V e V^* a confronto

Gabriel Antonio Videtta

16 dicembre 2022

Indice

1 Premessa e motivazione

Lo studio delle applicazioni lineari è riconosciuto come uno degli aspetti fondamentali della geometria contemporanea. Non è infatti una mera coincidenza che nella maggior parte delle applicazioni impiegate nello studio dei sistemi lineari si riconoscano proprietà che sono proprie delle applicazioni lineari.

Uno dei primi esempi importanti di applicazione lineare è quello della funzione traccia $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, che associa a una matrice quadrata la somma degli elementi della diagonale principale. Un altro esempio è quello del determinante $\det : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$, un'applicazione che generalizza il concetto di linearità a più argomenti. Si parla infatti in questo caso di un'applicazione multilineare.

In ogni caso, queste due importanti applicazioni sono accomunate dallo spazio di arrivo, il campo $\mathbb{K}$, sul quale si fonda lo spazio di partenza. Per approfondire lo studio di questo tipo di applicazioni, si introduce pertanto il concetto di **spazio duale**.

2 Lo spazio duale e le sue proprietà

Definizione 2.1. Si dice **spazio duale** di uno spazio vettoriale V lo spazio delle applicazioni lineari $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, indicato con V^*.

2.1 Il caso finito

Prima di dedurre la dimensione e una base "naturale" di V^*, introduciamo il seguente teorema, che mette in correlazione due spazi apparentemente scollegati.

Teorema 2.1. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$, e siano $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $\dim W = m \in \mathbb{N}$. Allora $\mathcal{L}(V,\, W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v}_1,\, \dots,\, \underline{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1,\, \dots,\, \underline{w}_m)$ basi ordinate rispettivamente di V e di W.

Si considera l'applicazione lineare $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(V,\, W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, che associa ad ogni applicazione lineare la sua matrice di cambiamento di base.

Tale applicazione è iniettiva, dal momento che l'unica applicazione a cui è associata la matrice nulla è l'applicazione che associa ad ogni vettore lo zero di W.

Inoltre, $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è surgettiva, poiché data una matrice $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ si può costruire l'applicazione $\phi : V \to W$ t.c. $[\phi(v_i)]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{m}^i \; \forall\, i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n$.

Dal momento che $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è sia iniettiva che surgettiva, tale applicazione è bigettiva, e quindi un isomorfismo. □

Corollario 2.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Allora $\dim V = \dim V^*$.

Dimostrazione. Dal *Teorema 2.1* si deduce che $\dim V^* = \dim \mathcal{L}(V,\, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K} \cdot \dim V = \dim V$. □

Corollario 2.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Allora $V \cong V^*$.

Dimostrazione. Poiché V è di dimensione finita, la dimostrazione segue dal *Corollario 2.1*, dal momento che $\dim V = \dim V^* \iff V \cong V^*$. □

Dimostrazione alternativa. Sia $\dim V = n \in N$ e sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1,\, \dots,\, \underline{v}_n)$ una base ordinata di V.

Si costruisce un'applicazione $\phi : V \to V^*$ che, detto $\underline{v} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, \underline{v}_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}\; \forall\, i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n$, sia tale che:

$$\phi(\underline{v}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, \underline{v}_i^*$$

con $\underline{v}_i^*$ costruito nel seguente modo[1]:

$$\underline{v}_i^*\left(\underline{v}_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'applicazione ϕ è chiaramente lineare. Poiché i vari $\underline{v}_i^*$ sono linearmente indipendenti, segue che $\operatorname{Ker} \phi = \{\underline{0}\}$, e quindi che ϕ è iniettiva.

Sia $\xi \in V^*$. Allora $\xi(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \xi(\underline{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i^*(\underline{v})\, \xi(\underline{v}_i)$. Quindi $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi(\underline{v}_i)\, \underline{v}_i^*$. Detto $\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \xi(\underline{v}_i)\, \underline{v}_i$, si verifica che $\phi(\underline{u}) = \xi$. Pertanto ϕ è

[1] Si sarebbe potuto semplificare la grafia introducendo la notazione del *delta di Dirac*, ossia δ_{ij}. Si è tuttavia preferito esplicitare la definizione del funzionale.

surgettiva[2].

Poiché iniettiva e surgettiva, ϕ è bigettiva, e pertanto un isomorfismo.

□

Corollario 2.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, con $\dim V = n \in \mathbb{N}$. L'insieme $\mathcal{B}^* = (\underline{v}_i^*)_{i=1\to n}$ è una base di V^*.

Dimostrazione. Dal *Corollario 2.2* si desume che la dimensione di V^* è esattamente n. Poiché $\mathcal{B}^*$ è un insieme linearmente indipendente di n elementi, si conclude che è una base di V^*. □

2.2 Il caso infinito

Le dimostrazioni presentate precdentemente non prendono in considerazione il caso degli spazi vettoriali di dimensione infinita; ciononostante vale in particolare un risultato correlato:

Teorema 2.2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. $\dim V = \infty \iff \dim V^* = \infty$[3].

Dimostrazione. Se V^* è di dimensione infinita, anche V deve esserlo necessariamente, altrimenti, per il *Teorema 2.1* dovrebbe esserlo anche V^*.

Sia allora V di dimensione infinita e sia A_i una famiglia di indici che enumeri i elementi della base di V.
Si consideri l'insieme linearmente indipendente $I_n = \{\underline{v}_\alpha^*\}_{\alpha \in A_n}$ con[4]:

$$\underline{v}_\alpha^* \left(\underline{v}_\beta\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si assuma l'esistenza di una base $\mathcal{B}$ di V^* di cardinalità finita, e sia $|\mathcal{B}| = n \in \mathbb{N}$. Ogni insieme $P \subset V$ linearmente indipendente è t.c. $|P| \leq n$. Tuttavia $|I_{n+1}| = n + 1 > n$, ↯.

□

3 Esercizi

Esercizio 3.1. Si dimostri che l'insieme I_n è linearmente indipendente in V^*, dato V spazio vettoriale di dimensione infinita.

Esercizio 3.2. Dato V uno spazio vettoriale di dimensione finita, si esibisca una base per $(V^*)^* = \mathcal{L}\left(\mathcal{L}\left(V, \mathbb{K}\right), \mathbb{K}\right)$, il cosiddetto **spazio biduale**.

[2] Alternativamente, per il teorema del rango, $\dim V = \dim \operatorname{Im} \phi + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \phi}_{=0} = \dim \operatorname{Im} \phi \implies \dim \operatorname{Im} \phi = \dim V = \dim V^* \implies \operatorname{Im} \phi = V^*$, ossia che ϕ è surgettiva.

[3] Ciò tuttavia non implica che V e V^* siano equipotenti se di dimensione infinita; al contrario, $|V^*| > |V|$.

[4] Ancora una volta questa definizione ricalca il delta di Dirac.