P) \stackrel{\text{def}}{=} (f \circ \alpha)'(0),$$

dove α è una qualsiasi curva su Σ passante per P al tempo 0 con $\alpha'(0) = \xi$.

3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale

3.2.1 Operatore forma e prime proprietà

Proposizione 3.6.

Sia \underline{x} una parametrizzazione regolare di un punto P su Σ . Allora $D_\xi \underline{n}(P) \in T_P \Sigma$, dove \underline{n} è la normale indotta da \underline{x} localmente.

Dimostrazione.

Sia α una curva su Σ passante per P al tempo 0 con $\alpha'(0) = \xi$. Osserviamo che $\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1$, e quindi:

$$2(D_\xi \underline{n}(P) \cdot \underline{n}(P)) = 0,$$

da cui la tesi. \square

Definizione 3.7 (Operatore forma).

Data una \underline{x} una parametrizzazione regolare di un punto P su Σ , si definisce **operatore forma** l'endomorfismo $S_P(\xi) : T_P\Sigma \rightarrow T_P\Sigma$ tale per cui:

$$S_P(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -D_\xi \underline{n}(P).$$

Osservazione 3.8.

Osserviamo che l'operatore forma è "essenzialmente unico", dal momento che, al variare delle parametrizzazioni, può solo cambiare segno (quello della normale). Tutte le proprietà che ci interessano sono invarianti per cambio di segno, e quindi la scrittura S_P è "ben definita".

Lemma 3.9.

Sia P un punto su una superficie Σ . Sia \underline{x} una parametrizzazione di P . Allora per $\{i, j\} \subseteq \{u, v\}$ vale:

$$S_P(\underline{x}_i) \cdot \underline{x}_j(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{ij}(P).$$

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità assumiamo $P = \underline{x}(0, 0)$. Sia \underline{n} la normale indotta dalla parametrizzazione \underline{x} . Allora vale:

$$\begin{cases} \underline{n} \cdot \underline{x}_u = 0, \\ \underline{n} \cdot \underline{x}_v = 0. \end{cases}$$

Derivando le due equazioni del sistema lungo la curva $\alpha(t) = \underline{x}(t, 0)$, otteniamo:

$$\begin{cases} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uu}(P), \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uv}(P), \end{cases}$$

dove nell'ultima espressione si è applicato il Teorema di Schwarz per sostituire \underline{x}_{uv} a \underline{x}_{vu} . Analogamente si ottiene la formula per gli altri due casi. \square

Proposizione 3.10 (L'operatore forma è autoaggiunto).

Sia P un punto su una superficie Σ . Allora l'operatore forma S_P è autoaggiunto.

Dimostrazione.

Per dimostrare che S_P è autoaggiunto è sufficiente mostrare che:

$$S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v = \underline{x}_u \cdot S_P(\underline{x}_v),$$

dacché $\{\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)\}$ è una base di $T_P\Sigma$. Questo però è immediato dal Lemma 3.9 e dal Teorema di Schwarz. \square

3.2.2 I e II forma fondamentale

Definizione 3.11 (I forma fondamentale).

Sia Σ una superficie. Si definisce **I forma fondamentale** di Σ in P il prodotto scalare $I_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definito come:

$$I_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot w,$$

ovverosia è il prodotto canonico di \mathbb{R}^3 ristretto a $T_P\Sigma$.

Definizione 3.12 (II forma fondamentale).

Sia Σ una superficie. Si definisce **II forma fondamentale** di Σ in P il prodotto scalare $\Pi_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definito come:

$$\Pi_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} I_P(S_P(v), w) = S_P(v) \cdot w.$$

Osservazione 3.13.

Osserviamo che la II forma fondamentale è ben definita dal momento che S_P è autoaggiunto per la Proposizione 3.10

Osservazione 3.14.

Scelta una parametrizzazione \underline{x} di P , le due forme fondamentali e l'operatore forma si rappresentano canonicamente come matrici 2×2 nella base $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$.

Definizione 3.15 (I forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione \underline{x} di P e data la rappresentazione matriciale di I_P rispetto a \underline{x} , definiamo E , F e G (relativi a P) di modo che:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \\ \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v & \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.16 (II forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione \underline{x} di P e data la rappresentazione matriciale di Π_P rispetto a \underline{x} , definiamo ℓ , m , n (relativi a P) di modo che:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u & S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v & S_P(\underline{x}_v) \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.17 (Formola per ℓ , m e n).

Gli elementi della rappresentazione matriciale di Π_P rispetto a \underline{x} si calcolano come segue:

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}, \quad m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}, \quad n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv},$$

dove \underline{n} è la normale indotta da \underline{x} .

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Lemma 3.9. \square

Proposizione 3.18.

Scelta una parametrizzazione \underline{x} di P , le rappresentazioni matriciali di I_P , Π_P e S_P rispetto a \underline{x} soddisfano la seguente relazione:

$$\Pi_P = I_P \cdot S_P.$$

In particolare vale:

$$\det(S_P) = \frac{\det(\Pi_P)}{\det(I_P)} = \frac{\ell n - m^2}{EF - G^2}.$$

3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale

Proposizione 3.19.

Sia π un piano in \mathbb{R}^3 passante per un punto p di una superficie Σ . Se $\pi \neq P + T_P\Sigma$, allora $\pi \cap \Sigma$ è localmente parametrizzato come una curva regolare intorno a P .

Dimostrazione.

Sia $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ è una parametrizzazione regolare di P e sia π il piano associato all'equazione $(a, b) \cdot \underline{x} = d$. Assumiamo che $P = \underline{x}(u_0, v_0)$.

Consideriamo la funzione liscia f a valori reali tale per cui:

$$f(u, v) = (a, b) \cdot \underline{x}(u, v).$$

Osserviamo innanzitutto che $f^{-1}(d) = \pi \cap \underline{x}(U)$. Mostriamo che $f^{-1}(d)$ è una curva regolare intorno a P mostrando che d è un valore regolare per f in (u_0, v_0) :

$$\nabla f(u_0, v_0) = (a, b) \cdot (\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)).$$

Dal momento che π è diverso da $P + T_P\Sigma$, la normale (a, b) del piano π non può essere ortogonale a $(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P))$, e quindi $\nabla f(u_0, v_0) \neq 0$, da cui la tesi. \square

Osservazione 3.20.

Se π è un piano con $\pi \neq P + T_P\Sigma$, allora la curva che parametrizza localmente in P l'intersezione $\pi \cap \Sigma$ ha come versore tangente uno dei due possibili vettori unitari della giacitura di $\pi \cap (P + T_P\Sigma)$.

In particolare esiste una curva p.l.a. $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ che parametrizza l'intersezione $\pi \cap \Sigma$ localmente in P con $\alpha(0) = P$ e $\alpha'(0) = w$, dove w è il versore sopracitato.

Per tale curva α vale $\underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0$, dove \underline{n} è una normale (locale). Quindi, derivando:

$$S_w P \cdot w = \underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0),$$

e quindi la quantità $\underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0)$ non dipende da α .

Scegliendo la normale di π in $T_P\Sigma$, $\dot{T}_\alpha(0)$ è parallelo a $\underline{n}(P)$. Ora possono esservi tre casi:

1. Se $\dot{T}_\alpha(0)$ è nullo, allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P) = 0.$$

2. Se $\dot{T}_\alpha(0)$ è parallelo positivamente a $\underline{n}(P)$, allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P).$$

3. Se $\dot{T}_\alpha(0)$ è parallelo negativamente a $\underline{n}(P)$, allora:

$$S_w P \cdot w = -\kappa_\alpha(P).$$

Queste osservazioni ci permettono di dare un'ottima interpretazione geometrica al prodotto $S_w P \cdot w$, come segue:

Definizione 3.21 (Curvatura normale).

Sia P un punto su una superficie Σ . Dato un vettore unitario $w \in T_P\Sigma$, si definisce la **curvatura normale** $\kappa_n(P, w)$ in P di direzione w come:

$$\kappa_n(P, w) \stackrel{\text{def}}{=} S_w P \cdot w,$$

che è quindi, a meno di segno, per l'osservazione precedente, la curvatura di una curva α passante per P e ottenuta come intersezione del piano tangente affine $P + T_P\Sigma$ e di un

piano π ad esso ortogonale, in modo tale che la giacitura di $\pi \cap P + T_P\Sigma$ sia generata da w .

Data α su Σ , definiamo la sua curvatura normale κ_n in P come:

$$\kappa_{\alpha, n} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_n(P, T_\alpha(P)).$$

Osservazione 3.22.

È immediato osservare che le curvature normali sono “invarianti per rototraslazioni”, ovvero sono le stesse nei punti e nei vettori associati.

3.2.4 Direzioni e curvature principali, formula di Eulero

Definizione 3.23 (Direzioni e curvature principali).

Sia P un punto su una superficie Σ . Gli autospazi dell'operatore forma S_P sono detti **direzioni principali in P** , mentre gli autovalori sono detti **curvature principali in P** , e sono usualmente denotati come κ_1 e κ_2 .

Osservazione 3.24.

Calcolare la curvatura normale $\kappa_n(P, v) = S_P v \cdot v$ su un S_P -autovettore unitario v restituisce la curvatura principale ad esso relativo.

Osservazione 3.25.

Poiché S_P è autoaggiunto, S_P è ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero esiste una base ortonormale di $T_P\Sigma$ composta da S_P -autovettori.

Osserviamo inoltre che le curvature principali in P sono distinte se e solo se S_P non è un multiplo dell'identità.

Proposizione 3.26 (Formula di Eulero).

Sia P un punto su una superficie Σ con S_P -autospazi distinti. Se $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di S_P -autovettori con v_1 relativo alla curvatura κ_1 e v_2 relativo a κ_2 , allora vale la **formula di Eulero**:

$$\kappa_n(P, w_\theta) = \cos(\theta)^2 \kappa_1 + \sin(\theta)^2 \kappa_2, \quad (\text{Eulero})$$

dove $w_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\theta) \kappa_1 + \sin(\theta) \kappa_2$.

Dimostrazione.

Si tratta di una verifica diretta che sfrutta la definizione di $\kappa_n(P, w_\theta)$. \square

Proposizione 3.27.

Sia P un punto su una superficie Σ . Se $\kappa_1 \leq \kappa_2$ sono le due curvature principali di P (eventualmente coincidenti), allora tutte le curvature normali relative a P sono contenute in $[\kappa_1, \kappa_2]$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente da (Eulero). \square

3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti

Definizione 3.28 (Curvatura gaussiana).

Sia P un punto su una superficie Σ . Si definisce allora la **curvatura gaussiana** $\kappa(P)$ nel punto P come il prodotto delle sue curvature principali, ovvero sia:

$$\kappa(P) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(S_P).$$

Proposizione 3.29 (Formula per la curvatura gaussiana).
Sia P un punto su una superficie Σ . Vale allora la seguente formula:

$$\kappa(P) = \frac{\ell n - m}{EG - F^2}.$$

Dimostrazione.

Segue direttamente dalla Proposizione 3.18. \square

Proposizione 3.30 (Curvatura media).

Sia P un punto su una superficie Σ . Si definisce allora la **curvatura media** $H(p)$ nel punto P come la media delle sue curvature principali, ovvero sia:

$$H(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr}(S_P).$$

Osservazione 3.31.

La curvatura gaussiana rimane invariata cambiando la "normale locale" presa, mentre quella media può cambiare al massimo di segno. In particolare, che una delle due sia nulla è invariante per cambio di parametrizzazione locale.

Definizione 3.32 (Superfici piatte e minimi).

Sia P un punto su una superficie Σ . Una superficie si dice **piatta** se $K \equiv 0$ su tutta Σ , e **minima** se invece $H \equiv 0$.

Definizione 3.33 (Punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari).

Sia P un punto su una superficie Σ . Allora P si dice:

- **ellittico**: se $\kappa(P) > 0$ (tutte le curvature normali sono concordi),
- **iperbolico**: se $\kappa(P) < 0$ (esistono curvature normali discordi),
- **parabolico**: se $\kappa(P) = 0$, ma $S_P \neq 0$ (tutte le curvature normali sono concordi, e ne esiste una nulla),
- **planare**: se $S_P = 0$ (tutte le curvature normali sono nulle).

Proposizione 3.34.

Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compatta non vuota. Allora Σ ammette un punto ellittico.

Dimostrazione.

È sufficiente studiare localmente un punto di norma massima di Σ e mostrare che in tal punto la curvatura gaussiana è positiva. \square

Proposizione 3.35.

Sia P un punto su una superficie Σ .

Se P è un punto ellittico, allora esiste un intorno di P su Σ contenuto interamente in uno dei due semispazi indotti dal taglio di \mathbb{R}^3 tramite $T_P\Sigma$.

Se P è iperbolico, allora un tale intorno invece non può esistere.

3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium

3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche

Proposizione 3.36.

Data una parametrizzazione $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, si ha $\ell(\bar{\alpha}) = \ell(\underline{x} \circ \bar{\alpha})$ per ogni curva $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow U$ se e solo se $I_P = I_2$ per ogni punto P in $\underline{x}(U)$.

In altre parole, \underline{x} preserva le lunghezze delle curve se e solo se $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$.

Dimostrazione.

Sia P un punto di $\underline{x}(U)$ con $P = \underline{x}(u_0, v_0)$. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si può scegliere una curva $\bar{\alpha}$ su U con $\bar{\alpha}(0) = (u_0, v_0)$ e $\bar{\alpha}'(0) = (\lambda, \mu)$.

Preservare le lunghezze di ogni curva vuol dire anche preservare le lunghezze di ogni porzione di $\bar{\alpha}$. Questo implica $\|\bar{\alpha}'\| = \|\alpha'\|$, dove $\alpha = \underline{x} \circ \bar{\alpha}$.

Se $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$, allora:

$$\alpha'(0) = \lambda \underline{x}_u(P) + \mu \underline{x}_v(P).$$

L'arbitrarietà di λ e μ implica che la mappa $(a, b) \mapsto a \underline{x}_u(P) + b \underline{x}_v(P)$ sia un'isometria per ogni punto P , e quindi che I_P sia l'identità I_2 . \square

Definizione 3.37 (Isometria locale).

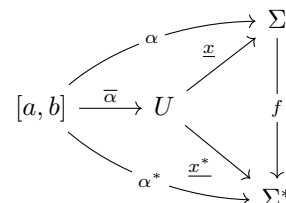
Una parametrizzazione regolare \underline{x} si dice **isometria locale** se su tutti i punti di $\underline{x}(U)$ si ha $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$ tramite \underline{x} .

Definizione 3.38 (Superfici localmente isometriche).

Siano Σ e Σ^* due superfici di \mathbb{R}^3 . Siano $P \in \Sigma$ e $P^* \in \Sigma^*$. Si dice che Σ e Σ^* sono **localmente isometriche** intorno a P e P^* se esistono $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ parametrizzazione di P , e $\underline{x}^* : U \rightarrow \Sigma^*$ parametrizzazione di P^* con $E \equiv E^*$, $F \equiv F^*$ e $G \equiv G^*$ su U .

Osservazione 3.39.

Passare da un intorno di una superficie a un intorno di una superficie ad essa localmente isometrica conserva le lunghezze.



Se α è una curva su Σ , allora si può fattorizzare come $\underline{x} \circ \bar{\alpha}$ con $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ (vd. Proposizione 3.1); analogamente si fattorizza la curva ottenuta sulla superficie Σ^* come $\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \bar{\alpha}$.

La tesi è equivalente a mostrare che $f \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \underline{x}$ conserva le velocità delle curve. Ma questo è vero, infatti:

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \bar{\alpha}'(t)^\top \mathbf{I}_P \bar{\alpha}'(t) = \bar{\alpha}'(t)^\top \mathbf{I}_P^* \bar{\alpha}'(t) = \|(\alpha^*)'(t)\|^2,$$

e $\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_P^*$.

Osservazione 3.40.

Una superficie Σ^* ottenuta come rototraslazione o riflessione di una superficie Σ è localmente isometrica a Σ nei punti associati.

3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze

Osservazione 3.41.

Osserviamo che, se \underline{x} è una parametrizzazione regolare, allora $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n}\}$ – dove \underline{n} è la normale indotta da \underline{x} – è una base di \mathbb{R}^3 in ogni punto. Pertanto anche \underline{x}_{uu} , \underline{x}_{uv} e \underline{x}_{vv} dovranno scriversi in questa base.

Definizione 3.42 (Simbolo di Christoffel).

Sia \underline{x} una parametrizzazione regolare. Si indica con il **simbolo di Christoffel** Γ_{ij}^k il coefficiente di \underline{x}_k del vettore \underline{x}_{ij} , dove $\{i, j, k\} \subseteq \{u, v\}$.

Osservazione 3.43.

Si osserva subito che vale la seguente formula:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ij} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{ij} \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^u \\ \Gamma_{ij}^v \end{pmatrix},$$

dove \mathbf{I} è la I forma fondamentale in forma matriciale.

Teorema 3.44 (Theorema egregium di Gauss).

Sia Σ una superficie di \mathbb{R}^3 . Allora la sua curvatura gaussiana κ è localmente esprimibile in funzione di E, F, G e le loro derivate.

Dimostrazione.

La dimostrazione segue questo schema:

- (i.) Dall'osservazione precedente, i simboli di Christoffel si scrivono in funzione degli $\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{ij}$ tramite la I forma fondamentale.
- (ii.) I $\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{ij}$ si scrivono utilizzando le derivate di E, F e G , e quindi i simboli di Christoffel si scrivono in termini di E, F, G e derivate.
- (iii.) Il termine $\ell d - mb$, dove b e d sono gli elementi della seconda riga della II forma fondamentale, si scrive come $E \cdot \kappa$.
- (iv.) Sviluppando \underline{x}_{uuv} e \underline{x}_{uvu} e applicando il Teorema di Schwarz, si ottiene un'espressione di $\ell d - mb$ in termini dei simboli di Christoffel.

- (v.) Allora $\ell d - mb$ si scrive in termini di E, F e G e le loro derivate per (ii.) e (iv.), e così anche κ per (iii.).

□

Corollario 3.45.

Due superfici localmente isometriche hanno stessa curvatura gaussiana nei punti associati.

Corollario 3.46.

Un piano e la sfera non sono localmente isometrici.

3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali

3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante

Definizione 3.47 (Campo vettoriale (tangente)).

Sia Σ una superficie. Un **campo vettoriale** (tangente) su Σ è una mappa liscia $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale per cui $X(P) \in T_P \Sigma$ per ogni $P \in \Sigma$.

Definizione 3.48 (Derivata covariante).

Sia X un campo vettoriale di Σ . Si definisce allora la sua **derivata covariante** in direzione v su un punto P come:

$$\nabla_v X(P) \stackrel{\text{def}}{=} (D_v X(P))^\top \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{T_P \Sigma}(D_v X(P)).$$

Osservazione 3.49.

In realtà, per definire la derivata covariante di X in direzione v è sufficiente che X sia definita lungo una curva α passante per P con velocità v .

3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo

Definizione 3.50 (Campo parallelo).

Un campo vettoriale (tangente) X su Σ si dice **parallelo lungo una curva** $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ se:

$$\nabla_{\alpha'(t)} X(\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Osservazione 3.51.

Sia X un campo vettoriale e sia α una curva su Σ . Poiché X è una mappa liscia sulla superficie Σ , $X \circ \alpha$ si scrive come:

$$X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\underline{x}_v(\alpha(t)).$$

Dunque, usando la definizione di campo parallelo, X è parallelo lungo α se e solo se soddisfa il seguente sistema, detto **sistema delle equazioni del trasporto parallelo**:

$$\text{(TP): } \begin{cases} a' + a(\Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v') + b(\Gamma_{vu}^u v' + \Gamma_{uv}^u u') = 0, \\ b' + a(\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') + b(\Gamma_{vu}^v v' + \Gamma_{uv}^v u') = 0, \end{cases}$$

dove $\alpha(t) = (u(t), v(t))$.

Proposizione 3.52 (Esistenza e unicità del trasporto parallelo).

Sia $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ una curva su una superficie Σ . Sia X_0 un vettore di $T_{\alpha(0)} \Sigma$. Allora esiste un unico campo vettoriale X parallelo lungo α tale per cui $X(\alpha(0)) = X_0$.

Dimostrazione.

Sia $\{\underline{x}_P\}_{P \in \alpha([0,1])}$ una famiglia di parametrizzazioni. Per compattezza di $[0, 1]$ e continuità di α , anche $\alpha([0, 1])$ è compatto. Dunque $\alpha(I)$ è contenuto in un numero finito delle parametrizzazioni della famiglia scelta in partenza.

È sufficiente dimostrare ora la proposizione sfruttando un'unica parametrizzazione e poi "incollando" i campi ottenuti. Tuttavia questo è ovvio dal momento per il Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali applicato al sistema dell'Osservazione 3.51. \square

Definizione 3.53.

L'immagine in $\alpha(1)$ del campo X ottenuto dalla proposizione precedente per estensione parallela da un vettore $X_0 \in T_{\alpha(0)}\Sigma$ si dice ottenuta per **trasporto parallelo** sulla curva α .

Osservazione 3.54.

Dal momento che il sistema delle equazioni del trasporto parallelo è lineare e omogeneo, combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni, e quindi l'operazione di trasporto parallelo è lineare.

Proposizione 3.55 (Il trasporto parallelo conserva le distanze).

L'operazione di trasporto parallelo conserva il prodotto scalare dei vettori, e quindi anche le distanze. Inoltre, manda basi di un piano tangente all'altro mantenendone l'orientazione.

Dimostrazione.

Siano X e Y due campi paralleli lungo una stessa curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$. Si definisce la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in modo tale che:

$$f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)).$$

Derivando f in t otteniamo:

$$f'(t) = D_{\alpha'(t)}X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot D_{\alpha'(t)}Y(\alpha(t)).$$

Poiché X e Y sono paralleli lungo α , le due derivate direzionali sono parallele alla normale (locale) in $\alpha(t)$, mentre i termini non derivati ne sono perpendicolari. Dunque $f'(t)$ è nullo, e quindi il prodotto scalare si conserva.

Consideriamo ora la funzione $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

$$\varphi(t) = (X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))) \cdot \underline{n}.$$

Poiché φ è continua e non può essere $\varphi(t) = 0$ ad alcun tempo t , essendo $[0, 1]$ connesso, deve essere necessariamente $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$ su tutto $[0, 1]$, da cui la tesi. \square

3.5 Geodetiche

3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo

Definizione 3.56.

Una curva α su una superficie Σ si dice **geodetica** se il campo α' è parallelo lungo α , ovvero sia se:

$$\nabla_{\alpha'}\alpha' = (\alpha'')^\top = 0.$$

Osservazione 3.57.

Per le geodetiche è necessario specializzare correttamente le equazioni del trasporto parallelo. Ponendo $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$, otteniamo:

$$\text{(Geo): } \begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2 = 0, \end{cases}$$

Proposizione 3.58.

Sia α una geodetica su Σ . Allora $\|\alpha'\|$ è costante.

Dimostrazione.

Derivando $\alpha' \cdot \alpha'$ si ottiene $2(\alpha'' \cdot \alpha')$, che però è nullo dal momento che $\alpha'' \perp T_{\alpha}\Sigma$, da cui la tesi. \square

3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale

Proposizione 3.59.

Sia Σ una superficie e q un suo punto. Allora per ogni $v \in T_q\Sigma$ esiste $\varepsilon > 0$ e un'unica geodetica $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ tale per cui $\gamma_v(0) = q$ e $\gamma'_v(0) = v$.

Dimostrazione.

Segue dall'applicazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale di una soluzione per un sistema di equazioni differenziali al sistema dell'Osservazione 3.57. \square

Osservazione 3.60.

Possiamo in realtà assumere che $\gamma_v(t)$ sia definita su $[0, 1]$ senza alcuna perdita di generalità. Infatti, se $\gamma_v(t)$ è definita su $(-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva $\gamma_v(st)$ è ben definita per $t \in [0, 1]$, dove $s \in (0, \varepsilon)$. Per unicità di $\gamma_{sv}(t)$, dal momento che $\gamma_v(st)$ ne rispetta le condizioni iniziali, si ha $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$.

Osservazione 3.61.

Per compattezza di $\{v \in T_P\Sigma \mid \|v\| = 1\}$, esiste un ε_{\min} per il quale per ogni vettore v di norma $\|v\| < \varepsilon_{\min}$ possiamo considerare la geodetica $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$.

Dal Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali è ben definita e liscia allora l'applicazione $v \mapsto \gamma_v(1)$, dove $\|v\| < \varepsilon_{\min}$.

Definizione 3.62 (Mappa esponenziale).

Sia P un punto su una superficie Σ e sia \underline{x} una sua parametrizzazione. Sia:

$$U_P = \{v \in T_P\Sigma \mid \|v\| < \varepsilon_{\min}\},$$

dove ε_{\min} è definito secondo l'Osservazione 3.61.

Si definisce allora la **mappa esponenziale** $\exp_P : U_P \rightarrow \underline{x}(U_P)$ come l'applicazione con la seguente proprietà:

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

Definizione 3.63 (Intorno normale).

Sia P un punto su una superficie Σ e sia \underline{x} una sua parametrizzazione. Si dice che l'immagine $N_P \stackrel{\text{def}}{=} \exp_P(U_P)$ è un **intorno normale** di P .

Osservazione 3.64.

Una volta ben definita la mappa esponenziale \exp_P , possiamo riparametrizzare Σ utilizzando \exp_P , definendo sul suo dominio naturale l'applicazione:

$$\underline{y}(u, v) = \exp_P(u\underline{e}_1 + v\underline{e}_2),$$

dove $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ è una base ortonormale di $T_P\Sigma$.

Questa mappa, detta indotta dalle **coordinate normali**, soddisfa alcune importanti proprietà:

- $\underline{y}(0, 0) = P$,
- $\underline{y}_u(0, 0) = \frac{d}{dt} \exp_P(t\underline{e}_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{t\underline{e}_1}(1)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{\underline{e}_1}(u)|_{t=0} = \underline{e}_1$,
- $\underline{y}_v(0, 0) = \dots = \underline{e}_2$.

3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze

Lemma 3.65 (Gauss, le geodetiche sono ortogonali ai cerchi indotti dalla mappa esponenziale).

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ una base ortonormale di $T_P\Sigma$. Sia ε lo stesso valore che definisce U_P . Sia $v_k : [0, 2\pi] \rightarrow U_P$ la curva definita come:

$$v_k(t) = k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2), \quad k < \varepsilon.$$

Allora ogni geodetica γ_w è ortogonale a $\exp_P \circ v_k$ per $k < \varepsilon$ e $w \in U_P$.

Dimostrazione.

Sia $\underline{x} : [0, 1] \cdot \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ definita come:

$$\underline{x}(u, t) = \exp_P(u \cdot v_k(t)) = \gamma_{v_k(t)}(u).$$

Dimostriamo la tesi mostrando che \underline{x}_u (che parametrizza le geodetiche) e \underline{x}_t (che parametrizza i cerchi) sono ortogonali.

Osserviamo che:

$$(\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t)_u = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_t + \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{tu}.$$

Inoltre $\underline{x}_{uu}(u, t_0) = (\gamma_{v_k(t_0)}(u))''$ è normale a $T_P\Sigma$ dacché $\gamma_{v_k(t_0)}$ è una geodetica, e quindi $\underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_t = 0$.

Ancora $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = \|v_k(t)\|^2 = k^2$ è costante, e quindi, derivando $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u$ per t , si ottiene anche $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ut} = 0$.

Pertanto $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t$ è costante lungo u . È sufficiente allora mostrare la tesi per $u = 0$:

$$\underline{x}(0, t) = P \implies \underline{x}_t(0, t) = 0,$$

e quindi $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t = 0$ lungo $u = 0$. \square

Corollario 3.66 (Le geodetiche minimizzano localmente le distanze).

Sia $P' = \gamma_v(1)$ con $v \in U_P$ un punto distinto da P . Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow N_P$ è una curva liscia con $\alpha(0) = P$ e $\alpha(1) = P'$, allora:

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma_v).$$

Dimostrazione.

Parametrizziamo N_P usando \underline{x} come definita nella dimostrazione del Lemma di Gauss (3.65) per un $k = \|v\|$.

Per la Proposizione 3.1, α si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), \tau(t)),$$

con u e τ lisce. Allora, derivando α e applicando il Lemma di Gauss (3.65) si ottiene:

$$\|\alpha'\|^2 \geq (u')^2 \|v\|^2.$$

Allora:

$$\ell(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\| dt \geq \|v\| (u(1) - u(0)) = \|v\| = \ell(\gamma_v),$$

dove si è usato che $u(0) = 0$ (P nelle coordinate normali corrisponde a $(0, 0)$) e che $u(1) = 1$ (P' ha già raggio k). \square

3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione

Definizione 3.67 (Angolo di una curva con il parallelo).

Sia Σ una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica \underline{x} . Data una curva γ su di essa, si definisce $\varphi(\gamma(t))$ come segue:

$$\varphi(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\gamma'(t), \underline{x}_v(\gamma(t))),$$

ovverosia $\varphi(\gamma(t))$ è l'angolo tra la curva γ in $\gamma(t)$ e il parallelo a cui appartiene $\gamma(t)$.

Definizione 3.68 (Raggio di una curva rispetto all'asse z).

Sia Σ una superficie di rotazione. Sia data una curva γ su di essa. Si definisce allora il raggio di γ rispetto all'asse di rotazione z come la distanza di γ dall'asse z , ovverosia:

$$r(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_{xy}(\gamma(t))\|.$$

Proposizione 3.69 (Relazione di Clairaut).

Sia γ una geodetica su una superficie di rotazione Σ . Allora γ soddisfa la **relazione di Clairaut**:

$$r(\gamma(t)) \cdot \cos(\varphi(\gamma(t))) = \text{cost.} \quad (\text{Clairaut})$$

Inoltre una curva soddisfacente la relazione di Clairaut che non parametrizza un parallelo è una geodetica.

Osservazione 3.70.

Sono geodetiche anche le curve soddisfacenti (Clairaut) che parametrizzano paralleli, a patto che, se Σ è una rotazione sulla funzione f , valga $f' = 0$ sui punti della geodetica; ovverosia, in un certo senso, sono geodetiche i "paralleli stazionari".

3.5.5 Curvatura geodetica

Osservazione 3.71.

Sia α una curva di Frenet su una superficie Σ . Osserviamo che N_α è perpendicolare a T_α , e quindi dovrà scriversi in una qualche combinazione lineare della base ortonormale $\{\underline{n}, \underline{n} \times T_\alpha\}$ di $(T_\alpha)^\perp$, dove \underline{n} è una normale (locale).

Sappiamo già dall'Osservazione 3.20 che $\dot{T}_\alpha \cdot \underline{n}$ è la curvatura normale $\kappa_{\alpha,n}$. Ha quindi senso definire il seguente oggetto matematico:

Definizione 3.72 (Curvatura geodetica).

Sia α una curva di Frenet su una superficie Σ . Si definisce la **curvatura geodetica** di α nel punto P come:

$$\kappa_{\alpha,g} = \dot{T}_\alpha(P) \cdot (\underline{n}(P) \times T_\alpha(P)),$$

dove \underline{n} è una normale (locale) su Σ .

Osservazione 3.73.

Quindi N_α si scrive come:

$$N_\alpha = \kappa_{\alpha,n} \underline{n} + \kappa_{\alpha,g} (\underline{n} \times T_\alpha),$$

da cui si ricava immediatamente la seguente relazione:

$$\kappa_\alpha^2 = \kappa_{\alpha,n}^2 + \kappa_{\alpha,g}^2.$$

Proposizione 3.74 (In una geodetica curvatura normale e curvatura della curva coincidono).

Sia α una curva p.l.a. di Frenet su una superficie Σ . Allora α è una geodetica se e solo se:

$$\kappa_{\alpha,g} \equiv 0,$$

ovverosia se e solo se:

$$\kappa_\alpha \equiv \kappa_{\alpha,n}.$$

Dimostrazione.

Infatti, se α è una geodetica, allora α'' è perpendicolare a $T_P \Sigma$. Quindi, dal momento che α è p.l.a., si deve avere $N_\alpha(P)$ perpendicolare a $T_P \Sigma$, ossia parallelo a \underline{n} . Il viceversa è analogo. \square

3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet

3.6.1 Prime definizioni

Definizione 3.75 (Curva chiusa).

Una curva (non necessariamente liscia) $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ si dice **chiusa** se $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definizione 3.76 (Curva semplice).

Una curva (non necessariamente liscia) $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ si dice **semplice** se $\alpha(t) = \alpha(t')$ può avvenire solo sugli estremi a, b , ovverosia non è autointersecante.

Definizione 3.77 (Curva regolare a tratti).

Una curva (non necessariamente liscia) $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ si dice **regolare a tratti** se esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$ di $[a, b]$ tale per cui $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è regolare per ogni $i < \ell$.

3.6.2 Regione di una superficie e area

Definizione 3.78 (Regione).

Un sottosieme R di una superficie Σ si dice **regione** se è un chiuso nella topologia di Σ , il cui bordo è traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.

Osservazione 3.79.

Dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16 segue $\underline{x}_s \times \underline{x}_t = \det(Jf_{\underline{x},y})(\underline{y}_u \times \underline{y}_v)$. Da ciò segue facilmente tramite un cambio di variabili che:

$$\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_s \times \underline{x}_t\| ds dt = \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_u \times \underline{y}_v\| du dv.$$

Definizione 3.80 (Area di una regione).

Sia R una regione di Σ contenuta dentro l'immagine di una parametrizzazione \underline{x} . Si definisce allora la sua **area** come:

$$A(R) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv,$$

che, per l'Osservazione 3.79, è invariante al cambio di parametrizzazione.

Proposizione 3.81 (Formula per $\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|$).

Per ogni coppia di vettori v, w vale la seguente relazione:

$$\|v \times w\|^2 + \|v \cdot w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Applicando questa identità a \underline{x}_u e \underline{x}_v , si ottiene la seguente formula (relativa a \underline{x}):

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

3.6.3 Integrazione rispetto a una regione

Definizione 3.82 (Integrazione rispetto all'area).

Se $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia, si definisce il suo integrale rispetto a una regione R di Σ come segue:

$$\int_R \varphi dA \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv.$$

Osservazione 3.83.

Ponendo $\varphi \equiv 1$, si ottiene:

$$\int_R dA = A(R).$$

3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario

Definizione 3.84 (Angoli esterni).

Sia R una regione di una superficie Σ . Se α ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità t_1, t_2, \dots, t_n si definiscono gli **angoli esterni** di R come:

$$\varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\alpha'_+(t_i), \alpha'_-(t_{i+1})),$$

dove α_+ e α_- indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

Teorema 3.85 (Gauss-Bonnet locale).

Sia $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ una regione semplicemente connessa con angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R \kappa dA + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi. \quad (\text{GBL})$$

Definizione 3.86 (Angoli interni).

Sia R una regione di una superficie Σ . Se α ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità t_1, t_2, \dots, t_n si definiscono gli **angoli interni** di R come:

$$\iota_i \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \varepsilon_i,$$

dove α_+ e α_- indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

Corollario 3.87.

Sia $T \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ una triangolo su Σ , ovvero sia una regione con tre punti non regolari sul bordo, collegati tramite geodetiche. Allora vale:

$$\int_R \kappa dA = \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 - \pi.$$

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla definizione di angolo interno e dal Teorema di Gauss-Bonnet locale (3.85), dacché $\kappa_g \equiv 0$ lungo le geodetiche. \square

Corollario 3.88.

In un piano, la somma degli angoli interni di un triangolo è esattamente π . Sulla sfera, invece è strettamente maggiore di π . Su una sella è invece strettamente minore.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Corollario 3.87, visto che su un piano si ha $\kappa \equiv 0$, su una sfera $\kappa > 0$ e su una sella $\kappa < 0$. \square

3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione

Definizione 3.89 (Superficie orientata con bordo).

Si dice che Σ è una **superficie orientata con bordo** (eventualmente sconnesso) se:

$$\Sigma = \hat{\Sigma} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n R_i \right),$$

dove $\hat{\Sigma}$ è una superficie orientata, compatta con $\partial\hat{\Sigma} = \emptyset$, e le R_i sono regioni di $\hat{\Sigma}$.

In tal caso si pone:

$$\partial\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \partial R_i,$$

mentre i suoi angoli interni/esterni diventano quelli delle singoli regioni.

Definizione 3.90 (Triangolarizzazione).

Una **triangolarizzazione** di una superficie Σ è una famiglia $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$ di insiemi tali per cui valgono le seguenti proprietà:

- $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^n \Delta_\lambda$,
- Δ_λ è l'immagine di un triangolo euclideo tramite una parametrizzazione regolare compatibile con l'orientazione di Σ .
- Se $\lambda \neq \mu$, allora $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$ può essere vuoto, un lato comune e un singolo vertice.
- Se Δ_λ e Δ_μ hanno in comune un lato, allora lo percorrono con orientazioni opposte.
- $\Delta_\lambda \cap \partial\Sigma$ può essere vuoto, un lato o un vertice.

3.6.6 Teorema di Radó e caratteristica di Eulero

Teorema 3.91 (Radó).

Ogni superficie orientata con bordo ammette una triangolarizzazione.

Definizione 3.92 (Caratteristica di Eulero).

Sia $\tau = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$ una triangolarizzazione di una superficie orientata con bordo. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero** come:

$$\chi(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} V - L + T,$$

dove V è il numero di vertici di τ , L è il numero di lati e T è il numero di triangoli.

Fatto 3.93.

La caratteristica di Eulero non dipende dalla triangolarizzazione scelta.

3.6.7 Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse

Teorema 3.94 (Gauss-Bonnet globale).

Sia Σ una superficie orientata con bordo con angoli esterni $\{\varepsilon_i\}_i$. Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds + \int_\Sigma \kappa dA + \sum_i \varepsilon_i = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (\text{GBG})$$

Dimostrazione.

La dimostrazione segue i prossimi due punti:

1. Si sceglie una triangolarizzazione di Σ grazie al Teorema di Radó (3.91) e si applica il Teorema di Gauss-Bonnet locale (3.85) ad ogni triangolo.
2. Si sommano le varie identità date da (GBL). In questo modo i bordi interni si semplificano (sono lati in comune tra due triangoli, quindi percorsi in sensi opposti), ottenendo $\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds$. Allora stesso modo gli angoli interni della triangolarizzazione si sommano a $2\pi(L - V)$, mentre i 2π si sommano a T .

□

Corollario 3.95.

Se Σ è una superficie orientata compatta con $\partial\Sigma = \emptyset$, allora:

$$\int_{\Sigma} \kappa dA = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Definizione 3.96 (Superficie chiusa).

Una superficie Σ si dice **chiusa** se è compatta e $\partial\Sigma = \emptyset$.

Teorema 3.97 (classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse).

A meno di omeomorfismo, le superfici chiuse, orientabili e connesse sono le superfici di genere, tali per cui $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

Corollario 3.98.

Sia Σ una superficie chiusa e orientabile non omeomorfa alla sfera. Allora su Σ esistono sia punti ellittici, che iperbolici, che parabolici.

Parte 4

Varietà e teoria del grado

4.1 Varietà differenziabili e prime definizioni

4.1.1 Mappe C^∞ e diffeomorfismi

Definizione 4.1 (Mappe lisce tra due sottinsiemi).

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ sottinsiemi qualsiasi. Allora una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice di **classe C^∞** (o *liscia*) se per ogni $x \in X$ esistono un aperto W_x e una funzione $F : W_x \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, chiamata **estensione**, di classe C^∞ per cui:

$$F|_{W_x \cap X} = f|_{W_x \cap X}.$$

Osservazione 4.2.

Osserviamo che i sottinsiemi di X della forma $W \cap X$ con W aperto sono esattamente gli aperti per la topologia di sottospazio di X .

Definizione 4.3 (Diffeomorfismo).

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ sottinsiemi qualsiasi. Allora una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **diffeomorfismo** se è un omeomorfismo, è liscia e ammette inversa liscia.

Osservazione 4.4.

Le definizioni di mappa liscia e diffeomorfismo date sono chiaramente compatibili con le usuali definizioni date su aperti di \mathbb{R}^n .

Proposizione 4.5.

La composizione di mappe lisce è liscia. La restrizione di una mappa liscia è liscia.

Dimostrazione.

Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due mappe lisce con $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $Z \subseteq \mathbb{R}^p$. Sia $x \in X$. Allora, poiché f è liscia, esistono $W_x \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto e $F : W_x \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ liscia tale per cui:

$$F|_{W_x \cap X} = f|_{W_x \cap X}.$$

Analogamente, per $f(x) \in Y$ esistono $U_{f(x)} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ aperto e $G : U_{f(x)} \rightarrow \mathbb{R}^p$ liscia tale per cui:

$$G|_{U_{f(x)} \cap Y} = g|_{U_{f(x)} \cap Y}.$$

Pertanto, a meno di restringere W_x per ottenere $F(W_x \cap X) \subseteq U_{f(x)} \cap Y$, si ha:

$$G \circ F|_{W_x \cap X} = g \circ f|_{W_x \cap X},$$

dove $g \circ f$ è liscia; questo dimostra che la composizione di mappe lisce è liscia.

La restrizione di una mappa è liscia dal momento che è composizione di una mappa liscia con una mappa di inclusione, che è liscia in quanto si estende all'identità. \square

4.1.2 Varietà differenziabili, varietà chiuse, carte, atlanti, parametrizzazioni locali e funzioni di transizione

Definizione 4.6 (Varietà differenziabile liscia senza bordo).

Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^k$ si dice **varietà (differenziabile liscia senza bordo) di dimensione $m > 0$** (o m -varietà) se per ogni suo punto x esistono un intorno aperto W_x in \mathbb{R}^k e un diffeomorfismo $f_x : W_x \cap M \rightarrow U$ verso un aperto U in \mathbb{R}^m . Per $m = 0$, si richiede invece che ogni $W_x \cap M$ sia un singolo punto.

Le coppie della forma $(f_x, W_x \cap M)$ si dicono **carte locali**, e formano un **atlante** della varietà. L'inversa di f_x si dice invece **parametrizzazione locale** di x in M .

Definizione 4.7 (Varietà chiusa).

Si dice **varietà chiusa** una varietà (senza bordo) che è compatta.

Osservazione 4.8.

Le varietà di dimensione zero sono esattamente le unioni di punti isolati.

Osservazione 4.9.

Le carte locali inducono un ricoprimento aperto di M , e quindi, qualora M fosse compatta, si potrebbe sempre prendere un atlante finito.

Inoltre, poiché \mathbb{R}^k è II-numerabile, si può sempre prendere un atlante numerabile.

Osservazione 4.10.

Ogni aperto di \mathbb{R}^k è una varietà di dimensione k . Le superfici sono invece varietà di dimensione 2, le cui parametrizzazioni locali sono date dalle parametrizzazioni regolari.

Osservazione 4.11 (Gli aperti di varietà sono sottovarietà).

Se N è un aperto di una m -varietà M , N eredita da M una struttura di m -varietà per la quale l'atlante è dato dalle intersezioni delle carte locali con N stesso. Infatti N è aperto, e dunque l'immagine di una carta locale sarà anch'esso un aperto su \mathbb{R}^m .

Definizione 4.12 (Funzione di transizione).

Date due parametrizzazioni locali $f : U \rightarrow f(U)$ e $g : V \rightarrow g(V)$ con intersezione delle immagini non vuota, si definisce la **funzione di transizione da f a g** come la seguente funzione:

$$g^{-1} \circ f : f^{-1}(g(V)) \rightarrow g^{-1}(f(U)).$$

4.1.3 Prodotto di varietà

Proposizione 4.13 (Prodotto di varietà).

Siano $M \subseteq \mathbb{R}^k$ e $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$ varietà di dimensione m e n . Allora $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$ è una varietà di dimensione $m+n$.

Un atlante per $M \times N$ è dato da:

$$\{(f_i \times g_j, (W_i \times Q_j) \cap (M \times N))\}_{i,j},$$

dove $\{(f_i, W_i \cap M)\}_i$ è un atlante di M e $\{(g_j, Q_j \cap N)\}_j$ è un atlante di N .

Dimostrazione.

Segue dal fatto che i prodotti $f_i \times g_j$ sono diffeomorfismi in quanto prodotti di diffeomorfismi. \square

4.2 Spazio tangente e differenziale su mappe tra varietà

4.2.1 Differenziale su aperti di \mathbb{R}^n

Ricordiamo la definizione di differenziale per mappe su aperti di spazi reali:

Definizione 4.14 (Differenziale per $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$).

Sia U un aperto di \mathbb{R}^k e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ una funzione liscia. Allora il **differenziale** $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ nel punto $x \in U$ è la funzione tale per cui:

$$df_x(h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Equivalentemente df_x è l'unica funzione lineare tale per cui:

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Osservazione 4.15.

Il differenziale df_x rispetta alcune proprietà fondamentali:

(i.) La matrice di df_x è data dallo jacobiano $Jf(x) = (\partial_{x_j} f_i(x))_{i,j}$.

(ii.) Il differenziale rispetta la *regola della catena* (chain rule):

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$

(iii.) Data id_U su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^k$, allora $d(\text{id}_U)_x = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$ per ogni $x \in U$.

(iv.) Dati $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$ con U' aperto, l'inclusione $\iota : U' \rightarrow U$ è tale per cui $d\iota_x = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$ per ogni $x \in U'$.

(v.) Se $L : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ è lineare, allora $dL_x = L$ per ogni $x \in U$.

Proposizione 4.16.

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$ aperti. Sia $f : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo. Allora $k = \ell$ e df_x è un isomorfismo di \mathbb{R}^k per ogni $x \in U$.

Dimostrazione.

Sia $g : V \rightarrow U$ l'inversa di f . Poiché f è un diffeomorfismo, g è liscia. Sia $x \in U$. Allora:

$$(i.) \text{id}_{\mathbb{R}^k} = d(\text{id}_U)_x = d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x,$$

$$(ii.) \text{id}_{\mathbb{R}^\ell} = d(\text{id}_V)_{f(x)} = d(f \circ g)_{f(x)} = df_x \circ dg_{f(x)}.$$

Da (i.) si deduce che df_x è iniettiva, mentre da (ii.) si deduce che è surgettiva. Dunque df_x è un isomorfismo (e quindi vale anche $k = \ell$). \square

4.2.2 Spazio tangente in un punto di una varietà

Osservazione 4.17 (Lo spazio tangente è ben definito).

Sia M una varietà di dimensione m . Siano $g : U \rightarrow W \cap M$ e $h : U' \rightarrow W' \cap M$ due parametrizzazioni locali di $x \in M$ con $g(u) = h(u') = x$.

Supponiamo senza perdita di generalità che $W' = W$ (è sufficiente restringere le immagini). La funzione $g \circ h^{-1}$ è un diffeomorfismo in quanto composizione di diffeomorfismi (vd. Proposizione 4.5). Allora per la Proposizione 4.16 $d(h^{-1} \circ g)_u$ è un isomorfismo.

Osserviamo che:

$$dg_u = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u = dh_{u'} \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Dal momento che $d(h^{-1} \circ g)_u$ è in particolare surgettiva, si ha:

$$dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_{u'}(\mathbb{R}^m).$$

Definizione 4.18 (Spazio tangente).

Sia x un punto di una varietà M di dimensione m . Presa una parametrizzazione locale $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$ di x con $g(u) = x$, si definisce lo **spazio tangente di M in x** come:

$$T_x M \stackrel{\text{def}}{=} dg_u(\mathbb{R}^m).$$

Proposizione 4.19.

Sia x un punto di una varietà M di dimensione m . Allora:

$$\dim T_x M = m.$$

Dimostrazione.

Si prenda una parametrizzazione locale $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$ di x con $g(u) = x$. È sufficiente dimostrare che dg_u è una mappa iniettiva.

La mappa g è indotta dalla carta locale tramite un'estensione $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ con:

$$F|_{W \cap M} = g^{-1}.$$

Osserviamo allora che:

$$\text{id}_{\mathbb{R}^m} = d(F \circ g)_u = dF_x \circ dg_u,$$

da cui si deduce che dg_u ammette un'inversa sinistra, ed è dunque iniettiva. \square

Osservazione 4.20 (Spazio tangente in un prodotto di varietà).

Siano M e N due varietà di dimensione m e n . Se $f_i \times g_j$ è una carta locale di $M \times N$, come ottenuto nella Proposizione 4.13, allora:

$$\begin{aligned} T_{(m,n)}(M \times N) &= d(f_i^{-1} \times g_j^{-1})_{(m,n)}(\mathbb{R}^{m+n}) \\ &\cong d(f_i^{-1})(\mathbb{R}^m) \times d(g_j^{-1})(\mathbb{R}^n) \\ &= T_m M \times T_n N \end{aligned}$$

Quindi vale il seguente isomorfismo canonico, ottenuto proiettando sulle componenti:

$$\boxed{T_{(m,n)}(M \times N) \cong T_m M \times T_n N.}$$

4.2.3 Differenziale per mappe lisce tra varietà

Osservazione 4.21 (Il differenziale per mappe lisce è ben definito).

Siano $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà di dimensione m , $N \subseteq \mathbb{R}^\ell$ un'altra varietà, e sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà.

Sia $F : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ un'estensione di f per un intorno aperto di $x \in M$. Siano $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$ una parametrizzazione locale di x e $h : V \rightarrow N$ una parametrizzazione locale di $f(x)$ con $g(u) = x$ e $h(v) = f(x)$.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{F} & N \\ \uparrow g & & & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ F \circ g} & & & V \end{array}$$

Dal diagramma commutativo si deduce che:

$$dF_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ F \circ g)_u.$$

Pertanto $dF_x(T_x M)$ non dipende dalla scelta dell'estensione F e vale:

$$dF_x(T_x M) \subseteq T_{f(x)} N.$$

Definizione 4.22 (Differenziale su mappe tra varietà).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa tra varietà. Se F è un'estensione di f in x , si definisce il **differenziale di f in x** $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ come segue:

$$\boxed{df_x \stackrel{\text{def}}{=} dF_x|_{T_x M}.}$$

Osservazione 4.23.

Le proprietà del differenziale su aperti di \mathbb{R}^n si trasferiscono facilmente al differenziale su mappe tra varietà:

- (i.) Il differenziale rispetta la *regola della catena* (chain rule):

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$

- (ii.) Data id_M per una varietà M , allora $d(\text{id}_M)_x = \text{id}_{T_x M}$ per ogni $x \in M$.

- (iii.) Dati M' e M sono varietà con $M' \subseteq M$, l'inclusione $\iota : M' \rightarrow M$ è liscia, $d\iota_x : T_x M' \rightarrow T_x M$ è iniettiva e $T_x M'$ è un sottospazio di $T_x M$.

- (iv.) Se $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, allora df_x è un isomorfismo per ogni $x \in M$.

Proposizione 4.24 (Differenziale per prodotti di varietà).

Sia $f : M \rightarrow N \times O$ una mappa liscia, dove M , N e O sono varietà. Se $f(x) = (g(x), p(x))$, allora g e p sono lisce e vale:

$$\boxed{df_x(h) = (dg_x(h), dp_x(h)).}$$

4.3 Valori regolari e critici

4.3.1 Prime definizioni

Definizione 4.25 (Punti regolari o critici).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, con $\dim M = m$ e $\dim N = n$.

Sia $x \in M$. Si dice che x è un **punto critico** se $\text{rk}(df_x) < n$, e altrimenti si dice che è un **punto regolare**.

Indichiamo con $\text{crit}(f)$ l'insieme dei punti critici di f .

Definizione 4.26 (Valori regolari o critici).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, con $\dim M = m$ e $\dim N = n$.

Sia $y \in N$. Si dice che y è un **valore critico** se è immagine di almeno un punto critico, e altrimenti si dice che è un **valore regolare** (in particolare lo è se $f^{-1}(y) = \emptyset$).

Osservazione 4.27.

È immediato osservare che l'insieme dei valori critici di f è esattamente $f(\text{crit}(f))$.

Osservazione 4.28 (I punti regolari formano un aperto).

Se x è un punto regolare di una mappa liscia $f : M \rightarrow N$, esiste sempre un intorno aperto U di x in M composto di soli punti regolari.

Scelta una parametrizzazione locale $g : U \rightarrow g(U)$ di un intorno aperto di x , si può scegliere infatti una base "comune" per ogni $T_y M$ al variare di y in $g(U)$, e così si può rappresentare df_y matricialmente.

Poiché x è regolare, df_x è surgettiva. Allora df_x ammette un minore di taglia massima di determinante non nullo. Il determinante di questo minore, al variare di $y \in g(U)$, varia continuamente; in particolare, per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x in cui continua a essere non nullo.

Equivalentemente esiste un intorno aperto di x in cui tutti i punti sono regolari.

4.3.2 Teorema di invertibilità locale per varietà e lemma della pila di dischi

Teorema 4.29 (di invertibilità locale per varietà).

Siano M e N due varietà di stessa dimensione. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Se $x \in M$ è regolare, allora esiste un intorno A di x in M tale per cui $f|_A : A \rightarrow f(A)$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione.

Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x in M con $g(u) = x$. Sia $h : V \rightarrow h(V)$ una parametrizzazione locale di $f(x)$ in N con $h(v) = f(x)$. A meno di restringere il dominio di g , possiamo supporre che $f(g(U)) \subseteq h(V)$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$

Osserviamo che:

$$df_x \circ dg_u = dh_{f(x)} \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u.$$

Dal momento che x è regolare, df_x è un isomorfismo. Poiché anche dg_u e $dh_{f(x)}$ sono isomorfismi (g e h sono diffeomorfismi, vd. Proposizione 4.16), allora anche $d(h^{-1} \circ f \circ g)_u$ è un isomorfismo.

Per il Teorema di invertibilità locale sugli aperti di \mathbb{R}^n , allora esiste un aperto A' di U su cui $h^{-1} \circ f \circ g|_{A'}$ è un diffeomorfismo. Osserviamo che:

$$f|_{g(A')} = h|_{h^{-1}(f(g(A')))} \circ h^{-1} \circ f \circ g|_{A'} \circ g^{-1}|_{g(A')}.$$

Quindi $f|_{g(A')}$ è un diffeomorfismo in quanto composizione di restrizioni di diffeomorfismi (vd. Proposizione 4.5), e $A \stackrel{\text{def}}{=} g(A')$ è l'intorno cercato. \square

Proposizione 4.30.

Sia M una varietà compatta. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà della stessa dimensione. Se $y \in N$ è un valore regolare, allora $f^{-1}(y)$ è un insieme finito.

Dimostrazione.

Poiché N è T1, $f^{-1}(y)$ è un chiuso di M ; pertanto, essendo M compatta, $f^{-1}(y)$ è un compatto.

Mostriamo ora che $f^{-1}(y)$ è discreto. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Dal momento che y è un valore regolare, x è un punto regolare. Quindi esiste per il Teorema 4.29 un intorno aperto $A \subseteq M$ di x per cui $f|_A$ è un diffeomorfismo. In questo intorno x è l'unica controimmagine di y mediante f , e quindi $f^{-1}(y)$ è discreto.

Dal momento che $f^{-1}(y)$ è sia compatto che discreto, $f^{-1}(y)$ è finito. \square

Lemma 4.31 (della pila dei dischi).

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M compatta. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia con $y \in N$ valore regolare. Allora esiste un intorno V di y tale per cui:

$$|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|, \quad \forall y' \in V.$$

Dimostrazione.

Sappiamo dalla Proposizione 4.30 che $f^{-1}(y)$ è finito. Se $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$, riprendendo gli intorni aperti A_i come definiti nella dimostrazione della Proposizione 4.30, allora possiamo definire:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n f(A_i) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Gli $f(A_i)$ sono aperti dal momento che f è un diffeomorfismo. L'insieme $M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$ è un chiuso in un compatto, e quindi è compatto; allora $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i)$ è compatto, e dunque chiuso essendo N uno spazio T2. Quindi $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i)^c$ è aperto. Si conclude dunque che V è aperto.

Su V , $|f^{-1}(-)|$ è necessariamente costante: la prima intersezione assicura che esistano almeno $|f^{-1}(y)|$ controimmagini, e la sottrazione insiemistica assicura che non possano esserne di più. \square

4.3.3 Misura nulla e teoremi di Sard e Brown

Definizione 4.32 (Sottinsiemi di varietà di misura nulla).

Sia A un sottinsieme di una varietà M di dimensione m . Si dice che A ha **misura nulla (rispetto a M)** se per ogni carta locale $(f, W \cap M)$, $f(A \cap W)$ ha misura nulla in \mathbb{R}^m .

Teorema 4.33 (di Sard, per le varietà).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra due varietà. Allora l'insieme dei valori critici $f(\text{crit}(f))$ ha misura nulla in N .

Dimostrazione.

Sia $\{(f_i, W_i \cap M)\}_{i \geq 1}$ un atlante numerabile di M e sia $(g, Z \cap N)$ una carta locale di N . Poniamo:

$$h_i \stackrel{\text{def}}{=} g \circ f|_{W_i \cap M} \circ f_i.$$

A meno di restringere o ignorare W_i , possiamo supporre $f(W_i \cap M) \subseteq Z \cap N$.

$$\begin{array}{ccc} W_i \cap M & \xrightarrow{f|_{W_i \cap M}} & Z \cap N \\ \downarrow f_i & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{h_i = g \circ f|_{W_i \cap M} \circ f_i} & V \end{array}$$

Osserviamo che:

$$d(h_i)_u = dg_{f(f_i^{-1}(u))} \circ df_{f_i^{-1}(u)} \circ d(f_i^{-1})_u$$

Allora, poiché $dg_{f(f_i^{-1}(u))}$ e $d(f_i^{-1})_u$ sono isomorfismi (f_i e g sono diffeomorfismi, vd. Proposizione 4.16), i valori critici di f sono in corrispondenza con quelli degli h_i tramite g .

Per il Teorema di Sard sugli aperti di \mathbb{R}^n , $g(f(\text{crit}(f)) \cap W_i) \cap Z$ ha allora misura zero. Allora, $g(f(\text{crit}(f)) \cap Z)$, che è un'unione numerabile di insiemi di misura nulla, ha misura nulla. Quindi $f(\text{crit}(f))$ ha misura nulla per definizione. \square

Corollario 4.34 (di Brown).

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra due varietà. Allora l'insieme dei valori regolari di f è denso in N .

Dimostrazione.

È sufficiente verificare che in un intorno di un valore critico $y \in N$ ci sia almeno un valore regolare. Se così non fosse, tramite una carta locale si troverebbe la chiusura di un rettangolo di soli valori critici, il cui volume è non nullo. Allora $f(\text{crit}(f))$ non avrebbe misura nulla, che è assurdo per il Teorema 4.33. \square

4.3.4 Varietà a partire da valori regolari

Teorema 4.35.

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà con $\dim M = m \geq n = \dim N$. Se $y \in N$ è regolare, allora $f^{-1}(y)$ è una varietà di dimensione $m - n$ (codimensione n).

Dimostrazione.

Sia k tale per cui $M \subseteq \mathbb{R}^k$, e sia $x \in f^{-1}(y)$. Allora x è per ipotesi un punto regolare, e quindi $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ è una mappa surgettiva, con:

$$\dim \ker(df_x) = m - n.$$

Sia $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ una mappa lineare, dove $T_x M \subseteq \mathbb{R}^k$ e $L|_{T_x M}$ è isomorfismo.

Consideriamo la mappa $F : M \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ tale per cui:

$$F(m) = (f(m), L(m)).$$

Allora, per la Proposizione 4.24, vale:

$$dF_x(v) = (df_x(v), dL_x(v)) = (df_x(v), L(v)),$$

dove si è usato che L è una mappa lineare. $dF_x(v)$ si annulla solo per $v = 0$, essendo $L|_{T_x M}$ un isomorfismo; quindi $dF_x(v)$ è invertibile, e x è regolare per F .

Osserviamo che F è una mappa tra varietà della stessa dimensione (vd. Proposizione 4.13), e quindi, per la Proposizione 4.29, esiste un intorno U di x in M tale per cui $F|_U : U \rightarrow V \stackrel{\text{def}}{=} F(U)$ è un diffeomorfismo.

La restrizione $F|_U$ mappa $U \cap f^{-1}(y)$ su un aperto di $V \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n})$, che è diffeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^{m-n} ($\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^{m-n}$). In particolare induce una carta locale per x , e quindi $f^{-1}(y)$ è una varietà di dimensione $m - n$. \square

Proposizione 4.36.

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà con $\dim M = m \geq n = \dim N$. Se $y \in N$ è regolare, posto $P \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y)$, si ha:

$$\boxed{T_x P = \ker df_x, \quad \forall x \in P.}$$

Inoltre $df_x|_{(T_x P)^\perp}$ è un isomorfismo.

Dimostrazione.

Poiché $P = f^{-1}(y)$, l'inclusione $\iota : P \rightarrow M$ è tale per cui

$f \circ \iota$ è costante. Tuttavia una mappa costante ha differenziale nullo, e dunque:

$$df_x \circ \underbrace{\iota|_{T_x P}}_{= d\iota_x} = 0 \implies T_x P \subseteq \ker(df_x).$$

Poiché $\dim T_x P = m - n = \dim \ker(df_x)$, si ottiene l'uguaglianza $T_x P = \ker(df_x)$.

Osserviamo che $\dim(T_x P)^\perp = n$ e che $(T_x P)^\perp \cap T_x P = \{0\}$. Allora $df_x|_{(T_x P)^\perp}$ è iniettiva, e per uguaglianza dimensionale tra $(T_x P)^\perp$ e $T_y N$ si conclude che è un isomorfismo. \square

Corollario 4.37.

$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è una varietà di dimensione n e $T_x S^n = x^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dimostrazione.

Presa $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2,$$

si ha $S^n = f^{-1}(1)$. Osserviamo che:

$$Jf_x = 2x^\top.$$

Dunque l'unico valore critico di f è 0. Pertanto $S^n = f^{-1}(1)$ è una varietà di dimensione $(n+1) - 1 = n$.

Poiché $df_x(h) = Jf(x) \cdot h = 2x^\top h$, per la Proposizione 4.36 vale anche $T_x S^n = \ker df_x = x^\perp$. \square

Corollario 4.38.

$O(n) \subseteq M(n)$ è una varietà di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dimostrazione.

Presa $f : M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow S(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tale per cui:

$$f(A) = AA^\top,$$

si ha $O(n) = f^{-1}(I)$. Osserviamo che:

$$df_A : M(n) \rightarrow S(n), \quad df_A(B) = AB^\top + BA^\top.$$

Mostriamo che df_A è surgettiva per $A \in f^{-1}(I) = O(n)$.

Sia $C \in S(n)$ simmetrica. Allora C è uguale alla sua parte simmetrica:

$$C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^\top,$$

e quindi, ponendo $\frac{1}{2}C = AB^\top$, si ottiene la seguente soluzione a $AB^\top + BA^\top = C$:

$$B = \frac{1}{2}C^\top A.$$

Dunque I è un valore regolare, e $O(n)$ è una varietà di dimensione $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. \square

4.4 Varietà con bordo

4.4.1 Semispazio superiore e varietà con bordo

Definizione 4.39 (Semispazio superiore).

Si definisce il **semispazio superiore** H^n in \mathbb{R}^n come:

$$H^n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Osservazione 4.40.

Osserviamo che in modo naturale vale il seguente diffeomorfismo:

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Definizione 4.41 (m -varietà con bordo).

Si dice che $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una **m -varietà con bordo** se ogni punto di M ammette un intorno diffeomorfo ad un aperto del semispazio superiore H^n . Gli intorni e i diffeomorfismi citati formano le **carte locali** della varietà, e le inverse di tali diffeomorfismi sono dette **parametrizzazioni locali**. Analogamente si definiscono le **funzioni di transizione**.

Si dice **bordo** della varietà M l'insieme dei punti che è immagine di un punto di ∂H^n tramite qualche parametrizzazione locale, e si indica con ∂M .

Osservazione 4.42.

La definizione data è coerente con la definizione di varietà senza bordo: una varietà senza bordo M è esattamente una varietà con bordo M tale per cui $\partial M = \emptyset$.

Utilizzeremo dunque indistintamente le due caratterizzazioni.

4.4.2 Proprietà del bordo di una varietà con bordo

Lemma 4.43 (I punti di bordo sono sempre immagini di elementi di bordo).

Sia x un punto del bordo ∂M di una m -varietà con bordo M . Sia g una parametrizzazione locale di x , allora x è immagine di un punto di bordo di H^n tramite g . Equivalentemente, x è un punto di ∂M se e solo se è immagine di un valore di bordo per ogni sua parametrizzazione locale.

Dimostrazione.

Sia $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$. Poiché x è un punto di ∂M , allora esiste una parametrizzazione locale $f : V \subseteq H^m \rightarrow f(V)$ di x tale per cui esiste $v \in \partial V = \partial H^m \cap V$ con $f(v) = x$.

Se $f = g$, la tesi è dimostrata. Se $f \neq g$ e per assurdo $u \notin \partial U$, allora la funzione di transizione $g^{-1} \circ f$ si restringerebbe a un diffeomorfismo tra un aperto di \mathbb{R}^m diffeomorfo a \mathbb{R}^m e un aperto di H^m diffeomorfo a H^m . Tuttavia \mathbb{R}^m e H^m non sono diffeomorfi, \neq . Dunque $u \in \partial U$. \square

Corollario 4.44 (Il bordo si trasporta naturalmente tramite parametrizzazione locale).

Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di una m -varietà con bordo M . Allora:

$$g(\partial U) = g(U) \cap \partial M.$$

Dimostrazione.

L'inclusione $g(\partial U) \subseteq g(U) \cap \partial M$ è ovvia. L'inclusione opposta invece è data dal Lemma 4.43. \square

Proposizione 4.45.

Sia M una m -varietà con bordo. Allora ∂M è una varietà senza bordo di dimensione $m - 1$.

Dimostrazione.

Sia $x \in \partial M$. Allora esiste una parametrizzazione locale $g : U \subseteq H^m \rightarrow M$ con $g(u) = x$ e $u \in \partial U = U \cap \partial H^m$.

La restrizione $g|_{\partial U}$ è un diffeomorfismo (vd. Proposizione 4.5). Ricordiamo che $g(\partial U) = g(U) \cap \partial M$ dal Corollario 4.44. Allora, poiché $\partial H^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$, possiamo identificare ∂U come aperto in \mathbb{R}^{m-1} . Quindi $(g|_{\partial U})^{-1}$ induce una carta locale per ∂M , e si conclude che ∂M è una varietà di dimensione $m - 1$. \square

4.4.3 Differenziale e spazio tangente su varietà con bordo

Osservazione 4.46 (Il differenziale sul bordo di H^n è ben definito).

ia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa liscia da un aperto $U \subseteq H^n$. Supponiamo \tilde{g} e \hat{g} siano due estensioni di g in un intorno aperto di $x \in U \cap \partial H^n$. Supponiamo a meno di restringimento che \tilde{g} e \hat{g} condividano lo stesso dominio.

Il differenziale $d\tilde{g}_x$ coincide allora con $d\hat{g}_x$. Sia infatti $u_i \geq 0$ è una successione in $H^n \setminus \partial H^n$ con $u_i \rightarrow x$. Poiché \tilde{g} e \hat{g} sono lisce, il differenziale vara con continuità, ovvero:

$$d\tilde{g}_x = \lim_{i \rightarrow \infty} d\tilde{g}_{u_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} d\hat{g}_{u_i} = d\hat{g}_x,$$

dove si è usato che sugli u_i i differenziali certamente coincidono, potendoci restringere a un aperto in U non intersecante il bordo.

Definizione 4.47 (Differenziale su H^n).

Sia $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa liscia da un aperto $U \subseteq H^n$.

Per $x \in U \setminus \partial H^n$, il differenziale dg_x è definito come l'usuale differenziale dato dalla restrizione di g a un aperto di \mathbb{R}^n .

Per $x \in U \cap \partial H^n$, il differenziale dg_x è indotto dal differenziale di una qualsiasi estensione \tilde{g} di g in un intorno aperto di x , ovvero:

$$dg_x \stackrel{\text{def}}{=} d\tilde{g}_x.$$

Osservazione 4.48.

Come nel caso di una parametrizzazione locale da un aperto di \mathbb{R}^n , anche il differenziale di una parametrizzazione locale di una varietà con bordo è iniettiva per motivi analoghi.

Definizione 4.49 (Spazio tangente per varietà con bordo).

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una m -varietà con bordo. Sia x un punto di M . Si definisce allora lo **spazio tangente di x su M** come:

$$T_x M \stackrel{\text{def}}{=} dg_u(\mathbb{R}^m),$$

dove g è una parametrizzazione locale di un intorno di x in M con $g(u) = x$.

Osservazione 4.50.

Come per il caso di una varietà senza bordo, si dimostra che il differenziale è ben definito. Valgono inoltre ancora le usuali proprietà del differenziale, inclusa la regola della composizione (*chain rule*).

Osservazione 4.51.

A partire da queste definizioni, si definiscono in modo analogo i concetti di punto regolare/critico e di valore regolare/critico.

Si generalizza facilmente in questo senso il Teorema di Sard (Teorema 4.33), così come quello di Brown (Corollario 4.34).

Osservazione 4.52 ($T_x\partial M$ è un iperpiano di T_xM).

Sia M una m -varietà con bordo. Grazie alla Proposizione 4.45 sappiamo che ∂M è una $(m-1)$ -varietà.

Consideriamo l'inclusione $\iota : \partial M \rightarrow M$. Chiaramente ι è una mappa liscia tra varietà con differenziale l'inclusione $T_x\partial M \hookrightarrow T_xM$. In particolare vale:

$$\boxed{T_x\partial M \subseteq T_xM}$$

per ogni punto $x \in \partial M$.

4.4.4 Varietà con bordo da valori regolari

Teorema 4.53.

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa liscia tra varietà, dove M è una m -varietà senza bordo. Se 0 è un valore regolare per f , allora $\{f \geq 0\}$ è una m -varietà con bordo $f^{-1}(0) = \{f = 0\}$.

Dimostrazione.

L'insieme $\{f > 0\}$ è un aperto di M dal momento che f è continua, e quindi eredita la struttura di varietà di M (vd. Osservazione 4.11). Dunque, conosciamo già le carte locali di un punto $x \in \{f > 0\}$.

Sia x un punto di $\{f = 0\} = f^{-1}(0)$. Poiché 0 è un valore regolare, df_x è surgettiva, e quindi $\dim \ker df_x = m-1$. Supponiamo che k sia tale per cui $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Allora possiamo costruire un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ tale per cui $L|_{\ker df_x}$ è un isomorfismo.

Consideriamo la mappa $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ tale per cui:

$$F(m) = (L(m), f(m)).$$

Allora F è una mappa liscia tra varietà, il cui differenziale in x è un isomorfismo. Dunque, per il Teorema 4.29, esiste un intorno aperto U di x in M per il quale $F|_U : U \rightarrow V \stackrel{\text{def}}{=} F(U)$ è un diffeomorfismo.

Tramite $F|_U$ si induce allora un diffeomorfismo tra l'aperto $(\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \cap V = H^m \cap V$ di H^m e l'aperto $F^{-1}(H^m \cap V) = \{f > 0\} \cap U$, tramite il quale il punto x viene mappato su $\partial H^m \cap V$. Dunque $\{f \geq 0\}$ è una m -varietà con bordo $f^{-1}(0)$. \square

Osservazione 4.54.

Chiaramente il Teorema 4.53 si generalizza a qualsiasi insieme della forma $\{f \text{ op } a\}$ con $\text{op} \in \{\leq, \geq\}$ e a valore regolare di f .

Corollario 4.55.

D^n è una varietà n -dimensionale con bordo S^{n-1} .

Dimostrazione.

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Allora, come visto per il Corollario 4.37, 1 è valore regolare di f , e quindi $D^n = \{f \leq 1\}$ è una n -varietà con bordo S^{n-1} per il Teorema 4.53. \square

Lemma 4.56.

Sia $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m > n$ una mappa liscia.

Se $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare sia per f che per $f|_{\partial H^m}$ con $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(y)$ è una $(m-n)$ -varietà con bordo $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial H^m$.

Dimostrazione.

Sia $x \in f^{-1}(y)$. Supponiamo valga $x \in \text{int}(H^m) = H^m \setminus \partial H^m$. Possiamo restringerci a un intorno aperto U di x in \mathbb{R}^m , per il quale $f|_U$ diventa una mappa tra varietà senza bordo. Allora $f|_U^{-1}(y)$ è una $(m-n)$ varietà senza bordo per il Teorema 4.35. Quindi x eredita da questa varietà le carte locali su $f^{-1}(y)$; inoltre x non potrà appartenere al bordo di $f^{-1}(y)$, essendo nell'immagine di una parametrizzazione di un aperto di \mathbb{R}^{m-n} .

Supponiamo valga adesso $x \in \partial H^m$. Poiché f è liscia, esistono un intorno aperto W di x in \mathbb{R}^m e un'estensione liscia $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ per cui:

$$F|_{W \cap H^m} = f|_{W \cap H^m}.$$

Dal momento che $dF_x = df_x$, e x è un punto regolare per f , allora dF_x è surgettiva, e x è punto regolare anche per F . Dal momento che i punti regolari formano un aperto (vd. Osservazione 4.28), possiamo supporre, a meno di restringere W , che non vi siano punti critici in W . Pertanto, y sarà valore regolare per F e $F^{-1}(y)$ è dunque una $(m-n)$ -varietà senza bordo per il Teorema 4.35.

Sia $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proiezione tale per cui $x \mapsto x_m$. Allora π è una mappa liscia.

Mostriamo che 0 è un valore regolare per $\pi|_{F^{-1}(y)}$. Osserviamo innanzitutto che:

$$(\pi|_{F^{-1}(y)})^{-1}(0) = F^{-1}(y) \cap \partial H^m \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f^{-1}(y) \cap \partial H^m}_{(W \setminus H^m) \cap \partial H^m = \emptyset}$$

Sia $y^* \in f^{-1}(y) \cap \partial H^m$. Osserviamo che:

- (i.) $T_{y^*}F^{-1}(y) = \ker dF_{y^*} = \ker df_{y^*}$ per la Proposizione 4.36, e questo spazio ha dimensione $m-n$.
- (ii.) $T_{y^*}\partial H^m = \ker d\pi_{y^*}$ per la Proposizione 4.36.
- (iii.) $\ker d(f|_{\partial H^m})_{y^*} = \ker df_{y^*}|_{T_{y^*}\partial H^m}$ ha dimensione $m-n-1$ dal momento che y è per ipotesi un valore regolare di $f|_{\partial H^m}$, dove per l'uguaglianza dei due nuclei si è utilizzato che:

$$f|_{\partial H^m} = f \circ \iota^{\partial H^m},$$

e successivamente la *chain rule*.

(iv.) Grazie a (i.), (ii.) e (iii.), possiamo scrivere:

$$\ker d(f|_{\partial H^m})_{y^*} = T_{y^*} F^{-1}(y) \cap (\ker d\pi_{y^*}).$$

Osserviamo che y^* è un punto critico per $\pi|_{F^{-1}(y)}$ se e solo se $d(\pi|_{F^{-1}(y)})_{y^*}$ è nullo, dacché π è una mappa in una 1-varietà. Questo accade se e solo se $T_{y^*} F^{-1}(y) \subseteq \ker d\pi_{y^*}$. Tuttavia, se vi fosse questa inclusione, si avrebbe per (iv.) $\ker d(f|_{\partial H^m})_{y^*} = T_{y^*} F^{-1}(y)$, che è assurdo dal momento che il primo spazio ha dimensione $m - n - 1$ per (iii.) e il secondo ha dimensione $m - n$ per (i.). Quindi 0 è regolare per $\pi|_{F^{-1}(0)}$.

Dal momento che 0 è regolare per $\pi|_{F^{-1}(0)}$, per il Teorema 4.53 $\{\pi \geq 0\} = f^{-1}(y) \cap H^m$ è una $(m - n)$ -varietà con bordo $\{\pi = 0\} = f^{-1}(y) \cap \partial H^m \ni x$. Quindi x eredita da questa varietà le carte locali su $f^{-1}(y)$; inoltre x appartiene al bordo di $f^{-1}(y)$, essendo immagine di un punto di bordo tramite una parametrizzazione locale. \square

Teorema 4.57.

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, dove M è una m -varietà con bordo ∂M non vuoto, N è una n -varietà senza bordo e $m > n$.

Se $y \in N$ è un valore regolare sia per f che per $f|_{\partial M}$ con $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(y)$ è una $(m - n)$ -varietà con bordo $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$.

Dimostrazione.

Sia $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U) \subseteq M$ una parametrizzazione locale di $x \in f^{-1}(y)$ con $g(u) = x$. Sia $h : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow h(V) \subseteq N$ una parametrizzazione locale di y con $g(v) = y$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$

A meno di restringere i domini delle due mappe, possiamo considerare $p = h^{-1} \circ f \circ g$. Allora $v = h^{-1}(y)$ è regolare per la mappa p . Per possiamo restringerci a una palla aperta come intorno aperto di u in $p^{-1}(v)$: se questa è diffeomorfa a \mathbb{R}^m , una carta locale per u in $p^{-1}(v)$ è già data dal Teorema 4.35; se invece è diffeomorfa a H^m , la carta locale è ereditata tramite il Lemma 4.56.

La carta locale trovata si trasferisce tramite g al punto x di M , e applicando il Corollario 4.44 il bordo della varietà si trasferisce coerentemente a sua volta. \square

4.4.5 Classificazione delle 1-varietà, lemma di non retrazione sul bordo e teorema del punto fisso di Brouwer

Teorema 4.58 (Classificazione delle 1-varietà con bordo).

Una 1-varietà con bordo è diffeomorfa a unioni di copie di S^1 e di intervalli di \mathbb{R} .

Dimostrazione.

Si veda l'appendice di [Milnor, J. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia]. \square

Corollario 4.59 (Classificazione delle 1-varietà compatte con bordo).

Una 1-varietà compatta con bordo è necessariamente un'unione di copie di S^1 e di intervalli chiusi di \mathbb{R} .

Dimostrazione.

Discende immediatamente dal Teorema 4.58 utilizzando l'ipotesi di compattezza. \square

Corollario 4.60.

Una 1-varietà compatta con bordo ha un numero pari di punti sul bordo

Dimostrazione.

Deriva immediatamente dal Corollario 4.59, dal momento che il segmento chiuso ha due punti sul bordo e S^1 non ne ha nessuno. \square

Lemma 4.61 (di non retrazione sul bordo).

Sia M una varietà compatta con bordo $\partial M \neq \emptyset$. Allora non esistono mappe lisce f da M in ∂M che fissano il bordo, ovvero sia con $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$.

Dimostrazione.

Supponiamo esista una tale mappa f . Allora per il Teorema di Brown (Corollario 4.34, generalizzato alle varietà bordate), sappiamo che i valori regolari di f sono densi in ∂M , e che in particolare esiste almeno un valore regolare.

Sia y un tale valore regolare. Allora, poiché $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$, y è valore regolare anche per $f|_{\partial M}$.

Pertanto, per il Teorema 4.57, $f^{-1}(y)$ è una 1-varietà con bordo $f^{-1}(y) \cap \partial M$. Poiché $\{y\}$ è chiuso in ∂M (è T1), $f^{-1}(y)$ è un chiuso in un compatto, e dunque è una 1-varietà compatta.

Osserviamo che il bordo di $f^{-1}(y)$ si semplifica a $\{y\}$ dacché $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$. Tuttavia questo è un assurdo, dal momento che le 1-varietà compatte con bordo finito hanno un numero pari di elementi sul bordo per il Corollario 4.60. Quindi f non può esistere. \square

Lemma 4.62.

Ogni mappa liscia $f : D^n \rightarrow D^n$ ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che f non ammetta alcun punto fisso. Definiamo u_x in modo tale che:

$$u_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}, \quad \forall x \in D^n.$$

Poiché f non ammette punti fissi, $u_x \neq 0$ per ogni $x \in D^n$.

Costruiamo $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$ liscia tale per cui $f(x) = x + tu_x$ e $f|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$.

Allora deve valere $\|f(x)\|^2 = 1$, e quindi:

$$\begin{aligned} t^2 + 2(x \cdot u_x)t + (\|x\|^2 - 1) &= 0 \implies \\ t_{\pm} &= -x \cdot u_x \pm \sqrt{(x \cdot u_x)^2 - \|x\|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Scegliamo $t \stackrel{\text{def}}{=} t_+$. Affinché f sia liscia, occorre che l'espressione $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot u_x)^2 - \|x\|^2 + 1$ dentro la radice quadrata in t sia sempre maggiore di 0.

Osserviamo che per $x \in D^n$ si ha $h(x) \geq (x \cdot u_x)^2 \geq 0$. Se allora $h(x) > (x \cdot u_x)^2$, $h(x)$ è maggiore strettamente di 0. Se invece $h(x) = (x \cdot u_x)^2$, necessariamente $\|x\|^2 = 1$, e quindi $x \in S^{n-1}$. Ma allora:

$$x \cdot u_x = \frac{1 - x \cdot f(x)}{\|x - g(x)\|}.$$

Dal momento che x non può essere un punto fisso di f , $x \cdot f(x)$ non può essere uguale a 1; quindi $x \cdot u_x > 0$ per $x \in S^{n-1}$. Si conclude allora che $h(x) > 0$ per ogni $x \in D^n$, e quindi f è una funzione liscia.

Si verifica facilmente che $f|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Questo tuttavia è un assurdo per il Lemma 4.61, f . Quindi f ammette almeno un punto fisso. \square

Teorema 4.63 (del punto fisso di Brouwer).

Ogni mappa continua $f : D^n \rightarrow D^n$ ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che f non ammetta alcun punto fisso. Poiché D^n è compatto, per il Teorema di approssimazione di Weierstrass, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione polinomiale $P_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale per cui $\|P_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$ per ogni $x \in D^n$.

Osserviamo che:

$$\|P_\varepsilon(x)\| \leq \|P_\varepsilon(x) - f(x)\| + \|f(x)\| < \varepsilon + 1,$$

quindi $Q_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon+1}P_\varepsilon$ si restringe su D^n a un'endofunzione $Q_\varepsilon|_{D^n} : D^n \rightarrow D^n$.

Dal momento che f non ammette alcun punto fisso, $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in D^n} \|f(x) - x\|$ è tale per cui $\mu > 0$.

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \|Q_\varepsilon(x) - f(x)\| &= \frac{1}{\varepsilon+1}(\|P_\varepsilon(x) - f(x)\| + \varepsilon\|f(x)\|) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}. \end{aligned}$$

Scegliendo allora ε tale per cui $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} < \mu$, Q_ε non può ammettere punti fissi: un punto fisso violerebbe infatti la minimalità di μ secondo la scorsa disuguaglianza. Tuttavia Q_ε è una funzione liscia, e per il Lemma 4.62 deve ammettere punti fissi, f . Dunque f ammette almeno un punto fisso. \square

4.5 Teoria del grado modulo 2

4.5.1 Omotopie C^∞

Osservazione 4.64 ($M \times [0, 1]$ è una varietà con bordo).

Sia M una m -varietà senza bordo. Allora, per la Proposizione 4.13, $M \times \mathbb{R}$ è una $(m+1)$ -varietà senza bordo.

Consideriamo la mappa liscia $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui $f(x, t) = t(t-1)$. Allora per il Teorema 4.53 $\{f \leq 0\} = M \times [0, 1]$ è una $(m+1)$ -varietà con bordo $\{f = 0\} = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$.

Definizione 4.65 (Omotopia C^∞ e funzioni C^∞ -omotope).

Siano f e g due funzioni da una varietà M in una N . Un'omotopia C^∞ da f a g è una funzione liscia $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tale per cui:

- $H(-, 0) = f$,
- $H(-, 1) = g$.

Definiamo inoltre:

$$H_t \stackrel{\text{def}}{=} H(-, t).$$

Due funzioni f e g per le quali esiste un'omotopia da f a g si dicono C^∞ -omotope.

Osservazione 4.66.

È immediato verificare che “essere C^∞ -omotope” è una relazione di equivalenza per le funzioni lisce da M a N .

Lemma 4.67 (di omotopia).

Siano f e g due funzioni C^∞ -omotope da una varietà M in una N , con M compatta e $\dim M = \dim N$. Se $y \in N$ è un valore regolare sia per f che per g , allora:

$$|f^{-1}(y)| \equiv |g^{-1}(y)| \pmod{2}.$$

Dimostrazione.

Sia H una omotopia C^∞ da f a g . Allora, poiché M è compatta, per il Lemma 4.31:

- esiste un intorno V_1 di $y \in N$ su cui $|f^{-1}(-)|$ è costante;
- esiste un intorno V_2 di $y \in N$ su cui $|g^{-1}(-)|$ è costante.

È sufficiente allora mostrare la tesi per un qualsiasi valore $y' \in V_1 \cap V_2$; poiché i valori regolari sono densi per il Teorema di Brown (per le varietà, Corollario 4.34), possiamo prendere $y' \in V_1 \cap V_2$ valore regolare di H .

Allora $H^{-1}(y')$ è una varietà di dimensione 1, il cui bordo ha un numero pari di punti per il Corollario 4.60.

Osserviamo che $\partial(M \times [0, 1]) = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$. Allora:

$$\partial H^{-1}(y') = (f^{-1}(y') \times \{0\}) \sqcup (g^{-1}(y') \times \{1\}).$$

Quindi:

$$0 \equiv |\partial H^{-1}(y')| \equiv |f^{-1}(y')| + |g^{-1}(y')| \pmod{2}.$$

\square

4.5.2 Isotopie e lemma di omogeneità

Definizione 4.68 (Isotopia).

Una omotopia C^∞ $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ si dice **isotopia** se per ogni $t \in [0, 1]$, $H(-, t)$ è un diffeomorfismo liscio.

Definizione 4.69 (Isotopia a supporto compatto).

Un'isotopia $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ si dice **a supporto compatto** se esiste un compatto $K \subseteq N$ tale per cui $H(-, t)|_{N \setminus K} = \text{id}_{N \setminus K}$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Definizione 4.70 (Punti isotopi di una varietà).

Due punti $y, z \in N$, dove N è una varietà, si dicono **isotopi** se esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ con $h(y) = z$ e un'isotopia a supporto compatto da h a id_N .

Osservazione 4.71.

È immediato osservare che la relazione “essere isotopi” sui punti di una varietà è una relazione di equivalenza.

Lemma 4.72.

Le classi di equivalenza della relazione “essere isotopi” sui punti di una varietà (senza bordo) M sono aperti della varietà.

Dimostrazione.

Sia x un punto di M . Supponiamo M sia una $(n+1)$ -varietà. Usando le carte locali, eventualmente riparametrizzate per avere come immagine una palla di centro 0, è sufficiente mostrare che per ogni r , esiste $0 < r_0 \leq r$ tale per cui tutti i punti di $B_{r_0}(0) \subseteq B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sono isotopi a 0.

Possiamo ridurre il problema ulteriormente concentrandoci sui punti della forma $z = (a, 0, \dots, 0)$ con $a < r_0$, dal momento che una rotazione permette poi di rendere isotopi tutti gli altri punti di $\partial B_a(0)$. Se infatti H è un'isotopia a supporto compatto che porta z in 0, allora:

$$H'(-, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_\theta^{-1} \circ H(-, t) \circ R_\theta$$

è l'isotopia cercata, dove R_θ è l'opportuna rotazione scelta.

Siano $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ due funzioni di test (*bump function*) lisce con $\rho(0) = \sigma(0) = 1$ e:

$$|x| > 1 \implies \rho(x) = 0, \quad \|y\| > 1 \implies \sigma(y) = 0.$$

Osserviamo che:

$$|x| > \varepsilon \implies \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \|y\| > \delta \implies \sigma\left(\frac{y}{\delta}\right) = 0.$$

Scelti allora ε e δ di modo che $\varepsilon^2 + \delta^2 < r_0^2$, definiamo allora l'omotopia C^∞ H tale per cui:

$$H : \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^{n+1}} \times [0, 1] \rightarrow \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^{n+1}},$$

$$H(x, y, t) = \left(x + at\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\sigma\left(\frac{y}{\delta}\right), y \right).$$

Osserviamo subito che $H_0 = \text{id}_N$, $H_1(0) = z$ e che H_t fissa tutto ciò che è fuori da $B_{r_0}(0)$. Mostriamo che per r_0 sufficientemente piccolo H_t è un diffeomorfismo.

Lo jacobiano di H_t è il seguente:

$$JH_t = \left(\begin{array}{c|c} 1 + \frac{at}{\varepsilon}\sigma\left(\frac{y}{\delta}\right)\rho'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & * \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right).$$

Si verifica facilmente che si può scegliere r_0 , e successivamente ε e δ in modo tale che:

$$\left| \frac{at}{\varepsilon}\sigma\left(\frac{y}{\delta}\right)\rho'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| < 1, \quad \forall a, x, y,$$

e conseguentemente $\det(JH_t) > 0$, da cui si deduce che H_t è un diffeomorfismo locale. Analogamente, H_t è bigettiva sulle rette $\{y = \text{cost.}\}$ dal momento che la derivata sulle rette è strettamente positiva. Dunque H_t è bigettiva e diffeomorfismo locale, e quindi è diffeomorfismo.

Si conclude che H è l'isotopia cercata, e quindi ogni classe di isotopia è aperta. \square

Lemma 4.73 (di omogeneità).

Sia N una varietà connessa e siano y, z due suoi punti. Allora y e z sono isotopi.

Dimostrazione.

Poiché N è connessa, per il Lemma 4.72 esiste allora un'unica classe di equivalenza per la relazione “essere isotopi”, da cui segue immediatamente la tesi. \square

4.5.3 Grado modulo 2 e buona definizione

Teorema 4.74.

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M chiusa (ovverosia anche compatta) e N connessa. Siano y e z due valori regolari di una funzione $f : M \rightarrow N$ liscia. Allora:

$$|f^{-1}(y)| \equiv |f^{-1}(z)| \pmod{2}.$$

Dimostrazione.

Poiché N è connessa, per il Lemma 4.73 esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ con $h(y) = z$ e un'isotopia a supporto compatto $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ da id_N a h .

$$M \times [0, 1] \xrightarrow{f \times \text{id}_{[0,1]}} N \times [0, 1] \xrightarrow{H} N$$

Poiché y è regolare per f e h è diffeomorfismo, si deduce che z è regolare per $h \circ f$. Consideriamo l'omotopia $H' = H \circ (f \times \text{id}_{[0,1]})$. Osserviamo che $H'_0 = f$ e che $H'_1 = h \circ f$. Quindi, per il Lemma 4.67, si conclude che:

$$|f^{-1}(z)| \equiv |(h \circ f)^{-1}(z)| \equiv |f^{-1}(y)| \pmod{2}.$$

\square

Definizione 4.75 (Grado modulo 2 di una funzione liscia).

Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione liscia da una varietà compatta M a una di stessa dimensione e connessa N . Allora si definisce il **grado modulo 2 di f** come:

$$\boxed{\text{deg}_2 f \stackrel{\text{def}}{=} |f^{-1}(y)| \pmod{2},}$$

dove y è un qualsiasi valore regolare di f .

Lemma 4.76.

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M chiusa (ovverosia anche compatta) e N connessa. Se $f : M \rightarrow N$ è liscia, allora i valori regolari di f formano un aperto di N .

Dimostrazione.

Dall'Osservazione 4.28 sappiamo che i punti regolari di f formano un aperto di M ; dunque i punti critici formano un chiuso di M . Dacché M è compatta, in particolare i punti critici formano un compatto di M . Tramite f , si deduce che i valori critici formano un compatto di N , che, essendo N T2, è dunque chiuso in N . Quindi i valori regolari formano un aperto. \square

Teorema 4.77.

Siano M e N varietà della stessa dimensione. Sia M chiusa (ovverosia anche compatta) e N connessa. Se f e g sono due mappe lisce C^∞ -omotope da M in N , allora:

$$\deg_2 f = \deg_2 g.$$

Dimostrazione.

Per il Lemma 4.76, i valori regolari di f formano un aperto in N . Allora, per il Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), esiste in questo aperto anche un valore regolare di g . Per il Lemma 4.67, dunque f e g condividono lo stesso grado modulo 2. \square

Corollario 4.78.

La mappa costante $c_{x_0} : S^n \rightarrow S^n$ non è C^∞ -omotopa a id_{S^n} .

Dimostrazione.

Poiché c_{x_0} non è surgettiva, $\deg_2 c_{x_0} = 0$ (ogni punto diverso da x_0 è valore regolare con controimmagine vuota); mentre $\deg_2 \text{id}_{S^n} = 1$. Quindi per il Teorema 4.77 le due mappe non possono essere C^∞ -omotope. \square

4.6 Varietà orientate

4.6.1 Orientazione di basi su spazi vettoriali, orientazione canonica di \mathbb{R}^n

Definizione 4.79 (Stessa orientazione).

Si dice che due basi (ordinate) $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di un \mathbb{R} -spazio vettoriale finito-dimensionale **hanno la stessa orientazione** se la matrice del cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' ha determinante positivo.

Osservazione 4.80.

È immediato verificare che “avere la stessa orientazione” è una relazione d'equivalenza sulle basi dello spazio in esame avente solo due classi di equivalenza per le orientazioni.

Definizione 4.81 (Orientazione).

Definiamo **orientazione** una classe di equivalenza per la relazione “avere la stessa orientazione”.

Data un'orientazione Θ indichiamo con $-\Theta$ l'unica altra classe di equivalenza.

Definizione 4.82 (Orientazione canonica).

Si definisce l'**orientazione canonica** Θ_0 di \mathbb{R}^n come la classe di equivalenza indotta dall'orientazione della base canonica.

Osservazione 4.83.

Un isomorfismo $L : V \rightarrow V'$ induce una bigezione dalle orientazioni di V a quelle di V' tramite:

$$[\mathcal{B}] \mapsto [L(\mathcal{B})].$$

Infatti la matrice di cambio di base è invariante per isomorfismo.

Indicheremo tale mappa con il simbolo dell'isomorfismo da cui è indotta.

Definizione 4.84 (Segno di una base).

Dato uno spazio vettoriale V orientato con Θ , si definisce il **segno** di una base \mathcal{B} come:

$$\text{sgn}_\Theta(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \mathcal{B} \sim \Theta, \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4.6.2 Orientazione su prodotti di spazi vettoriali

Definizione 4.85 (Orientazione prodotto).

Siano V e W due \mathbb{R} -spazi vettoriali di dimensione finita. Se Θ^V è un'orientazione di V e Θ^W lo è di W , allora si definisce l'**orientazione prodotto** $\Theta^V \times \Theta^W$ su $V \times W$ come l'orientazione indotta dalla giustapposizione di \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W :

$$\mathcal{B}_V \sqcup \mathcal{B}_W \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_V \times \{0_W\} \cup \{0_V\} \times \mathcal{B}_W,$$

dove \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W sono basi di V e W con $[\mathcal{B}_V] = \Theta^V$ e $[\mathcal{B}_W] = \Theta^W$.

Osservazione 4.86 (Regola dei segni per l'orientazione prodotto).

Siano V e W \mathbb{R} -spazi orientati con Θ^V e Θ^W . Siano \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W basi di V e W . Sia M_V la matrice di cambio di base da una base positiva di V a \mathcal{B}_V . Sia M_W l'analogo per W .

La matrice di cambio di base dalla giustapposizione delle basi positive alla giustapposizione di \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W è esattamente:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_V & 0 \\ \hline 0 & M_W \end{array} \right).$$

Quindi vale la seguente *regola dei segni*:

$$\text{sgn}_{\Theta^V \times \Theta^W}(\mathcal{B}_V \sqcup \mathcal{B}_W) = \text{sgn}_{\Theta^V}(\mathcal{B}_V) \text{sgn}_{\Theta^W}(\mathcal{B}_W).$$

4.6.3 Orientazione su varietà e prime proprietà

Definizione 4.87 (m -varietà orientata, $m > 1$ o $\partial M = \emptyset$).

Una **varietà orientata di dimensione m** (con $m > 1$ o $\partial M = \emptyset$) è una coppia (M, Θ) , dove M è una m -varietà, eventualmente con bordo, e $\Theta = \{\Theta_x\}_{x \in M}$ è una famiglia di orientazioni degli spazi tangenti dei punti di M tale per cui:

Per ogni $x \in M$ esiste una parametrizzazione locale $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U) \subseteq M$ con $dg_u(\Theta_0) = \Theta_{g(u)}$ per ogni $u \in U$ (**condizione di compatibilità di g con Θ**).

Una varietà M per cui esiste una famiglia di orientazioni tali per cui (M, Θ) è orientata si dice **orientabile**.

Osservazione 4.88.

Sia $(M, \Theta = \{\Theta_x\}_{x \in M})$ una m -varietà orientata (con $\dim M > 1$ o $\partial M = \emptyset$). Allora si può definire l'**orientazione opposta** $-\Theta$:

$$-\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{-\Theta_x\}_{x \in M}.$$

In effetti $(M, -\Theta)$ è orientata: presa una parametrizzazione locale g compatibile con Θ , ristretta e traslata eventualmente a una palla di centro 0, è sufficiente precomporla con una riflessione rispetto a un asse della palla per ottenere una parametrizzazione locale compatibile con $-\Theta$.

Questo ragionamento non è attuabile sul bordo di una 1-varietà: su H^1 una riflessione come quella sopracitata non è possibile. Questo ci suggerisce di modificare la definizione per il caso delle 1-varietà bordate:

Definizione 4.89 (1-varietà compatta orientata bordata). Sia M una 1-varietà connessa compatta con bordo (questo succede, per il Corollario 4.59, se e solo se $M \cong [0, 1]$). Allora un'orientazione su M è per definizione una famiglia $\Theta = \{d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0,1]}$ dove $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ è un diffeomorfismo.

Se M è sconnessa, un'orientazione è un'orientazione su ciascuna componente connessa.

Osservazione 4.90.

Se M è una 1-varietà connessa compatta con bordo, e $\Theta = \{d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0,1]}$ è una sua orientazione, allora

$$-\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{-d\varphi_t(\Theta_0)\}_{t \in [0,1]}$$

è una sua altra orientazione, indotta dalla precomposizione del diffeomorfismo φ con una riflessione di $[0, 1]$ (e.g., $\psi(x) = 1 - x$).

Proposizione 4.91.

Una varietà orientata e connessa, eventualmente con bordo, ammette esattamente due orientazioni.

Dimostrazione.

Poiché una varietà orientata ammette almeno due orientazioni (vd. Osservazione 4.88 e Osservazione 4.90), per concludere la dimostrazione mostriamo che esistono al più due orientazioni.

Si fissi un'orientazione Θ per la varietà M . Sia Θ' un'altra orientazione. Dividiamo la dimostrazione in due casi:

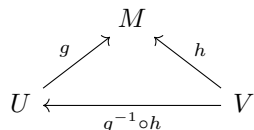
- $\boxed{\dim M > 1 \text{ o } \partial M = \emptyset}$ Si definiscano i seguenti due insiemi:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \Theta_x = \Theta'_x\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \Theta_x = -\Theta'_x\}.$$

Osserviamo che A e B sono disgiunti, e che la loro unione è la varietà M . Poiché M è connessa, mostrando che A e B sono aperti, necessariamente uno dei due deve essere vuoto, da cui la tesi.

Senza perdita di generalità, mostriamo solo che A è aperto. Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x compatibile con Θ e $g(u) = x$, e sia $h : V \rightarrow h(V)$ una parametrizzazione compatibile con Θ' e $h(v) = x$. Assumiamo senza perdita di generalità che $g(U) = h(V)$.



Osserviamo che:

$$dh_{v'} = dg_{g^{-1}(h(v'))} \circ d(g^{-1} \circ h)_{v'}.$$

Poiché g è compatibile con Θ , si ha $dg(\Theta_0) = \Theta_x$, e così per h si ha $dh_x(\Theta_0) = \Theta'_x$. Quindi, per la precedente equazione:

$$dg_u(\Theta_0) = dh_v(\Theta_0) \implies d(g^{-1} \circ h)_v(\Theta_0) = \Theta_0.$$

Pertanto $\det(J(g^{-1} \circ h)_v) > 0$. Per continuità esiste allora un intorno J di v in cui:

$$\det(J(g^{-1} \circ h)_{v'}) > 0, \quad \forall v' \in J.$$

Questo si traduce nell'avere $\Theta_{h(v')} = \Theta'_{h(v')}$ su tutto J , e quindi $h(J)$ è un aperto di M contenente x e contenuto in A ; dunque A è aperto.

- $\boxed{M \cong [0, 1]}$ Se φ e ψ sono due diffeomorfismi da $[0, 1]$ in M che inducono Θ e Θ' , allora $\varphi^{-1} \circ \psi$ è un diffeomorfismo da $[0, 1]$ in sé. In quanto tale, la sua derivata è ovunque non nulla, e il suo segno determina se $\Theta' = \Theta$ o $-\Theta$. □

Definizione 4.92 (Base positiva o negativa per $T_x M$).

Sia (M, Θ) una varietà orientata. Allora una base per $T_x M$ si dice **positiva** se è della stessa orientazione di Θ_x ; altrimenti si dice **negativa**.

Definizione 4.93 (Varietà di orientazione opposta).

Data (M, Θ) una varietà orientata, indichiamo con $-M$ la varietà $(M, -\Theta)$, dove $-\Theta$ è l'unica altra orientazione possibile.

Osservazione 4.94.

Una varietà è sempre "localmente orientabile": è sufficiente prendere l'orientazione indotta da un'unica parametrizzazione locale.

4.6.4 Orientabilità di m -varietà immerse in \mathbb{R}^m

Proposizione 4.95 (m -varietà immerse in \mathbb{R}^m sono orientabili).

Sia M una m -varietà immersa in \mathbb{R}^m . Allora M è orientabile secondo l'orientazione canonica di \mathbb{R}^m .

Dimostrazione.

Sia $x \in M$. Osserviamo che deve valere necessariamente $T_x M = \mathbb{R}^m$, dal momento che $T_x M$ è uno spazio vettoriale m -dimensionale immerso in \mathbb{R}^m . Definiamo allora $\Theta_x \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_0$, dove Θ_0 è l'orientazione canonica di \mathbb{R}^m .

Se $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione locale di x , possiamo restringere e riparametrizzare g in modo tale che il suo dominio sia una semipalla di \mathbb{R}^m . Se dg_+ preserva l'orientazione canonica, scegliamo g come parametrizzazione

locale compatibile per $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{\Theta_x\}_{x \in M}$. Altrimenti possiamo precomporre g con una riflessione rispetto all'asse della semipalla e ottenere una nuova parametrizzazione, stavolta compatibile.

Infatti, g si estende a un diffeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^m e, per il Teorema della permanenza del segno, lo jacobiano deve essere localmente o positivo o negativo, e quindi g preserva localmente l'orientazione. Dunque M è orientabile secondo l'orientazione canonica di \mathbb{R}^m . \square

4.6.5 Orientazione nel prodotto di due varietà orientate

Definizione 4.96 (Orientazione prodotto per varietà).

Siano (M, Θ^M) e (N, Θ^N) due varietà orientate. Si definisce l'**orientazione prodotto** su $M \times N$ come l'orientazione $\Theta^{M \times N}$ tale per cui:

$$\Theta_{(x,y)}^{M \times N} = \Theta_x^M \times \Theta_y^N, \quad \forall x \in M, y \in N$$

dove $\Theta_x^M \times \Theta_y^N$ è l'orientazione prodotto su $T_{(x,y)}M \times N \cong T_xM \times T_yN$ indotta da Θ_x^M e Θ_y^N .

Il prodotto di parametrizzazioni locali compatibili induce parametrizzazioni locali compatibili con l'orientazione prodotto appena definita.

4.6.6 Semispazio interno o esterno

Osservazione 4.97 (Il semispazio interno è ben definito).

L'orientazione locale di una m -varietà M con bordo determina sempre la scelta di uno dei semispazi di $T_xM \setminus T_x\partial M$ per ogni x sul bordo ∂M .

Se infatti $g : U \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione di un punto $x \in \partial M$ con $g(u) = x$, il semispazio scelto è proprio:

$$dg_u(H^m \setminus \partial H^m).$$

Questo semispazio non dipende dalla parametrizzazione scelta. Se infatti $h : V \rightarrow h(V)$ è un'altra parametrizzazione con $h(v) = x$, a meno di restringere le mappe possiamo considerare la funzione di transizione $h^{-1} \circ g$. Osserviamo che:

$$dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Mostrando allora che $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m \setminus \partial H^m) = H^m \setminus \partial H^m$, otteniamo la tesi.

Osserviamo che $h^{-1} \circ g$ è una funzione da un aperto intersecante il bordo di H^m in un altro aperto dello stesso tipo. Pertanto $d(h^{-1} \circ g) : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ deve mandare lo spazio tangente $T_u\partial U = \partial H^m$ in $T_v\partial V = \partial H^m$, dal momento che $h^{-1} \circ g$ si restringe a una parametrizzazione di ∂V a partire da ∂U .

Quindi $J(h^{-1} \circ g)_u$ deve essere della seguente forma:

$$J(h^{-1} \circ g)_u = \begin{pmatrix} * & | & * \\ \hline 0 & | & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se $h^{-1} \circ g = (\Psi_1, \Psi_2)$, con Ψ_1 funzione a valori in \mathbb{R}^{m-1} e Ψ_2 a valori in \mathbb{R} , allora:

$$\lambda = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_m}(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\Psi_2(x + \varepsilon x_m)}^{\geq 0} - \overbrace{\Psi_2(x)}^{=0}}{\varepsilon} \geq 0.$$

Quindi $d(h^{-1} \circ g)_u(H^m) = H^m$, da cui segue poi facilmente la tesi.

Definizione 4.98.

Data una m -varietà bordata M e un punto x appartenente al bordo ∂M , si definisce il **semispazio interno** riferito a x come:

$$dg_u(H^m \setminus \partial H^m),$$

dove g è una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$. I suoi vettori sono detti **interni**.

Si dice **semispazio esterno** il semispazio complementare a quello interno rispetto al taglio dell'iperpiano $T_x\partial M$ in T_xM , e i suoi vettori sono detti **esterni**.

Lemma 4.99.

Sia $M \cong [0, 1]$. Si fissi un diffeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$. Allora $d\varphi_0(1)$ è un vettore interno, mentre $d\varphi_1(1)$ è esterno.

Dimostrazione.

Si fissi ε tale per cui $0 < \varepsilon < 1$. Poniamo $I_0 = [0, \varepsilon]$ e $I_1 = (\varepsilon, 1]$. Osserviamo che $\varphi|_{I_0}$ è una parametrizzazione locale di $\varphi(0)$, una volta identificato I_1 naturalmente con H^1 .

Allora $d\varphi_0(1)$ è interno dal momento che $d\varphi_0^{-1}(d\varphi_0(1)) = 1 > 0$.

Per quanto riguarda invece $\varphi(1)$, una parametrizzazione locale è data su I_1 con H^1 secondo $\Psi(t) = \varphi(1 - t)$.

Osserviamo che $d\Psi_0^{-1}(d\varphi_1(1)) = -1 < 0$, e dunque $d\varphi_1(1)$ è invece esterno. \square

4.6.7 Orientazione sul bordo della varietà

Osservazione 4.100 (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – *esistenza*).

Sia $x \in \partial M$ un punto della m -varietà orientata (M, Θ) , con $m > 1$. Sia $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$ che sia compatibile con l'orientazione Θ . Allora:

- per definizione, $dg_u(-e_m)$ è un vettore *esterno* per x ;
- $\{dg_u(e_i)\}_{i=1, \dots, m-1}$ è una base di $T_x\partial M$, dacché $g|_{\partial H^m}$ si identifica come una parametrizzazione locale di x in ∂M ;
- $\{dg_u(e_i)\}_{i=1, \dots, m}$ è una base positiva di T_xM , dacché g è compatibile e $\{e_i\}_i$ ha l'orientazione canonica in \mathbb{R}^m .

Osservazione 4.101 (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – *unicità*).

Sia $x \in \partial M$ un punto della m -varietà orientata (M, Θ) , con $m > 1$. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di T_xM tale per cui v_1 un

vettore esterno per $x \in \partial M$ e $\{v_2, \dots, v_n\}$ è base di $T_x \partial M$.

Sia $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ un'altra tale base di $T_x M$. Sia $g : U \rightarrow g(U)$ una parametrizzazione locale di x con $g(u) = x$. Allora dg_u è un isomorfismo, e in quanto tale lascia invariate le relazioni di orientazioni delle basi di $T_u U = \mathbb{R}^m$ quando portate in $T_x M$.

Sia $w_i = dg_u^{-1}(v_i)$ e sia $w'_i = dg_u^{-1}(v'_i)$. Dal momento che v_1 e v'_1 sono vettori esterni, si deve avere necessariamente $(w_1)_m, (w'_1)_m < 0$. Dal momento che $g|_{\partial H^m}$ si identifica naturalmente come una parametrizzazione locale di x in ∂M , e che i v_i e i v'_i per $i > 1$ formano una base di $T_x \partial M$, si ha $(w_i)_m = (w'_i)_m = 0$ per ogni $i > 1$.

Dunque la matrice di cambio di base da $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ è della seguente forma:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline * & A \end{array} \right),$$

dove $\lambda > 0$ affinché w_1 e w'_1 abbiano ancora lo stesso segno sull'ultima coordinata. Dal momento che $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ sono basi positive di $T_x M$, allora hanno stesso orientazione, e quindi $\det(M) > 0$. Ne segue che $\det(A) > 0$.

Osserviamo che A è proprio la matrice di cambio di base da $\{v_2, \dots, v_n\}$ a $\{v'_2, \dots, v'_n\}$. Dunque queste due basi hanno stessa orientazione.

Osservazione 4.102 (L'orientazione indotta sul bordo è ben definita – è effettivamente un'orientazione).

Sia $x \in \partial M$ un punto della m -varietà orientata (M, Θ) , con $m > 1$. Denotiamo con $\Theta_x^{\partial M}$ l'orientazione indotta da $\{v_2, \dots, v_n\}$ su $T_x \partial M$ da una base positiva $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di $T_x M$ con v_1 esterno e $\{v_2, \dots, v_n\}$ base di $T_x \partial M$.

Definiamo:

$$\Theta^{\partial M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Theta_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}.$$

Data $g : U \subseteq H^m \rightarrow g(U) \subseteq M$ parametrizzazione locale compatibile di $x \in \partial M$ in M , $g|_{\partial U}$, identificata come parametrizzazione da \mathbb{R}^{m-1} , è compatibile rispetto a $\Theta^{\partial M}$, a meno di restringimento del dominio a una palla con conseguente riflessione rispetto a un asse.

Si può infatti estendere in tal caso la base canonica di $\mathbb{R}^{m-1} \cong \partial H^m$ a una base di \mathbb{R}^m con l'aggiunta di un vettore la cui immagine tramite dg_- risulta essere sempre esterna. Quindi $\Theta^{\partial M}$ è un'orientazione per ∂M .

Definizione 4.103 (Orientazione indotta sul bordo).

Sia (M, Θ) una m -varietà bordata e orientata con $m > 1$. Per $x \in \partial M$ denotiamo con $\Theta_x^{\partial M}$ l'orientazione indotta da $\{v_2, \dots, v_n\}$ su $T_x \partial M$ da una base positiva $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di $T_x M$ con v_1 esterno e $\{v_2, \dots, v_n\}$ base di $T_x \partial M$.

Si definisce allora $\Theta^{\partial M} = \{\Theta_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}$ come l'**orientazione indotta sul bordo** (o *orientazione di bordo*) per ∂M .

Per $M \cong [0, 1]$ orientata tramite un diffeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$, si associa -1 a $\varphi(0)$ e $+1$ a $\varphi(1)$.

Corollario 4.104.

Sia M una m -varietà orientabile immersa in \mathbb{R}^m . Allora ∂M è orientabile con l'orientazione indotta sul bordo dall'orientazione canonica di \mathbb{R}^m .

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla Proposizione 4.95. \square

Corollario 4.105.

S^n è orientabile per ogni n .

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Corollario 4.104, dacché $S^n = \partial D^{n+1}$ e D^{n+1} è una $(n+1)$ -varietà immersa in \mathbb{R}^{n+1} . \square

4.7 Teoria del grado su \mathbb{Z}

4.7.1 Grado intero rispetto a un valore regolare

Definizione 4.106 (Segno di un differenziale in un punto). Sia M una varietà orientata con Θ^M e N orientata con Θ^N e $\dim M = \dim N$. Se $f : M \rightarrow N$ è una mappa liscia, si definisce il **segno di df_x** per un punto regolare $x \in M$ come:

$$\text{sgn}(df_x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x(\Theta^M) = \Theta^N, \\ -1 & \text{se } df_x(\Theta^M) = -\Theta^N. \end{cases}$$

Definizione 4.107 (Grado intero di un valore regolare).

Sia M una varietà chiusa e sia N una varietà connessa con $\partial N = \emptyset$ e $\dim M = \dim N$. Sia M orientata con Θ^M e sia N orientata con Θ^N .

Se $y \in N$ è regolare per $f : M \rightarrow N$ liscia, si definisce il **grado di f rispetto a y** come:

$$\text{deg}(f; y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(df_x).$$

Osservazione 4.108 (Il grado intero è localmente costante).

Se $y \in N$ è regolare, possiamo scegliere per il Lemma 4.31 un intorno I_1 sul quale $|f^{-1}(-)|$ è costante.

Inoltre, per il Teorema della permanenza del segno applicato sul determinante dello jacobiano di $h^{-1} \circ f \circ g$, dove $g : U \rightarrow g(U)$ parametrizza localmente $x \in f^{-1}(y)$ e $h : V \rightarrow h(V)$ un intorno di y , esiste un intorno I_2 di y sul quale le orientazioni sono preservate allo stesso modo in cui lo sono preservate dalle controimmagini di y .

Poiché i valori regolari sono aperti (vd. Lemma 4.76), possiamo allora prendere un intorno aperto di valori regolari in $I_1 \cap I_2$ entro cui $\text{deg}(f; -)$ è costante; quindi il grado intero è *localmente* costante.

4.7.2 Grado di una mappa estendibile dal bordo

Lemma 4.109 (Il grado di una mappa estendibile dal bordo è nullo).

Sia X una varietà compatta e orientata con bordo non nullo. Sia N una varietà connessa, orientata, senza bordo e con $\dim X = \dim N + 1$. Sia $F : X \rightarrow N$ una mappa liscia.

Se $y \in N$ è un valore regolare per $f \stackrel{\text{def}}{=} F|_{\partial X}$, allora $\deg(f; y) = 0$.

Dimostrazione.

Denotiamo con n la dimensione di X .

Grazie all'Osservazione 4.108, sappiamo che esiste un intorno di y fatto di valori regolari di f su cui $\deg(f; -)$ è costante. Possiamo prendere allora in questo intorno, per il Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), un valore regolare z di F . Per definizione, z è valore regolare sia di F che di f ; mostrando che $\deg(f; z) = 0$, mostriamo dunque anche che $\deg(f; y) = 0$, per costruzione.

Per il Teorema 4.57, allora $F^{-1}(z)$ è una 1-varietà compatta e chiusa topologicamente con bordo $F^{-1}(z) \cap \partial M = f^{-1}(z)$. Per il Corollario 4.59, $F^{-1}(z)$ è unione di archi (con 2 punti sul bordo ciascuno) e cerchi (che non hanno bordo). Per mostrare la tesi è sufficiente mostrare che per ogni arco i punti di bordo abbiano segno opposto sul differenziale, in modo tale che la somma complessiva dei segni sia ancora nulla.

Sia $A \subseteq F^{-1}(z) \subseteq X$ un tale arco. Fissiamo un diffeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$. Poniamo $v_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} d\varphi_t(1)$. Allora vale:

$$T_{\varphi(t)}X = \underbrace{T_{\varphi(t)}A}_{=\text{span}(v_1(t))} \oplus (T_{\varphi(t)}A)^\perp,$$

dove ricordiamo che, per una generalizzazione della Proposizione 4.36, $dF_{\varphi(t)}|_{(T_{\varphi(t)}A)^\perp} : (T_{\varphi(t)}A)^\perp \rightarrow T_zN$ è un isomorfismo.

Fissiamo una base positiva $\{w_2, \dots, w_n\}$ di T_yN . Possiamo allora porre:

$$v_i(t) = dF_{\varphi(t)}|_{(T_{\varphi(t)}A)^\perp}^{-1}(w_i), \quad i = 2, \dots, n.$$

Poiché $v_1(t)$ è ortogonale agli altri $v_i(t)$, $\{v_i(t)\}_i$ è una base di $T_{\varphi(t)}X$.

Se poniamo $A \stackrel{\text{def}}{=} \{t \mid \{v_i(t)\}_i \text{ positiva}\} \subseteq [0, 1]$, allora A è un aperto di $[0, 1]$. Infatti, per il Teorema della permanenza del segno applicato allo jacobiano di una parametrizzazione locale, in un intorno di t_0 si mantiene la stessa orientazione. Analogamente anche il complementare di A è aperto. Dacché $[0, 1]$ è connesso, allora uno tra A e il suo complementare è vuoto: in altre parole $\{v_i(t)\}_i$ è sempre positiva per ogni $t \in [0, 1]$, o altrimenti è sempre negativa.

A meno di invertire l'orientazione di φ usando al suo posto $\varphi(1-t)$, possiamo assumere che $\mathcal{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{v_i(t)\}_i$ sia sempre positiva.

Mostriamo che $\text{sgn}(df_{\varphi(0)}) = -1$. Sia $\mathcal{B}' \stackrel{\text{def}}{=} \{v_1(0), v_2'(0), \dots, v_n'(0)\}$ una base di $T_{\varphi(0)}\partial X$ tale per cui $\{dF_{\varphi(0)}(v_i'(0))\}_{i \geq 2}$ è una base positiva di T_zN . Se mostriamo che \mathcal{B} e \mathcal{B}' hanno la stessa orientazione, dal momento che \mathcal{B} è positiva e $v_1(0)$ è interno per il Lemma 4.99, si deduce dalla definizione di orientazione di bordo che $\{v_2'(0), \dots, v_n'(0)\}$ è negativa; in particolare $df_{\varphi(0)}$ invertirebbe l'orientazione, e quindi avrebbe segno -1 .

Consideriamo la matrice di cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' , della seguente forma:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

Osserviamo che B è la matrice di cambio di base ottenuta togliendo ad entrambi le basi il vettore $v_1(0)$. Per costruzione, queste tali basi hanno la stessa orientazione dal momento che $dF_{\varphi(0)}$ mantiene invariate le orientazioni. Dunque $\det(B) > 0$, da cui si deduce che $\det(M) > 0$, e quindi che \mathcal{B} e \mathcal{B}' hanno effettivamente la stessa orientazione.

Per $\varphi(1)$ il ragionamento è del tutto analogo, ma essendo $v_1(1)$ esterno per il Lemma 4.99, il segno sarà invece $+1$. Questo conclude la dimostrazione per le osservazioni fatte in precedenza. \square

4.7.3 Passaggio per omotopia e buona definizione del grado intero di una mappa

Lemma 4.110 (di omotopia, per il grado intero).

Siano M e N due varietà orientate con M chiusa e $\dim M = \dim N$. Sia $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ un'omotopia C^∞ con $f \stackrel{\text{def}}{=} F_0$ e $g \stackrel{\text{def}}{=} F_1$. Se $y \in N$ è un valore regolare comune a f e g , allora:

$$\deg(f; y) = \deg(g; y).$$

Dimostrazione.

Dal momento che $M \times [0, 1]$ è un prodotto, allora acquisisce l'orientazione prodotto di quella di M con quella canonica di $[0, 1]$. Grazie all'Osservazione 4.108 e al Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), possiamo assumere senza perdita di generalità che y sia un valore regolare anche di F .

Sia \mathcal{B}_x una base positiva di T_xM per $x \in M$. Allora, per l'Osservazione 4.86 la base $\mathcal{B}_x \cup \{1\}$ è positiva per $T_{(x,t)}M \times [0, 1] \cong T_xM \times T_t[0, 1]$.

Ricordiamo che il bordo di $M \times [0, 1]$ è $M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$ per 4.64. Studiamo l'orientazione indotta su tale bordo. Poiché $(0, 1) \in T_{(x,0)}M \times [0, 1]$ è interno per il Lemma 4.99, $\{-\mathcal{B}_x\} \cup \{-1\}$ è positiva per $(x, 0)$, e quindi \mathcal{B}_x è una base negativa di $(x, 0)$ sul bordo. Dunque $M \times \{0\} \cong M$ è orientata come $-M$. Analogamente, $(0, 1) \in T_{(x,1)}M \times [0, 1]$ è esterno, quindi $M \times \{1\} \cong M$ è orientata come M .

Allora, per il Lemma 4.109, si ha:

$$\deg(g; y) - \deg(f; y) = \deg(F|_{\partial(M \times [0,1])}; y) = 0,$$

da cui la tesi. \square

Teorema 4.111 (Il grado intero è ben definito).

Siano M e N varietà con M chiusa, N connessa e $\dim M = \dim N$. Se $f : M \rightarrow N$ è liscia e $y, z \in N$ sono suoi valori regolari, allora:

$$\deg(f; y) = \deg(f; z).$$

Dimostrazione.

Per il Lemma 4.73, esiste un diffeomorfismo $h : N \rightarrow N$ con $h(y) = z$ isotopo all'identità id_N . Sia $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ una tale isotopia.

Consideriamo la mappa $f(t) = \text{sgn}(d(H_t)_y(\Theta_y^N))$. Poiché $H_1 = \text{id}_N$, si ha chiaramente $f(1) = 1$. Inoltre f è continua e localmente costante, utilizzando l'usuale argomento sulla permanenza del segno sul determinante dello jacobiano, una volta scelta una parametrizzazione locale. Dunque, poiché $[0, 1]$ è connesso, f deve essere costantemente uguale a 1. Quindi $d(H_t)_y(\Theta_y^N) = \Theta_{H_t(y)}^N$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Segue quindi che $dh_y(\Theta_y^N) = \Theta_z^N$, da cui per la regola della catena:

$$\deg(h \circ f; z) = \deg(f; y).$$

D'altra parte $h \circ f$ e f sono C^∞ -omotope tramite $H \circ (f \times \text{id}_{[0,1]})$, e quindi, per il Lemma 4.110:

$$\deg(f; y) = \deg(h \circ f; z) = \deg(f; z).$$

□

Definizione 4.112 (Grado intero di una mappa liscia).

Sia M una varietà chiusa e sia N una varietà connessa. Siano M e N della stessa dimensione e orientate. Se $f : M \rightarrow N$ è una mappa liscia, si definisce il suo **grado intero** come:

$$\deg(f) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(f; y),$$

dove y è un valore regolare qualsiasi di f .

Teorema 4.113.

Sia M una varietà chiusa e sia N una varietà connessa. Siano M e N della stessa dimensione e orientate. Se f e g sono due mappe lisce C^∞ -omotope da M in N , allora:

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Dimostrazione.

Per il Lemma 4.76, i valori regolari di f formano un aperto in N . Allora, per il Teorema di Brown (per varietà, Corollario 4.34), esiste in questo aperto anche un valore regolare di g . Per il Lemma 4.110, dunque f e g condividono lo stesso grado intero. □

Corollario 4.114.

Sia M una varietà chiusa e connessa. Se $f : M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo di grado $\deg(f) = -1$, allora f non è omotopa all'identità id_M , né a una mappa costante c_x per $x \in M$.

Dimostrazione.

La tesi è un'immediata conseguenza del Teorema 4.113, dal momento che $\deg(\text{id}_M) = 1$ e $\deg(c_x) = 0$ (infatti c_x non è surgettiva). □

Proposizione 4.115 (Il grado è moltiplicativo).

Sia M una varietà orientata, chiusa e connessa. Se f e g sono due mappe lisce da M in sé stessa, allora:

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g).$$

Dimostrazione.

Sia z un valore regolare di $f \circ g$. Sia $x \in (f \circ g)^{-1}(z)$. Allora, per la regola della catena:

$$d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x.$$

Dal momento che z è regolare, x è un punto regolare e dunque $d(f \circ g)_x$ è un isomorfismo. Dunque necessariamente $df_{g(x)}$ e dg_x sono isomorfismi, ovverosia x è regolare anche per g , mentre $g(x)$ lo è per f .

Sia $f^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Da quanto appena visto, ogni y_i è valore regolare. Allora:

$$g^{-1}(f^{-1}(z)) = \bigsqcup_{i=1}^n g^{-1}(y_i).$$

Allora, sfruttando anche l'Osservazione 4.86:

$$\deg(f \circ g) = \sum_{x \in g^{-1}(f^{-1}(z))} \text{sgn}(df_{g(x)}) \text{sgn}(dg_x).$$

Raccogliendo i termini utilizzando $f^{-1}(z)$ si ottiene dunque, anche usando il Teorema 4.111:

$$\deg(f \circ g) = \sum_{y_i \in f^{-1}(y_i)} \text{sgn}(df_{y_i}) \deg(g) = \deg(f) \deg(g).$$

□

4.7.4 Grado di z^k , delle riflessioni e della mappa antipodale su S^1

Lemma 4.116.

Sia $f_k : S^1 \rightarrow S^1$ tale per cui:

$$f_k(z) = z^k \in \mathbb{C},$$

dove si è identificato $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ in \mathbb{C} . Allora 1 è un valore regolare di f_k e $\deg(f_k) = k$.

Quindi, per $k \neq 0$, f_k non può estendersi a una mappa liscia da D^2 a S^1 .

Dimostrazione.

Consideriamo l'elemento $1 \in S^1$. Osserviamo che $f_k^{-1}(1)$ è l'insieme delle radici k -esime dell'unità, e quindi contiene esattamente k elementi (a meno del segno).

La funzione f_k si estende a $F_k(z) = z^k$ su tutto \mathbb{C} . Osserviamo che $T_1 S^1 = \text{span}(i)$. Per determinare allora il segno di $d(f_k)_1$ è sufficiente considerare la seguente derivata:

$$d(f_k)_1(i) = \left. \frac{d}{dt} e^{itk} \right|_{t=0} = ki.$$

Dunque $d(f_k)_1$ è un isomorfismo per $k \neq 0$, e preserva l'orientazione se $k > 0$, mentre non la preserva se $k < 0$.

Sia ora $\xi = e^{i\theta_0} \in f_k^{-1}(1)$. Consideriamo il diffeomorfismo $h_\xi : S^1 \rightarrow S^1$ tale per cui:

$$h_\xi(z) = \xi \cdot z,$$

ovverosia la rotazione indotta da ξ . Si verifica facilmente che:

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1, \quad H(z, t) = e^{i\theta_0 t} z$$

è un'omotopia liscia da id_{S^1} a h_ξ . Dunque $\deg(h_\xi; 1) = \deg(\text{id}_{S^1}; 1) = 1$.

Osserviamo che $f_k = f_k \circ h_\xi$. Quindi:

$$d(f_k)_1 = d(f_k \circ h_\xi)_1 = d(f_k)_\xi \circ d(h_\xi)_1 = d(f_k)_\xi \circ h_\xi.$$

Dal momento che h_ξ è invertibile, si deduce che $d(f_k)_\xi$ è sempre un isomorfismo, e dunque che 1 è un valore regolare. Inoltre, dalla stessa uguaglianza si deduce per la moltiplicatività del segno dei differenziali che $\text{sgn}(d(f_k)_1) = \text{sgn}(d(f_k)_\xi)$.

Si conclude facilmente allora che $\deg(f) = \deg(f; 1) = k$. L'ultima affermazione è conseguenza del Lemma 4.109. \square

Osservazione 4.117 (Un diffeomorfismo ha grado 1 o -1). Per un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ su M chiusa e connessa, possono esistere solo due gradi, $+1$ o -1 , dacché l'insieme controimmagine di un valore regolare contiene un singolo elemento.

In particolare, $\deg(f) = 1$ se e solo se per un elemento $x \in M$, df_x preserva l'orientazione.

Lemma 4.118.

Sia $r_i : S^n \rightarrow S_n$ la riflessione tale per cui:

$$r_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} (\underbrace{x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}}_{\text{invariati}}).$$

Allora $\deg(r_i) = -1$.

Dimostrazione.

Per l'Osservazione 4.117 è sufficiente studiare $d(r_i)_{e_i}$. Per il Corollario 4.37, si ha:

$$T_{e_i} S^n = e_i^\perp = T_{-e_i} S^n.$$

r_i si estende con la stessa formula a un diffeomorfismo \tilde{r}_i su D^{n+1} . Poiché \tilde{r}_i è lineare e $T_{e_i} D^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, si ha $d\tilde{r}_i|_{e_i} = \tilde{r}_i$. Tale differenziale manda la base $\{e_i, e_1, \dots, e_{n+1}\}$ in $\{-e_i, e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Queste due basi hanno orientazione diversa, e quindi solo una di queste induce l'orientazione canonica su \mathbb{R}^{n+1} .

Osserviamo che e_i è esterno per sé stesso; allo stesso modo $-e_i$ è esterno per sé stesso. Segue allora facilmente che $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ cambia orientazione tramite r_i , e quindi $\deg(r_i) = -1$. \square

Lemma 4.119.

Sia $A : S^n \rightarrow S^n$ la mappa antipodale, ossia tale per cui $A(x) = -x$. Allora $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dalla Proposizione 4.115 e il Lemma 4.118. \square

4.7.5 Campi vettoriali tangenti su S^n e pettinabilità

Definizione 4.120 (Campo vettoriale tangente).

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una varietà liscia, con o senza bordo. Un **campo vettoriale tangente** è una mappa liscia $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale per cui:

$$v(x) \in T_x M, \quad \forall x \in M.$$

Definizione 4.121 (Pettinabilità).

Una varietà liscia, con o senza bordo, si dice **pettinabile** se ammette un campo vettoriale tangente mai nullo.

Teorema 4.122 (di pettinabilità della sfera).

S^n è pettinabile se e solo se n è dispari.

Dimostrazione.

Se n è dispari, un campo vettoriale tangente mai nullo è il seguente:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+1}, x_n) \in x^\perp.$$

Sia ora n pari. Supponiamo v sia un campo vettoriale tangente mai nullo. Senza perdita di generalità, possiamo considerarlo unitario. Allora possiamo costruire un omotopia liscia dalla mappa antipodale A a id_{S^n} nel seguente modo:

$$H : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad H(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x).$$

Tuttavia una tale omotopia non può esistere per il Teorema 4.113: l'identità ha grado 1, mentre la mappa antipodale ha grado $(-1)^{n+1} = -1$ per il Lemma 4.119. Quindi v non può esistere per n pari. \square

4.8 Indici di campi vettoriali su aperti di \mathbb{R}^m

4.8.1 Zero isolato e indice di un campo in uno zero

Definizione 4.123 (Zero isolato).

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto. Allora z si dice **zero isolato** di f se esiste un raggio $\varepsilon > 0$ tale per cui f in $B_\varepsilon(z)$ ammette come unico zero z .

Osservazione 4.124 (L'indice è ben definito).

Sia $\varepsilon > 0$ tale per cui z è unico zero per f in $B_\varepsilon(z)$. Sia $v_\varepsilon : S^m \rightarrow \partial B_\varepsilon(z)$ tale per cui:

$$v_\varepsilon(x) = z + \varepsilon x.$$

Osserviamo che v_ε preserva l'orientazione. Consideriamo

$$\overline{f_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial B_\varepsilon(z)}.$$

Poiché v_ε preserva l'orientazione, $\deg(\overline{f_\varepsilon}) = \deg(\overline{f_\varepsilon} \circ v_\varepsilon)$. Scelto un altro ε' , possiamo definire un'omotopia H nel seguente modo:

$$H_t = \overline{f_{(1-t)\varepsilon + t\varepsilon'}} \circ v_{(1-t)\varepsilon + t\varepsilon'}.$$

Allora, per il Teorema 4.113:

$$\deg(\overline{f_\varepsilon}) = \deg(\overline{f_\varepsilon} \circ v_\varepsilon) = \deg(\overline{f_{\varepsilon'}} \circ v_{\varepsilon'}) = \deg(\overline{f_{\varepsilon'}}).$$

Definizione 4.125 (Indice di f in z).

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto. Sia z uno zero isolato di f . Si definisce allora l'**indice di f in z** come:

$$\text{ind}(f, z) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(\overline{f_\varepsilon}), \quad \overline{f_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{\|f\|} \Big|_{\partial B_\varepsilon(z)},$$

dove ε è un raggio tale per cui z è unico zero in $B_\varepsilon(z)$.

Corollario 4.126 (Indice di z^k in 0).

Sia $v_k : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tale per cui $v_k(z) = z^k$. Allora $\text{ind}(v_k, 0) = k$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal Lemma 4.116. \square

4.8.2 Lemma di Hopf e teorema fondamentale dell'algebra

Lemma 4.127 (di Hopf).

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ una m -varietà compatta con bordo. Sia $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vettoriale con zeri isolati e $v|_{\partial X}$ mai nullo.

Allora:

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z) = \deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial X} : \partial X \rightarrow S^{m-1} \right).$$

Dimostrazione.

Poiché gli zeri di v sono isolati, possiamo togliere a X una famiglia di dischi disgiunti $\{B_{\varepsilon_i}(z_i)\}$ contenenti tali zeri. Allora, poiché tali dischi sono interni, l'orientazione indotta su ∂W sarà:

$$\partial W = \partial X \cup \bigsqcup_i -\partial B_{\varepsilon_i}(z_i).$$

Quindi, rispettando le orientazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial W} : \partial W \rightarrow S^{m-1} \right) &= \\ \deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial X} : \partial X \rightarrow S^{m-1} \right) &- \sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z). \end{aligned}$$

Tuttavia, poiché $\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial W}$ è la restrizione di $\frac{v}{\|v\|} : W \rightarrow S^{m-1}$ sul bordo, per il Lemma 4.109, si ha anche:

$$\deg \left(\frac{v}{\|v\|} \Big|_{\partial W} : \partial W \rightarrow S^{m-1} \right) = 0,$$

da cui segue immediatamente la tesi. \square

Teorema 4.128 (fondamentale dell'algebra).

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con $\deg(p) = n$. Allora:

$$\deg(p) = \sum_{z_0 \in p^{-1}(0)} \text{mult}(p, z_0),$$

dove mult indica la molteplicità algebrica di uno zero in un polinomio.

Dimostrazione.

Dal momento che $p(x)$ non può avere più di n zeri, questi sono sicuramente isolati e possiamo prendere inoltre una palla $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ con $p^{-1}(0) \subseteq B_r(0)$. Possiamo allora applicare il Lemma 4.127 su $p : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ e ottenere:

$$\deg \left(\frac{p}{\|p\|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right) = \sum_{z_0 \in p^{-1}(0)} \text{ind}(p, z_0).$$

Mostriamo che il termine a sinistra coincide con $\deg(p)$ (1), e che $\text{ind}(p, z_0)$ coincide con $\text{mult}(p, z_0)$ (2), ottenendo infine la tesi.

(1) Supponiamo che $\deg(p)$ sia n e che $p(z)$ sia dunque della seguente forma:

$$p(z) = a_n z^n + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}_{g(z)},$$

dove $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} p(z) - a_n z^n$.

Osserviamo che:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{g(z)}{z^n} \right| = 0. \quad (*)$$

Una volta posto $p_t(z) = a_n z^n + t g(z)$, si ottiene:

$$\left| \frac{p_t(z)}{z^n} \right| \geq |a_n| - t \left| \frac{g(z)}{z^n} \right|.$$

Allora, per (*), possiamo scegliere r sufficientemente grande in modo tale che si verifichi sempre:

$$\left| \frac{p_t(z)}{z^n} \right| > 0, \quad z \in \partial B_r(0).$$

In particolare, $p_t(z)$ non si annulla su $\partial B_r(0)$. Possiamo allora considerare l'omotopia indotta da $\frac{p_t(z)}{|p_t(z)|}$. Osserviamo che $p_0(z) = a_n z^n$ e che $p_1(z) = p(z)$. Per il Teorema 4.113, si ha allora:

$$\begin{aligned} \deg \left(\frac{p(z)}{|p(z)|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right) &= \\ \deg \left(\frac{a_n}{|a_n|} \frac{z^n}{|z^n|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right), & \end{aligned}$$

a cui, applicando il Lemma 4.116 e il fatto secondo cui la moltiplicazione per una costante di fase è isotopa all'identità (vd. dimostrazione del Lemma 4.116), si ottiene facilmente che:

$$\deg \left(\frac{p(z)}{|p(z)|} : \partial B_r(0) \rightarrow S^1 \right) = n = \deg(p).$$

(2) Sia z_0 uno zero di $p(z)$. Allora $p(z)$ si scrive come:

$$p(z) = (z - z_0)^\ell q(z),$$

per un qualche polinomio $q(z) \in \mathbb{C}[z]$, dove $\ell = \text{mult}(p, z_0)$. Entro una certa palla di raggio ε centrata in z_0 , $q(z)$ non ha alcuno zero. Se consideriamo la

mappa $f : S^1 \rightarrow \partial B_{z_0}(\varepsilon)$ tale per cui $f(z) = z_0 + \varepsilon z$, che preserva l'orientazione, allora si ha:

$$\text{ind}(p, z_0) = \text{deg} \left(\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|} : \partial S^1 \rightarrow S^1 \right).$$

Osserviamo che:

$$\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|}(z) = \frac{z^\ell q(z_0 + \varepsilon z)}{|q(z_0 + \varepsilon z)|}.$$

Possiamo definire un'omotopia $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ tale per cui:

$$H_t(z) = \frac{z^\ell q(z_0 + t\varepsilon z)}{|q(z_0 + t\varepsilon z)|},$$

che porta $z^\ell \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|}$ in $\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|}$. Quindi, per il Teorema 4.113, si ha:

$$\begin{aligned} \text{deg} \left(z^\ell \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|} : S^1 \rightarrow S^1 \right) &= \\ \text{deg} \left(\frac{p \circ f}{\|p \circ f\|} : \partial S^1 \rightarrow S^1 \right). \end{aligned}$$

Come visto nella dimostrazione del Lemma 4.116, la moltiplicazione per elemento di S^1 è isotopa all'identità, e dunque:

$$\text{deg} \left(z^\ell \frac{q(z_0)}{|q(z_0)|} : S^1 \rightarrow S^1 \right) = \text{deg}(z^\ell : S^1 \rightarrow S^1) = \ell,$$

da cui segue, combinando i pezzi, che:

$$\text{ind}(p, z_0) = \ell.$$

□

4.9 Campi vettoriali su varietà

4.9.1 Indice di un campo vettoriale tangente su una varietà

Fatto 4.129.

Sia $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente della varietà $M \subseteq \mathbb{R}^m$, con $z \in M$ zero isolato di v .

Se $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione di M in z con $g(u) = z$, allora possiamo considerare il campo vettoriale $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale per cui:

$$\xi(u) = (dg_u)^{-1}(v(g(u))), \quad \forall u \in U.$$

Allora $\text{ind}(\xi, g^{-1}(z))$ non dipende dalla scelta della parametrizzazione scelta g .

Definizione 4.130 (Indice di un campo vettoriale tangente su varietà rispetto a un punto).

Sia $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale tangente della varietà $M \subseteq \mathbb{R}^m$, con $z \in M$ zero isolato di v .

Si definisce allora l'**indice di v in z** come:

$$\text{ind}(v, z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}(\xi, g^{-1}(z)),$$

dove $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow g(U)$ è una parametrizzazione locale di M in z con $g(u) = z$ e $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ è tale per cui:

$$\xi(u) = (dg_u)^{-1}(v(g(u))), \quad \forall u \in U.$$

4.9.2 Simplessi e caratteristica di Eulero

Definizione 4.131 (m -simplesso).

Un m -simplesso $\Delta^{(m)}$ in \mathbb{R}^k con $k \geq m$ è definito come l'involuppo convesso di $m + 1$ punti affinementemente indipendenti.

Si dice **faccia** di $\Delta^{(m)}$ un simplesso generato da alcuni dei generatori di $\Delta^{(m)}$.

Definizione 4.132 (Complesso simpliciale).

Si dice **complesso simpliciale** l'unione di simplessi in \mathbb{R}^k che si intersecano a due a due nell'insieme vuoto oppure in una faccia.

Fatto 4.133.

Ogni varietà M è omeomorfa ad un complesso simpliciale, finito se M è compatta.

Definizione 4.134 (Caratteristica di Eulero-Poincaré).

Sia M compatta. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero-Poincaré** $\chi(M)$ come:

$$\chi(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i s_i(C),$$

dove C è un complesso simpliciale finito a cui M è omotopicamente equivalente e $s_i(C)$ è il numero di i -simplessi in C .

Fatto 4.135.

La caratteristica di Eulero-Poincaré è ben definita e invariante per equivalenza omotopica.

4.9.3 Teorema di Poincaré-Hopf

Teorema 4.136 (Poincaré-Hopf).

Sia M una varietà compatta con bordo, eventualmente vuoto. Se $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un campo vettoriale tangente con zeri isolati e $v|_{\partial M}$ è esterno in ogni punto (se $\partial M \neq \emptyset$), allora:

$$\sum_{z \in v^{-1}(0)} \text{ind}(v, z) = \chi(M).$$

Corollario 4.137.

Si può calcolare $\chi(S^m)$ nel seguente modo:

$$\chi(S^m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ 1 & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases}$$

Dimostrazione.

Consideriamo il campo vettoriale tangente:

$$v : S^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \quad v(x) = \pi_{x^\perp}(N) = N - (N \cdot x)x,$$

dove $N = e_{m+1} \in S^m$. Osserviamo che v si annulla solamente in $\pm N$. Consideriamo le parametrizzazioni locali $g_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ di $\pm N$, dove:

$$g_{\pm}(u) = (u, \pm\sqrt{1 - u \cdot u}), \quad U = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sqrt{1 - u \cdot u} = -\frac{u_i}{\sqrt{1 - u \cdot u}},$$

da cui si deduce che:

$$Jg_{\pm} = \begin{pmatrix} I \\ \mp \frac{u}{\sqrt{1 - u \cdot u}} \end{pmatrix}.$$

Posto $\xi_{\pm}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mp \sqrt{1 - u \cdot u} u$, si osserva che:

$$(dg_{\pm})_u(\xi_{\pm}(u)) = J(g_{\pm})_u \xi_{\pm}(u) = v(g(u)).$$

Quindi $\text{ind}(v, \pm N) = \text{ind}(\xi_{\pm}, 0)$. Osserviamo che ξ_{\pm} si può riscrivere per essere $\text{id}_{S^{m-1}}$ nel caso positivo e la mappa antipodale nel caso negativo.

Per il Teorema 4.136 e il Lemma 4.119, allora si ha:

$$\begin{aligned} \chi(S^m) &= \text{ind}(v, N) + \text{ind}(v, -N) = \\ &= 1 + (-1)^m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ 2 & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases} \end{aligned}$$

□