Appunti di Fisica

Gabriel Antonio Videtta

20 gennaio 2022

Indice

Capitolo 1

I moti principali della fisica

1.1 Il moto uniformemente accelerato (m.u.a.)

Conoscendo le definizioni di accelerazione ($\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) e di velocità ($\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$) è possibile, ponendo l'accelerazione costante (i.e. il *jerk* è nullo, $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$), ricavare numerose formule.

1.1.1 Le equazioni del moto in un sistema di riferimento unidimensionale

Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases} \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Da $a = \frac{dv}{dt}$, si ricava $dv = a \cdot dt$, da cui:

$$\int dv = \int a\,dt = a \int dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

Dimostrata questa prima equazione, è possibile dimostrare in modo analogo l'altra:

$$\int dx = \int v \cdot dt = \int v_0\,dt + \int at\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

La dimostrazione può essere inoltre resa immediata se si sviluppano $x(t)$ e $v(t)$ come serie di Taylor-Maclaurin.

□

1.1.2 Lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione

Senza ricorrere alla variabile di tempo t, è possibile esprimere lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione mediante le seguente formula:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Considerando $a = \frac{dv}{dt}$, è possibile riscrivere, mediante l'impiego delle formule di derivazione delle funzioni composte, quest'ultima formula:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\,\frac{dv}{dx}$$

Da ciò si può ricavare infine l'ultima formula:

$$a\,dx = v\,dv \Rightarrow a \int dx = \int v\,dv$$

E quindi:

$$a(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

□

1.2 Il moto dei proiettili

Il *moto dei proiettili*, o moto parabolico, non è altro che la forma vettoriale del m.u.a. sfruttando due accelerazioni per entrambe le dimensioni: una nulla (quella dello spostamento parallelo al terreno) ed una pari a $-g$ (quella data dalla gravità nello spostamento normale al terreno).

1.2.1 Le equazioni del moto dei proiettili

Riprendendo le precedenti considerazioni, si può dunque scrivere l'equazione del moto in forma vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 \tag{1.3}$$

O si può separare quest'ultima in due equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta)t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.2 Il calcolo della gittata e della traiettoria

Definita la *gittata* come la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo assume la stessa ordinata del punto di lancio e la *traiettoria* come la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo assume la massima ordinata, si possono facilmente dimostrare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_{\text{gittata}} = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \\ x_{\text{traiettoria}} = \dfrac{1}{2}x_{\text{gittata}} = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g} \end{cases} \tag{1.5}$$

1.3 Il moto circolare uniforme

Definendo alcune grandezze fisiche in modo analogo a come vengono proposte nel m.u.a., è possibile riproporre le equazioni 1.1 mediante l'impiego di grandezze esclusivamente angolari.

1.3.1 Le equazioni del moto circolare uniforme

Si definiscono dunque le seguenti grandezze:

- θ in funzione del tempo
- $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$
- $\alpha = \ddot{\theta} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

Innanzitutto, è possibile coniugare il mondo angolare con quello cartesiano, tenendo conto del fatto che $x = \theta r$. In questo modo si ricavano le seguenti relazioni:

- $v = \omega r$, la velocità angolare
- $a_t = \alpha r$, l'accelerazione tangenziale (da distinguersi da quella centripeta!)

Per sostituzione, dalle equazioni 1.1 si ottengono dunque le analoghe seguenti:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \tag{1.6}$$

1.3.2 L'accelerazione centripeta

Oltre all'accelerazione tangenziale, direttamente proporzionale a quella lineare, è possibile definire anche un altro tipo di accelerazione: **l'accelerazione centripeta** (a_c), diretta dal corpo verso il centro della circonferenza sulla quale questo muove.

Questo tipo di accelerazione è costante nel moto circolare uniforme ed è calcolata mediante le seguente equazione:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{1.7}$$

Dimostrazione. La velocità può essere espressa vettorialmente nella seguente forma $\vec{v}(-v\sin(\theta), v\cos(\theta))$, mentre le funzioni trigonometriche possono essere sostituite utilizzando le coordinate del punto ed il raggio della circonferenza su cui si muove il corpo secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Perciò, derivando la velocità, si ottiene l'accelerazione nella seguente forma:

$$\vec{a} = (-\frac{v}{r} \cdot v_y, \frac{v}{r} \cdot v_x)$$

Computando il modulo dell'accelerazione e tenendo conto che $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, si ottiene il risultato desiderato:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$\square$

1.3.3 Il moto circolare visualizzato vettorialmente

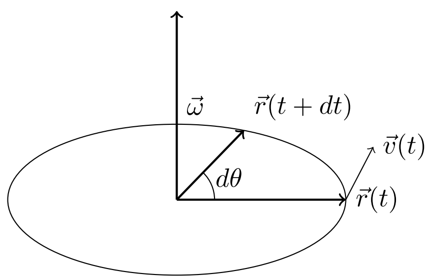

Figura 1.1: Il moto circolare nel piano O_{xy}

Per visualizzare in modo più intuitivo, ma anche più formale, il moto circolare, è possibile costruire un sistema di riferimento basandosi su alcune assunzioni.

Basandosi sul figura 1.1, assumiamo $\vec{d\theta} = d\theta \cdot \hat{z}$, attraverso cui possiamo concludere che $\vec{\omega} = \frac{\vec{d\theta}}{dt}$ è anch'esso parallelo a $\hat{z}$.

Inoltre, $d\vec{r}$ deve essere perpendicolare a $\vec{r}$, e, poiché appartiene al piano O_{xy}, $d\vec{r}$ deve essere perpendicolare anche a $\vec{\omega}$.

Perciò è possibile riscrivere $d\vec{r}$ nella seguente forma:

$$d\vec{r} = \frac{d\theta \cdot \|\vec{r}\|}{\|\vec{w} \times \vec{r}\|}\vec{w} \times \vec{r} = \frac{d\theta}{\|\vec{\omega}\|}\vec{w} \times \vec{r}$$

Poiché la velocità $\vec{v}$ è pari a $\frac{d\vec{r}}{dt}$, si ottiene, conoscendo $d\vec{r}$, la seguente relazione:

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{1.8}$$

Dalla quale si ricava che $\vec{v}$ è perpendicolare sia a $\vec{r}$ che a $\vec{\omega}$.

Analogamente, è possibile ricavare l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{1.9}$$

È interessante notare che $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è perpendicolare a $\vec{\omega} \times \vec{v}$, permettendoci di calcolare facilmente il modulo dell'accelerazione:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\|\vec{\alpha} \times \vec{r}\|^2 + \|\vec{\omega} \times \vec{v}\|^2} \tag{1.10}$$

Non solo: $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è perpendicolare a $\vec{r}$ e $\vec{\omega} \times \vec{v}$ gli è parallelo, ma possiede un verso opposto. Per questa serie di motivi, $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ viene chiamata **accelerazione tangenziale** ($\vec{a_t}$), mentre $\vec{\omega} \times \vec{v}$ viene chiamata **accelerazione centripeta** ($\vec{a_c}$).

Nel moto circolare uniforme, ove $\vec{\alpha} = 0$, infatti l'accelerazione centripeta è costante (vd. eq. 1.7) e l'accelerazione tangenziale è nulla (quindi $\vec{a} = \vec{a_c}$).