

Esercizio 11 - lezione 4 logici appunti di Selvetti

Si consideri: $V = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(0) = p(1) \}$.

① è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_n[x]$?

② se sì, calcolare una base.

Soluzione

① Dobbiamo verificare 3 cose:

• $V \neq \emptyset$: è vero perché ogni polinomio costante vi appartiene.

Infatti se $p = k$ con $k \in \mathbb{R}$ allora $p(0) = p(1) = k$.

Notiamo che $0 \in V$ (necessario affinché V sia)
un sottospazio

• V è chiuso per somme:

siano $p, q \in V$. Dobbiamo verificare che $(p+q)(0) = (p+q)(1)$

ricordiamo che: se $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, allora
 $q = \sum_{i=0}^n b_i x^i$

$$p+q = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

Abbiamo poi che se $k \in \mathbb{R}$ allora:

$$\begin{aligned} (p+q)(k) &= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) k^i = \sum_{i=0}^n a_i k^i + \sum_{i=0}^n b_i k^i \\ &= p(k) + q(k) \end{aligned}$$

Dunque $(p+q)(\kappa) = p(\kappa) + q(\kappa)$ per ogni $\kappa \in \mathbb{R}$.

 NON E' UNA BANALITA'.

INFATTI $p(\kappa) + q(\kappa)$ e' una somma di numeri reali, ottenibili valutando p e q in κ , invece $p+q$ e' una operazione inversa a $\mathbb{R}_n[x]$ che mi da un polinomio che valuto in κ per ottenere $(p+q)(\kappa)$.

$$\begin{aligned} \text{Dunque } (p+q)(0) &= p(0) + q(0) \\ &\quad \parallel \quad \parallel \rightarrow \text{uguali perche' } p, q \in V. \\ (p+q)(1) &= p(1) + q(1) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi: } (p+q)(0) = (p+q)(1) \Rightarrow p+q \in V.$$

o) Verifico che dati $p \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ho che $\lambda p \in V$.

ricordiamo: se $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, allora $\lambda p = \sum_{i=0}^n \lambda a_i x^i$

Dico che $\forall \kappa \in \mathbb{R}: (\lambda p)(\kappa) = \lambda \cdot p(\kappa)$:

$$(\lambda p)(\kappa) = \sum_{i=0}^n \lambda a_i \kappa^i = \lambda \sum_{i=0}^n a_i \kappa^i = \lambda \cdot p(\kappa)$$

$$\text{Quindi: } (\lambda p)(0) = \lambda \cdot p(0) \quad \parallel \rightarrow \text{uguali perche' } p \in V$$

$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1)$$

$$\Rightarrow (\lambda p)(0) = (\lambda p)(1) \Rightarrow \lambda p \in V$$

Dunque V e' un sottospazio.

② Cerco una base. Sia $p \in \mathbb{R}_n[x]$, $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Allora $p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0^n = a_0$

$p(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1^n = a_0 + \dots + a_n$

Quindi: $p(0) = p(1) \Leftrightarrow a_0 = a_0 + \dots + a_n \Leftrightarrow a_1 + \dots + a_n = 0$.

Ora, per fare i cambi identifico $\mathbb{R}_n[x]$ con $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{R}_n[x] \longleftrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Nota che non ho condizioni su a_0 , mentre $a_n = -a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}$.

$\Rightarrow$ ho libertà di scegliere $a_1, \dots, a_{n-1}$, e a_n "è obbligato".

Scelgo quindi:

$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e per $1 \leq i \leq n-1$: $v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ← i-esima per i-ies

Nota che $v_0, \dots, v_{n-1} \in V$.

Dico che sono indipendenti:

siano $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} \in \mathbb{R}$ e suppongo $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i v_i = 0$

allora $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i v_i = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ -\mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_{n-1} \end{pmatrix} = 0$

quindi $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$.

Dico che $\text{span}\{v_0, \dots, v_{n-1}\} = V$.

Sia $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$, affermo che $\sum_{i=0}^{n-1} y_i v_i = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

in fatti: $\sum_{i=0}^{n-1} y_i v_i = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1} \end{pmatrix}$

e $y_n = -y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1}$ perché $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$.

Quindi $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ è base. Nell'identificazione tra $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}^{n+1}$ ho che $v_0, \dots, v_{n-1}$ corrisponde ai seguenti polinomi:

$$v_0 \leftrightarrow 1$$

$$v_i \leftrightarrow x^i - x^n \text{ per } 1 \leq i \leq n-1.$$

OSS. SULL'ES 0.3

Si consideri $z^2 + 2\bar{z} = |z|^2 - 1$, con $z \in \mathbb{C}$, affermo che se z è soluzione lo è anche $\bar{z}$:

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 + 2\bar{\bar{z}} &= \overline{z^2 + 2\bar{z}} = \overline{|z|^2 - 1} = |z|^2 - 1 = |\bar{z}|^2 - 1 \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \bar{z} \text{ è soluzione} \quad \quad \quad |z|^2 - 1 = |\bar{z}|^2 - 1 \\ &\quad \text{il coniugio} \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \text{è compatibile} \quad \quad \quad |z| = |\bar{z}| \\ &\quad \text{con somme e} \quad \quad \quad \text{e-mede} \\ &\quad \text{prodotti.} \end{aligned} \quad \square$$