Spazio vettoriale dei sottoinsiemi

Gabriel Antonio Videtta

16 dicembre 2022

Indice

1 Il campo $\mathbb{F}_2$ e verifica degli assiomi

Dato un qualsiasi insieme X[1] è possibile estrarne uno spazio vettoriale.

Per costruire l'insieme di vettori considereremo gli elementi di X, mentre il campo su cui verrà costruito lo spazio sarà $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Prima di costruire lo spazio, assicuriamoci che $\mathbb{F}_2$ sia effettivamente un campo[2] e definiamolo.

Le operazioni $+$ e $\cdot$ di questo campo sono esattamente le stesse impiegate in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (i.e. in modulo 2, dove $2 \equiv 0$), o equivalentemente vengono definite in questo modo:

- $+ : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ t.c. $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$ (addizione)
- $\cdot : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ t.c. $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ (moltiplicazione)

Gli assiomi di campo sono effettivamente soddisfatti: gli inversi additivi di 0 e 1 sono 0 e 1 stessi, e 1 è inverso moltiplicativo di sé stesso. Valgono chiaramente le proprietà associative e distributive, mentre gli elementi neutri sono 0 per l'addizione e 1 per la moltiplicazione. Adesso è possibile costruirci sopra uno spazio vettoriale, che d'ora in poi chiameremo $\Delta(X)$.

2 Costruzione dello spazio vettoriale

Ricordiamo una delle operazioni elementari degli insiemi, la cosiddetta *differenza simmetrica* $A \Delta B$. Essa altro non è che l'unione dei due insiemi tolta la loro

[1] Non ci soffermiamo sulla definizione di insieme, sebbene da tale scelta possano scaturire vari paradossi. Rimandiamo per la risoluzione di tali problemi a varie teorie assiomatiche, come quella di Zermelo–Fraenkel.

[2] Non solo è un campo, ma è il più piccolo campo non banale, ossia con più di un elemento.

intersezione:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Adesso definiamo $\Delta(X) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{F}_2\ \forall\, i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Esempio 2.1. *Se* $X = \{a, b\}$*,* $\Delta(X) = \{0,\ a,\ b,\ a+b\}$*.*

Esempio 2.2. *Se* $X = \{a, b, c\}$*,* $\Delta(X) = \{0,\ a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b+c,\ a+b+c\}$*.*

Dotiamo lo spazio di due operazioni, dette somma $(+)$ e prodotto esterno $(\cdot)$:

- $+ : \Delta(X) \to \Delta(X)$ t.c. $\forall\, a, b \in \Delta(X)$, $a + b$ sia il risultato della somma coefficiente a coefficiente[3].
- $\cdot : \Delta(X) \to \Delta(X)$ t.c. $\forall\, a \in \Delta(X)$, $\delta \in \mathbb{F}_2$, δa sia il risultato del prodotto di δ con ogni coefficiente di a[4].

Esempio 2.3. *Se* $X = \{a,\ b\}$*,* $a + a = (1+1)a = 0$ *in* $\Delta(X)$*, mentre* $a + b$ *"rimane"* $a + b$*.*

Esempio 2.4. *Se* $X = \{a,\ b\}$*,* $1 \cdot a = a$ *in* $\Delta(X)$*, mentre* $0 \cdot a = 0$*.*

Queste operazioni verificano facilmente gli assiomi dello spazio vettoriale, pertanto $\Delta(X)$ è uno spazio vettoriale, la cui base è X stesso[5].

Pertanto $\dim \Delta(X) = |X|$, se $|X| < \infty$, altrimenti $\dim \Delta(X) = \infty$.

L'interpretazione (e l'utilità) di questo spazio è facilmente spiegata: ogni elemento di $\Delta(X)$ definisce in modo univoco un sottoinsieme di X e l'operazione definita altro non è che la differenza simmetrica $A\Delta B$ ricordata all'inizio della sezione.

In altri termini, dotando dell'insieme delle parti (i.e. dei sottoinsiemi) di X, detto $\wp(X)$, dell'operazione differenza simmetrica per l'addizione e dell'operazione esistenza[6] per il prodotto esterno, si può verificare che questo costituisce uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$ isomorfo a $\Delta(X)$ nel caso in cui X sia un insieme finito[7].

Teorema 2.1. $|X| < \infty \Rightarrow \wp(X) \cong \Delta(X)$

Dimostrazione. Per dimostrare che i due spazi sono isomorfi si costruisce un'applicazione lineare bigettiva. Definiamo pertanto $\phi : \wp(X) \to \Delta(X)$ in modo tale che:

[3] Esattamente come accade nei polinomi, dove la somma di due polinomi è effettuata sommando i coefficienti dei monomi dello stesso grado. L'unica differenza risiede nel ricordarsi che la somma dei coefficienti in $\Delta(X)$ è quella di $\mathbb{F}_2$, dove il caso $1 + 1 = 0$ ha particolare rilevanza.

[4] Sussiste ancora l'analogia con i polinomi.

[5] Ogni elemento di $\Delta(X)$ è infatti combinazione lineare univoca degli elementi di X – ancora una volta, come accade nei polinomi.

[6] $1 \cdot X = X$, $0 \cdot X = \varnothing$.

[7] L'isomorfismo impiegato nella dimostrazione difatti non è definito per i sottoinsiemi infiniti – dopotutto, se $|X| = \infty$, $\Delta(X)$ è un insieme numerabile, mentre $\wp(X)$ non può esserlo.

$$\phi(\{a_1, \ldots, a_n\}) = a_1 + \ldots + a_n$$

Dimostriamo che ϕ è un'applicazione lineare, dimostrandone prima la linearità e poi l'omogeneità.

Verifichiamo la linearità:

$$\begin{aligned}
&\phi(\{a_1, \ldots, a_n, b_{n+1}, \ldots, b_m\}\Delta\{a_1, \ldots, a_n, c_{n+1}, \ldots, c_k\}) = \\
&\quad = \phi(\{b_{n+1}, \ldots, b_m, c_{n+1}, \ldots, c_k\}) = \\
&\quad = b_{n+1} + \ldots + b_m + \ldots + c_{n+1} + \ldots + c_k = \\
&\quad = (a_1 + \ldots + b_{n+1} + \ldots + b_m) + (a_1 + \ldots + c_{n+1} + \ldots + c_k) = \\
&\quad = \phi(\{a_1, \ldots, a_n, b_{n+1}, \ldots, b_m\}) + \phi(\{a_1, \ldots, a_n, c_{n+1}, \ldots, c_k\}).
\end{aligned}$$

E l'omogeneità con 1:

$$\phi(1 \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}) = \phi(\{a_1, \ldots, a_n\}) = 1 \cdot \phi(\{a_1, \ldots, a_n\}).$$

Ed infine con 0:

$$\phi(0 \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}) = \phi(\varnothing) = 0 = 0 \cdot \phi(\{a_1, \ldots, a_n\}).$$

Questa applicazione è iniettiva, dal momento che $\operatorname{Ker}\phi = \{\varnothing\}$. Inoltre ϕ è surgettiva, dal momento che una controimmagine di un elemento d di $\Delta(X)$ è l'insieme delle parti letterali di d.

Poiché bigettiva, tale applicazione è un isomorfismo.

$\square$

3 Note ed esercizi

In realtà, è possibile costruire un'infinità di spazi su X mantenendo le stesse operazioni, ma variando il campo su cui esso è costruito. Un caso speciale, che merita una menzione onorevole, è proprio $X = \{1, x, x^2, \ldots\}$ costruito su $\mathbb{R}$ (o un qualsiasi $\mathbb{K}$ campo), che dà vita allo spazio dei polinomi, detto $\mathbb{R}[x]$ (o $\mathbb{K}[x]$).

Esercizio 3.1. *Si esibisca un controesempio per la dimostrazione dell'isomorfismo nel caso infinito.*

Esercizio 3.2. *Si dimostri che, se X è finito, anche $\{x_1, x_1+x_2, \ldots, \sum_{i=1}^{|X|} x_i\}$ con x_i elementi distinti di X è una base di $\Delta(X)$.*

Esercizio 3.3. *Dopo aver mostrato che $\{1, x, x^2, \ldots\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]$[8], si dimostri che anche $\{\sum_{i=0}^{j} x^i \mid j \in \mathbb{N}, j \geq 0\}$, con $x^0 = 1$, lo è.*

[8] Questa particolare base è detta *base standard* di $\mathbb{R}[x]$.