# Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

21 marzo 2023

## Analogie tra i limiti di funzioni e i limiti di successioni

**Nota.** Nel corso del documento, per un insieme $X$, qualora non specificato, si intenderà sempre un sottoinsieme generico dell'insieme dei numeri reali esteso $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente per $f$ si intenderà sempre una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

**Proposizione.** Dati $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione di $X$ tale che $\forall\,(x_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\} \mid x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ vale che $f(x_n)$ converge. Allora il limite di $f(x_n)$ è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta di $(x_n)$.

*Dimostrazione.* Siano per assurdo $(x_n), (y_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ due successioni tali che $x_n, y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ e che $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$ e $f(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} G$ con $L \neq G$. Si costruisce allora la successione $(z_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ nel seguente modo:

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ y_{\frac{n-1}{2}} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia unendo le due successioni $(x_n)$ e $(y_n)$ in modo tale che agli indici pari corrispondano gli elementi di $x_n$ e a quelli dispari quelli di $y_n$.

Si mostra che $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Sia $I$ un intorno di $\overline{x}$. Allora, dal momento che $(x_n), (y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$, esistono sicuramente due $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq n_x \implies x_n \in I$ e $n \geq n_y \implies y_n \in I$. Pertanto, detto $n_k = \max\{n_x, n_y\}$, $n \geq n_k \implies x_n, y_n \in I$, ossia che per $n \geq 2n_k$, $z_n \in I$. Si conclude allora che $(z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$.

Tuttavia $f(z_n)$ non può convergere a nessun limite, dal momento che le due sottosuccessioni $f(x_n)$ e $f(y_n)$ convergono a valori distinti ed il limite deve essere unico. L'esistenza di tale successione contraddice allora l'ipotesi, $\lightning$. $\square$

**Proposizione.** Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, definisco $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f(n) := x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Allora $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L \iff x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia $I$ un intorno di $L$. Allora, poiché $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, esiste un intorno $J = [a, \infty]$ tale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$. Poiché $\infty$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$, $A = J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$ non è mai vuoto. Inoltre, poiché $A \subseteq \mathbb{N}$, $A$ ammette un minimo[1], detto $m$. Vale in particolare che $f(n) \in I$, $\forall\, n \geq m$, e quindi che $x_n \in I$, $\forall\, n \geq m$, ossia che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

($\impliedby$) Sia $I$ un intorno di $L$. Dal momento che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, $\exists\, n_k \in \mathbb{N} \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$. Allora, detto $J = [n_k, \infty]$, vale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$, ossia che $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$. $\square$

**Proposizione.** Siano $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x} \in X$ punto di accumulazione di $X$. Allora sono fatti equivalenti i seguenti:

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} f(\overline{x})$,

(ii) $f$ è continua in $\overline{x}$.

*Dimostrazione.* Sia $I$ un intorno di $f(\overline{x})$. Dal momento che $\overline{x}$ è un punto di accumulazione, si ricava allora da entrambe le ipotesi che esiste un intorno $J$ di $f(\overline{x})$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, e quindi, per definizione, la tesi. $\square$

**Osservazione.** Se $\overline{x}$ è un punto isolato di $X$, allora $f$ è continua in $\overline{x}$. Pertanto per rendere la proposizione precedente vera, è necessario ipotizzare che $\overline{x}$ sia un punto di accumulazione (infatti il limite in un punto isolato non esiste per definizione, mentre in tale punto $f$ è continua).

**Proposizione.** Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $\overline{x}$ punto di accumulazione di $X$. Siano $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\tilde{f} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L & \text{se } x = \overline{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

[1]Non è in realtà necessario che si consideri il minimo di tale insieme, occorre semplicemente che $A$ sia non vuoto.

Allora $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L \iff \tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Sia $I$ un intorno di $L$. Si ricava allora dalle ipotesi che esiste sempre un intorno $J$ di $\overline{x}$ tale che $f(\underbrace{J \cap X \setminus \{\overline{x}\}}_{A}) \subseteq I$. Dal momento che $\overline{x} \notin A$, si deduce che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) = \tilde{f}(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, ossia che $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$.

( $\impliedby$ ) Sia $I$ un intorno di $L$. Poiché $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$, esiste un intorno $J$ di $\overline{x}$ tale che $\tilde{f}(\underbrace{J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}}_{A}) \subseteq I$. Poiché $\overline{x} \notin A$ e $\overline{x}$ è punto di accumulazione, si deduce che $I \supseteq \tilde{f}(J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}) = f(J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}) \supseteq f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\})$, e quindi che $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L$. □

**Osservazione.** Tutte le funzioni elementari (e.g. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $|x|$, $x^a$) sono funzioni continue nel loro insieme di definizione.

**Proposizione.** Siano $f : X \to Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{x} \in X$. Sia $f$ continua in $\overline{x}$ e sia $g$ continua in $f(\overline{x})$. Allora $g \circ f$ è continua in $\overline{x}$.

*Dimostrazione.* Sia $I$ un intorno di $z = g(f(\overline{x}))$. Allora, poiché $g$ è continua in $f(\overline{x})$, $\exists\, J$ intorno di $f(\overline{x}) \mid g(J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\}) \subseteq I$. Tuttavia, poiché $f$ è continua in $\overline{x}$, $\exists\, K$ intorno di $\overline{x} \mid f(K \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq J$, da cui si conclude che $g(f(K \cap X \setminus \{\overline{x}\})) \subseteq I$, dacché $\forall\, x \in K \cap X \setminus \{\overline{x}\}$, o $f(x) = f(\overline{x})$, e quindi $g(f(x)) = z$ chiaramente appartiene a $I$, o altrimenti $f(x) \in J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\} \implies g(f(x)) \in g(J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\}) \subseteq I$. □

**Teorema.** Sia $f : X \to Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, sia $\overline{x}$ punto di accumulazione di $X$ tale che $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{y}$. Se $\overline{y}$ è un punto di accumulazione di $Y$ e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\overline{y} \in Y \implies g$ continua in $\overline{y}$ e $g(y) \xrightarrow[y \to \overline{y}]{} \overline{z}$, allora $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{z}$.

*Dimostrazione.* Siano $\tilde{f} : X \cup \{\overline{x}\}$, $\tilde{g} : Y \cup \{\overline{y}\}$ due funzioni costruite nel seguente modo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \overline{y} & \text{se } x = \overline{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \tilde{g}(y) = \begin{cases} \overline{z} & \text{se } y = \overline{y}, \\ g(y) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{y}$ e $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di $X$, per una proposizione precedente, $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$. Analogamente $\tilde{g}$ è continua in $\overline{y}$.

Dal momento che vale che $\tilde{f}(\overline{x}) = \overline{y}$, per la proposizione precedente $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$, e dunque $\lim_{x \to \overline{x}} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x})) = \overline{z}$.

Si consideri adesso la funzione $\widetilde{g \circ f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definita nel seguente modo:

$$\widetilde{g \circ f}(x) = \begin{cases} \overline{z} & \text{se } x = \overline{x}, \\ g(f(x)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostra che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Se $x = \overline{x}$, chiaramente $\widetilde{g \circ f}(x) = \overline{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x}))$. Se $x \neq \overline{x}$, si considera il caso in cui $\tilde{f}(x) = f(x)$ è uguale a $\overline{y}$ ed il caso in cui non vi è uguale.

Se $\tilde{f}(x) \neq \overline{y}$, $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x)) \overbrace{=}^{f(x) \neq \overline{y}} g(f(x)) = \widetilde{g \circ f}(x)$. Se invece $\tilde{f}(x) = \overline{y}$, $\overline{y} \in Y$, e quindi $g$ è continua in $\overline{y}$, da cui necessariamente deriva che $g(\overline{y}) = \overline{z}$. Allora $\widetilde{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(\overline{y}) = \overline{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x}))$.

Si conclude allora che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$, e quindi che $\widetilde{g \circ f}$ è continua in $\overline{x}$. Pertanto, dalla proposizione precedente, $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{z}$. □

**Esercizio 1.** Mostrare che tutte le ipotesi della proposizione precedente sono necessarie, fornendo alcuni controesempi.

**Proposizione.** Date $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ continue in $\overline{x}$. Allora:

(i) $f_1 + f_2$ è continua in $\overline{x}$,

(ii) $f_1 f_2$ è continua in $\overline{x}$.

*Dimostrazione.* Sia $f := f_1 + f_2$.

(i) Poiché $f_1, f_2$ sono continue in $\overline{x}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |x - \overline{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\overline{x})|, |f_2(x) - f_2(\overline{x})| \leq \varepsilon$ (per ogni $\varepsilon > 0$, si prende $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ossia il minimo delle semilunghezze degli intorni di $\overline{x}$). Allora $|f(x) - f(\overline{x})| \leq |f_1(x) - f_1(\overline{x})| + |f_2(x) - f_2(\overline{x})| \leq 2\varepsilon$. Si conclude dunque che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |f(x) - f(\overline{x})| \leq 2\varepsilon$, e quindi, poiché $2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$, che $f$ è continua in $\overline{x}$.

□

**Proposizione.** Date $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione di $X$. Se $\lim_{x \to \overline{x}} f_1(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \overline{x}} f_2(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, allora valgono i seguenti risultati:

(i) $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 + L_2$,

(ii) $f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 L_2$.