Prima consegna del Tutorato di ANALISI I

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 0$. Stabilire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera e nel caso dimostrarla, oppure fornire un controesempio:

- $o(f) + \mathcal{O}(f) = o(f)$
- $o(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$
- Se $f(x) = x + o(x)$ allora $f(f(x)) = x + o(x)$
- $\mathcal{O}(f)^\alpha = \mathcal{O}(f^\alpha)$ con $\alpha > 0$

Esercizio 2

Ordinare le seguenti funzioni rispetto alla relazione di trascurabilità ($<<$)

$$e^x, \quad e^{x+log(x)}, \quad \frac{x}{\log(x)}, \quad \frac{2^x+1}{3^x+1} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

$$\frac{\sin(x)}{x^3}, \quad \log(x), \quad \frac{|\log(x)|}{x}, \quad xe^x \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, invertibile e tale che $f(x) \sim ax^b$ per $x \to +\infty$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$. Trovare la parte principale di $g(x) = f^{-1}(x)$ per $x \to +\infty$ (ricordo che per parte principale si intende trovare $c, d \in \mathbb{R}$ tali che $g(x) \sim cx^d$ per $x \to +\infty$).

Come alcuni tra di voi potrebbero notare, questi esercizi non sono particolarmente difficili o fantasiosi, anzi alcuni sono già stati proposti. Il punto non vuole tanto essere cimentarsi con cose complicate, quanto imparare ad utilizzare il linguaggio dei simboli di Landau in maniera efficace. Vi chiederei dunque di mettere un poco di cura nella forma, oltre che nel contenuto. E di scrivere bene, vi prego.