Esercizio 1.

a) Sia $J(0,n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il blocco di Jordan di taglia n relativo all'autovalore 0. Mostrare che per ogni $a \in \mathbb{C}^*$, $J(0,n)$ è simile a $aJ(0,n)$.

b) Mostrare che $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è nilpotente se e solo se per ogni $a \in \mathbb{C}^*$, A è simile a aA.

c) Mostrare che non esistono matrici complesse invertibili di taglia dispari minore di 6 con traccia nulla e polinomio minimo pari.

d) Mostrare che esiste una matrice complessa invertibile di taglia 7 con traccia nulla e polinomio minimo pari.

e) Sia $n \leq 6$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tale che $tr(A) = 0$.
Mostrare che A è simile a $-A$ se e solo se A è simile ad una matrice diagonale a blocchi $diag(N,U)$ con $N \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ nilpotente e $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ è invertibile con polinomio minimo pari.
Suggerimento: analizzare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per una matrice invertibile a traccia nulla di taglia al più 6 il cui polinomio minimo sia pari.

a) $a \cdot J(0,n)$ è nilpotente e $d_1 = \dim \operatorname{Ker} a \cdot J(0,n) = 1 \Rightarrow$ La matrice di Jordan di $a \cdot J(0,n)$ ha un solo blocco $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ La matrice di Jordan di $a \cdot J(0,n)$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = J(0,n) \Rightarrow a \cdot J(0,n) \sim J(0,n)$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ $\forall a \in \mathbb{C}^*$ si ha che A è simile ad aA $\Rightarrow$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{p_A(t)}}{p_{aA}(t)} = \det(aA - t\,Id) = a^n \left(A - \frac{t}{a} Id\right) = a^n p_A\left(\frac{t}{a}\right)$$

Sia ora λ un autovalore di A, si avrebbe che $0 = p_A(\lambda) = a^n p_A\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
cioè $\frac{\lambda}{a}$ è autovalore $\forall a \in \mathbb{C}^*$. Se $\lambda \neq 0$ allora $\left\{\frac{\lambda}{a} \mid a \in \mathbb{C}^*\right\}$ è un insieme infinito di radici di p_A ↯ Ma allora $\lambda = 0$, quindi A ha solo 0 come autovalore
$\Rightarrow A$ è nilpotente

$\boxed{\Rightarrow}$ Se A è nilpotente allora A è simile ad $\begin{pmatrix} J(0,n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0,n_k) \end{pmatrix}$

e $J(0,n_i)$ è simile ad $aJ(0,n_i)$ per a) quindi

$$A \sim \begin{pmatrix} J(0,n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0,n_k) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} aJ(0,n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & aJ(0,n_k) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} J(0,n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0,n_k) \end{pmatrix} \sim aA$$

Lemma Un polinomio $\varphi \in \mathbb{C}[x]$ è pari $\Leftrightarrow \varphi(x) = x^t (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x+\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_s)^{\alpha_s}(x+\lambda_s)^{\alpha_s}$ con t pari e $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $\lambda_i \neq 0$

dim $\boxed{\Leftarrow}$ $\varphi(-x) = (-1)^t x^t \cancel{(-1)^{2\alpha_1}} (x+\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots \cancel{(-1)^{2\alpha_s}} (x+\lambda_s)^{\alpha_s}(x-\lambda_s)^{\alpha_s} = \varphi(x)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\varphi(x) = x^t (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_k)^{\alpha_k}$, ma allora

$$\underset{\overset{\shortparallel}{x^t (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_k)^{\alpha_k}}}{\varphi(x)} \overset{\varphi \text{ è pari!}}{=} \varphi(-x) = (-1)^t x^t (-1)^{\alpha_1}(x+\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (-1)^{\alpha_k}(x+\lambda_k)^{\alpha_k} = (-1)^{*} x^t (x+\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x+\lambda_k)^{\alpha_k}$$

Ma allora per unicità della fattorizzazione si ha che $(x-\lambda_i)^{\alpha_i} = (-1)^{*}(x+\lambda_j)^{\alpha_j}$

quindi $\begin{cases} x - \lambda_i = x + \lambda_j \\ \alpha_i = \alpha_j \end{cases}$ quindi $\lambda_i = -\lambda_j$. j è diverso da i perché altrimenti $\lambda_i = -\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = 0$, assurdo perché $\lambda_i \neq 0$.

Quindi $\varphi(x) = x^t (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x+\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_s)^{\alpha_s}(x+\lambda_s)^{\alpha_s}$ e quindi, analogamente a quanto visto prima, si ha che $(-1)^t = 1 \Rightarrow t$ pari.

c) Per il lemma si ha che $\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x+\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_k)^{\alpha_k}(x+\lambda_k)^{\alpha_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $\neq 0$ ($t = 0$ perché A è invertibile)

$\boxed{n=5}$ 1) $\varphi_A(x) = (x-a_1)(x+a_1)(x-a_2)(x+a_2)$ oppure 2) $\varphi_A(x) = (x-a_1)(x+a_1)$

1) $p_A(x) = (x-a_1)^2(x+a_1)(x-a_2)(x+a_2)$ (a meno di rinominare)
quindi dato che $tr(A) = 0$ si ha che $2a_1 - a_1 + a_2 - a_2 = 0$. In conclusione $a_1 = 0$, assurdo perché A è invertibile ↯

2) $p_A(x) = (x-a_1)(x+a_1)^4$ oppure $(x-a_1)^2(x+a_1)^3$ (a meno di rinominare)
quindi dato che $tr(A) = 0$ si ha che $a_1 - 4a_1 = 0$ oppure $2a_1 - 3a_1 = 0$. In conclusione $a_1 = 0$, assurdo perché A è invertibile ↯

$\boxed{n=3}$ $\varphi_A(x) = (x-a_1)(x+a_1)$
$\Rightarrow p_A(x) = (x-a_1)^2(x+a_1)$ (a meno di rinominare)
quindi dato che $tr(A) = 0$ si ha che $2a_1 - a_1 = 0$. In conclusione $a_1 = 0$, assurdo perché A è invertibile

$\boxed{n=1}$ $tr(A) = 0 \Rightarrow A = 0$, assurdo perché A è invertibile

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -2 \end{pmatrix}$, infatti $\begin{cases} \text{è invertibile } \checkmark \\ tr(A) = -3 + 4 + 1 - 2 = 0 \ \checkmark \\ \varphi_A(x) = (x+1)(x-2)(x-1)(x+2) = (x^2-1)(x^2-4) \text{ che è pari } \checkmark \end{cases}$

Come si trova: Cerco un polinomio minimo di quarto grado, infatti sesto grado e secondo grado falliscono come in c).
Quindi $\varphi_A(x) = (x-a_1)(x+a_1)(x-a_2)(x+a_2)$
Cerco il polinomio caratteristico del tipo $p_A(x) = (x-a_1)^3(x+a_1)(x-a_2)^2(x+a_2)$
Dato che $tr(A) = 0$ allora $3a_1 - a_1 + 2a_2 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}a_2$

Ad esempio $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$, e dato che $\begin{cases} \mu_a(a_1) = 3 \\ \mu_a(a_2) = 2 \\ \mu_a(-a_1) = \mu_a(-a_2) = 1 \end{cases}$ troviamo $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -2 \end{pmatrix}$

e) <u>Suggerimento</u>: Sia $U \in M_p(\mathbb{C})$ invertibile a traccia nulla di taglia al più 6 con φ_U pari, calcoliamo J_U

Per c) si ha che p deve essere pari:

Per il lemma si ha che $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x+\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_k)^{d_k}(x+\lambda_k)^{d_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $\neq 0$ ($t=0$ perché U è invertibile)

$\boxed{p=6}$ k può essere $1, 2$ o 3, cioè ci possono essere $2, 4$ o 6 autovalori:

$\boxed{k=3}$ $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)(x+\lambda_1)\cdot(x-\lambda_2)(x+\lambda_2)\cdot(x-\lambda_3)(x+\lambda_3)$ quindi J_U è diagonale ed è $\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&& \\ & -\lambda_1 &&&& \\ && \lambda_2 &&& \\ &&& -\lambda_2 && \\ &&&& \lambda_3 & \\ &&&&& -\lambda_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=2}$ $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x+\lambda_1)^{d_1}\cdot(x-\lambda_2)^{d_2}\cdot(x+\lambda_2)^{d_2}$

$\Rightarrow$ le uniche possibilità (a meno di invertire) sono $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)^2(x+\lambda_1)^2(x-\lambda_2)(x+\lambda_2)$ oppure $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)(x+\lambda_1)(x-\lambda_2)(x+\lambda_2)$

Nel secondo caso J_U non può avere blocchi 2×2 (altrimenti in φ_{J_U} ci sarebbe grado almeno 2), l'unica possibilità (a meno di rinominare) per avere traccia 0 è $\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&& \\ & \lambda_1 &&&& \\ && -\lambda_1 &&& \\ &&& -\lambda_1 && \\ &&&& \lambda_2 & \\ &&&&& -\lambda_2 \end{pmatrix}$

Nel primo caso J_U è per forza $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 &&&& \\ & \lambda_1 &&&& \\ && -\lambda_1 & 1 && \\ &&& -\lambda_1 && \\ &&&& \lambda_2 & \\ &&&&& -\lambda_2 \end{pmatrix}$, ed ha traccia nulla.

$\boxed{k=1}$ $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x+\lambda_1)^{d_1}$

$\Rightarrow$ le uniche possibilità sono $(x-\lambda_1)(x+\lambda_1)$, $(x-\lambda_1)^2(x+\lambda_1)^2$, $(x-\lambda_1)^3(x+\lambda_1)^3$ che danno rispettivamente $\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&& \\ & \lambda_1 &&&& \\ && \lambda_1 &&& \\ &&& -\lambda_1 && \\ &&&& -\lambda_1 & \\ &&&&& -\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 &&&& \\ & \lambda_1 &&&& \\ && \lambda_1 &&& \\ &&& -\lambda_1 & 1 & \\ &&&& -\lambda_1 & \\ &&&&& -\lambda_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 &&&& \\ & \lambda_1 & 1 &&& \\ && \lambda_1 &&& \\ &&& -\lambda_1 & 1 & \\ &&&& -\lambda_1 & 1 \\ &&&&& -\lambda_1 \end{pmatrix}$

$\boxed{p=4}$ k può essere $1, 2$

$\boxed{k=2}$ $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)(x+\lambda_1)(x-\lambda_2)(x+\lambda_2) \Rightarrow J_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&& \\ & -\lambda_1 && \\ && \lambda_2 & \\ &&& -\lambda_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{k=1}$ $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)(x+\lambda_1)$ oppure $(x-\lambda_1)^2(x+\lambda_1)^2$ che danno rispettivamente $\begin{pmatrix} \lambda_1 &&& \\ & \lambda_1 && \\ && -\lambda_1 & \\ &&& -\lambda_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 && \\ & \lambda_1 && \\ && -\lambda_1 & 1 \\ &&& -\lambda_1 \end{pmatrix}$

$\boxed{p=2}$ k può essere 1

$\boxed{k=1}$ $\varphi_{J_U}(x) = (x-\lambda_1)(x+\lambda_1) \Rightarrow J_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & -\lambda_1 \end{pmatrix}$

Come conseguenza immediata del suggerimento, si osserva che:

$\forall\, U \in M_p(\mathbb{C})$ invertibile a traccia nulla di taglia al più 6 con φ_U pari, si ha che il numero di blocchi $J(\lambda, m)$ è uguale al num dei blocchi $J(-\lambda, m)$

Ma allora, dato che $J(-\lambda, m)$ è simile a $-J(\lambda, m)$ (infatti $rk(-J(\lambda,m)-(-\lambda)Id) = m-1 \Rightarrow \dim Ker(-J(\lambda,m)-(-\lambda)Id) = 1 \Rightarrow$ c'è un solo blocco, e l'autovalore è $-\lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow$ la matrice di Jordan di $-J(\lambda,m)$ è $J(-\lambda,m) \Rightarrow -J(\lambda,m) \sim J(-\lambda,m)$)

Otteniamo che

$$\boxed{\forall\, U \in M_p(\mathbb{C}) \text{ invertibile a traccia nulla di taglia al più 6 con } \varphi_U \text{ pari, si ha che } J_U \text{ è simile a } -J_U}$$

Siamo pronti a dimostrare il punto e):

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia A simile a $\begin{pmatrix} N & \\ & U \end{pmatrix}$ con N nilpotente e U invertibile e φ_U pari.

Dato che $tr(A) = 0$ e $tr(N) = 0$ (perché N è nilpotente) si ha che $0 = tr(A) = tr(N) + tr(U) = tr(U)$.

Quindi U è invertibile a traccia nulla di taglia al più 6 con φ_U pari. Ma allora dal suggerimento si ha che $J_U \sim -J_U$

Dato che N è nilpotente, per b) si ha che $N \sim -N$. In conclusione:

$$A \sim \begin{pmatrix} N & \\ & U \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N & \\ & J_U \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -N & \\ & -J_U \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} N & \\ & J_U \end{pmatrix} \sim -A$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $A \sim -A \Rightarrow \varphi_A(x) = \varphi_{-A}(x)$ ma $\varphi_{-A}(x) = \varphi_A(-x)$ $\left(\begin{array}{l} \varphi_A(-(-A)) = \varphi_A(A) = 0 \Rightarrow \varphi_{-A}(x) \mid \varphi_A(-x) \\ \varphi_{-A}(-A) = 0 \Rightarrow \varphi_A(x) \mid \varphi_{-A}(-x) \Rightarrow \varphi_A(-x) \mid \varphi_{-A}(x) \end{array} \right)$

$\Rightarrow \varphi_A(x)$ è pari. Da lemma si vede allora che $\varphi_A(x) = x^t\cdot(x-\lambda_1)^{d_1}(x+\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}(x+\lambda_k)^{d_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $\lambda_i \neq 0$ e t pari

Ma allora scrivo la forma di Jordan di A così: $\begin{pmatrix} J(0,m_1) && \\ & \ddots J(0,m_s) & \\ && U \end{pmatrix}$. Vale che $\varphi_U(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x+\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}(x+\lambda_k)^{d_k}$ quindi U è invertibile,

ha traccia nulla (perché $tr(A) = 0$ e $tr\begin{pmatrix} J(0,m_1) & \\ & \ddots J(0,m_s) \end{pmatrix} = 0$) e ha pol min pari. Infine $H := \begin{pmatrix} J(0,m_1) & \\ & \ddots J(0,m_s) \end{pmatrix}$ è nilpotente

Esercizio 2.

1) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A tale che nella forma canonica di Jordan di A esiste un unico blocco relativo a λ e sia k la taglia di tale blocco. Siano $\lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ gli altri autovalori di A. Mostrare che

$$\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{k-1} \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)$$

($\tilde{V}(\mu)$ è l'autospazio generalizzato di A relativo all'autovalore μ).

2) Siano $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $b \in \mathbb{C}^n$ tali che, per ogni autovalore λ di A, $rg(A - \lambda I|b) = n$ ($(A - \lambda I|b)$ è la matrice $n \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo b come ultima colonna a $A - \lambda I$). Allora b è un vettore ciclico per A (cioè $b, Ab, ..., A^{n-1}b$ è una base di $\mathbb{C}^n$).

1) Dato che c'è un unico blocco relativo a λ ed ha dimensione $k \times k$, si ha che $\varphi_A(x) = (x-\lambda)^k\cdot(x-\lambda_2)^{k_2}\cdots(x-\lambda_m)^{k_m}$ $\forall x \in \mathbb{C}$

Dimostriamo innanzitutto che $Im(A-\lambda Id) \subseteq Ker((A-\lambda Id)^{k-1}) \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)$:

Sia $w \in \mathbb{C}^n$, vogliamo far vedere che $(A-\lambda Id)w \in Ker((A-\lambda Id)^{k-1}) \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)$

Ricordiamo che $\mathbb{C}^n = \underbrace{\tilde{V}(\lambda)}_{= Ker(A-\lambda Id)^k} \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)$ quindi $w = v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ con $v_i \in \tilde{V}(\lambda_i)$

Quindi $(A-\lambda Id)w = (A-\lambda Id)v_1 + (A-\lambda Id)v_2 + \cdots + (A-\lambda Id)v_m$ e vale $\begin{cases} (A-\lambda Id)v_1 \in Ker(A-\lambda Id)^{k-1} \text{ perché } (A-\lambda Id)^{k-1}(A-\lambda Id)v_1 = (A-\lambda Id)^k v_1 = 0 \\ (A-\lambda Id)v_i \in \tilde{V}(\lambda_i) \text{ se } i \neq 1 \text{ perché } (A-\lambda_i Id)^{d_i}(A-\lambda Id)v_i = (A-\lambda Id)(A-\lambda_i Id)^{d_i}v_i = (A-\lambda Id)0 = 0 \end{cases}$

Dunque $(A-\lambda Id)w \in Ker((A-\lambda Id)^{k-1}) \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)$ $\square$

Dimostriamo ora l'uguaglianza:

Dato che c'è un solo blocco relativo a λ si ha che $\dim Ker(A-\lambda Id) = d_1 = 1$

Quindi $\dim Im(A-\lambda Id) = n - \dim Ker(A-\lambda Id) = n-1$

Dato che l'unico blocco ha dimensione $k\times k$ si ha che $1 = \#\text{blocchi } k\times k = \dim Ker(A-\lambda Id)^k - \dim Ker(A-\lambda Id)^{k-1}$

Ma allora $\dim\left(Ker(A-\lambda Id)^{k-1} \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)\right) = \dim Ker(A-\lambda Id)^{k-1} + \dim(\tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)) = \dim Ker(A-\lambda Id)^k - 1 + \dim(\tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)) = \dim\left(Ker(A-\lambda Id)^k \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)\right) - 1 = n-1$

Quindi i due spazi hanno la stessa dimensione e, essendo uno dentro l'altro, sono uguali

2) Dato che λ è autovalore allora $\dim Ker(A-\lambda I) \geq 1$ ovvero $rg(A-\lambda I) \leq n-1$

Dato però che $rg(A-\lambda I|b) = n$ l'unica possibilità è che $rg(A-\lambda I) = n-1$ $\forall \lambda$ autovalore

Quindi $\dim Ker(A-\lambda I) = 1$ $\forall \lambda$ autovalore ovvero A ha un solo blocco $\forall \lambda$ autovalore

Per a) allora $Im(A-\lambda_1 I) = Ker(A-\lambda_1 I)^{k_1-1} \oplus \tilde{V}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}(\lambda_m)$ $\forall \lambda_1$ autovalore

$)$ Dato però che $rg(A-\lambda I(b))=n$ l'unica possibilità è che $rg(A-\lambda I)=n-1$ $\forall \lambda$ autovalore

Quindi $\dim Ker(A-\lambda I)=1$ $\forall \lambda$ autovalore ovvero A ha un solo blocco $\forall \lambda$ autovalore

Per a) allora $Im(A-\lambda_1 I)=Ker(A-\lambda_1 I)^{k_1-1}\oplus \tilde{V}(\lambda_2)\oplus\ldots\oplus\tilde{V}(\lambda_m)$ $\forall \lambda_1$ autovalore

Si ha che $b\in\mathbb{C}^n=\tilde{V}(\lambda_1)\oplus\tilde{V}(\lambda_2)\oplus\ldots\oplus\tilde{V}(\lambda_m)$, però $b\notin Im(A-\lambda_1 Id)=Ker(A-\lambda_1 I)^{k_1-1}\oplus\tilde{V}(\lambda_2)\oplus\ldots\oplus\tilde{V}(\lambda_m)$ $\forall \lambda_1$ autovalore

quindi $\boxed{b=v_1+\ldots+v_m \quad \text{con } v_i\in\tilde{V}(\lambda_i)\setminus Ker(A-\lambda_i I)^{k_i-1} \quad \forall i}$

Dimostro ora che $\mathbb{C}^n\subseteq Span(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)$. Equivalentemente, dato che $\mathbb{C}^n=\tilde{V}(\lambda_1)\oplus\tilde{V}(\lambda_2)\oplus\ldots\oplus\tilde{V}(\lambda_m)$, dimostro che $\tilde{V}(\lambda_i)\subseteq Span(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)$.

Lemma. $\forall w\in\tilde{V}(\lambda_i)\setminus Ker(A-\lambda_i I)^{k_i-1}$ si ha che

$\{w,(A-\lambda_i I)w,\ldots,(A-\lambda_i I)^{k_i-1}w\}$ è base di $\tilde{V}(\lambda_i)$

(e quindi anche $\{w,Aw,\ldots,A^{k_i-1}w\}$)

dim: Sicuramente $(A-\lambda_i I)^j w\in\tilde{V}(\lambda_i)$, dimostriamo che sono linearmente indipendenti:

$$\sum_{j=0}^{k_i-1}\alpha_j(A-\lambda_i I)^j w=0 \xRightarrow[\text{per }(A-\lambda_i I)^{k_i-1}]{\text{moltiplico}} \alpha_0(A-\lambda_i I)^{k_i-1}w=0, \text{ ma } w\notin Ker(A-\lambda_i I)^{k_i-1}$$

$\Rightarrow (A-\lambda_i I)^{k_i-1}w\neq 0 \Rightarrow \alpha_0=0$. Reiterando si ha che $\alpha_j=0$ $\forall j$ $\square$

Siamo pronti a dimostrare che $\tilde{V}(\lambda_i)\subseteq Span(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)$. Lo dimostro per $\tilde{V}(\lambda_1)$, gli altri casi sono analoghi.

Consideriamo $\overline{v_1}:=\prod_{i\geq 2}(A-\lambda_i Id)^{k_i}b$. Dato che $b=v_1+\ldots+v_m$ con $v_i\in\tilde{V}(\lambda_i)$ vale che $\overline{v_1}=\prod_{i\geq 2}(A-\lambda_i Id)v_1$.

Consideriamo il polinomio $p(x):=\prod_{i\geq 2}(x-\lambda_i)^{k_i}$, per divisione euclidea con $(x-\lambda_1)$ si ha $\prod_{i\geq 2}(x-\lambda_i)^{k_i}=q(x)(x-\lambda_1)+\beta$

Valutando in $x=\lambda_1$ si ha che $\prod_{i\geq 2}(\lambda_1-\lambda_i)^{k_i}=\beta$, quindi $\beta\neq 0$

Quindi $\overline{v_1}=\prod_{i\geq 2}(A-\lambda_i Id)v_1=[q(A)(A-\lambda_1 Id)+\beta Id]v_1$ e quindi $\overline{v_1}\in\tilde{V}(\lambda_1)$ e $\overline{v_1}\notin Ker(A-\lambda_1 Id)^{k_1-1}$ (Si vede perché $v_1\in Ker(A-\lambda_1 Id)^{k_1}\setminus Ker(A-\lambda_1 Id)^{k_1-1}$ e $\beta\neq 0$)

Ma allora per il Lemma si ha che $\tilde{V}(\lambda_1)=Span\{\overline{v_1},(A-\lambda_1 Id)\overline{v_1},\ldots,(A-\lambda_1 Id)^{k_1-1}\overline{v_1}\}$ e infine

$\forall t\leq k_1-1$ $(A-\lambda_1 Id)^t\overline{v_1}=(A-\lambda_1 Id)^t\cdot\prod_{i\geq 2}(A-\lambda_i Id)^{k_i}b\in Span\{b,Ab,\ldots,A^{n-1}b\}$ perché $\sum_{i=1}^m k_i=n$ (k_i è il grado di $(x-\lambda_i)$ in φ_A, ma $\varphi_A=p_A$ perché A ha ha solo un blocco di Jordan $\forall\lambda_i$. Quindi $\sum_{i=1}^m k_i=n$).

Quindi $\tilde{V}(\lambda_1)\subseteq Span(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)$

Esercizio 3.

Mostrare, usando la forma canonica di Jordan reale, che una matrice quadrata reale ha determinante positivo se e solo se non ha l'autovalore 0 e la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori negativi è pari.

Siano $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ gli autovalori reali di A e $\lambda_1,\overline{\lambda_1},\ldots,\lambda_s,\overline{\lambda_s}$ gli autovalori complessi non reali di A

$$\text{Allora } A\sim\begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{\alpha_k} & & \\ & & & J_{\lambda_1,\overline{\lambda_1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{\lambda_s,\overline{\lambda_s}}\end{pmatrix}$$

Osserviamo ora che se $\alpha\in\mathbb{R}$ allora J_α è triangolare, di dimensione $\mu_a(\alpha)$ e sulla diagonale ha α $\Rightarrow$ $\det J_\alpha=\alpha^{\mu_a(\alpha)}$

e che $J_{\lambda,\overline{\lambda}}$ è triangolare a blocchi, ha dimensione $2\mu_a(\lambda)$ e ogni blocco è $\begin{pmatrix}Re\lambda & Im\lambda\\ -Im\lambda & Re\lambda\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\det J_{\lambda,\overline{\lambda}}=\det\begin{pmatrix}Re\lambda & Im\lambda\\ -Im\lambda & Re\lambda\end{pmatrix}^{\mu_a(\lambda)}=|\lambda|^{2\mu_a(\lambda)}$

Ma allora $\det A=\det(J_0)\cdot\prod_{\substack{\alpha \text{ autoval}\\ \alpha>0}}\det J_\alpha\cdot\prod_{\substack{\alpha \text{ autoval}\\ \alpha<0}}\det J_\alpha\cdot\prod_{\substack{\lambda \text{ autoval}\\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}}\det J_{\lambda,\overline{\lambda}}$

$$=0^{\mu_a(0)}\cdot\underbrace{\Big(\prod_{\substack{\alpha \text{ aut}\\ \alpha>0}}\alpha^{\mu_a(\alpha)}\Big)}_{>0}\cdot\Big(\prod_{\substack{\alpha \text{ aut}\\ \alpha<0}}\alpha^{\mu_a(\alpha)}\Big)\underbrace{\Big(\prod_{\substack{\lambda \text{ aut}\\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}}|\lambda|^{2\mu_a(\lambda)}\Big)}_{>0}$$

Quindi $\det A>0 \iff \mu_a(0)=0$ e $\prod_{\substack{\alpha \text{ aut}\\ \alpha<0}}\alpha^{\mu_a(\alpha)}>0 \iff 0$ non è autoval e $\sum_{\substack{\alpha \text{ aut}\\ \alpha<0}}\mu_a(\alpha)$ è pari

Esercizio 4.

Nei casi seguenti, determinare se φ è un prodotto scalare su V e nel caso lo sia determinare la matrice di φ nella base canonica di V.

a) $V=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(X,Y)=\mathrm{tr}(XY)-\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)$.

b) $V=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(X,Y)=X_{11}Y_{22}-X_{22}Y_{11}$.

c) $V=\mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p,q)=p(0)(q(0)+q(1))-2p(1)(q(1)-q(0))$.

d) $V=\mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d,a'x^3+b'x^2+c'x+d')=aa'-bc'-cb'$.

e) $V=\mathbb{R}^4$, $\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\right)=2x_1y_1-x_2y_3+x_1y_4-x_3y_2+x_4y_3+2x_4y_4$.

f) $V=\mathbb{R}^4$, $\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\right)=2x_1y_1-2x_1y_2-x_1y_3+x_1y_4$.

a) φ è prodotto scalare:

1) $\varphi(Y,X)=tr(XY)-tr(X)tr(Y)=tr(YX)-tr(Y)tr(X)=\varphi(X,Y)$

2) $\varphi(X+\alpha\tilde{X},Y)=tr((X+\alpha\tilde{X})Y)-tr(X+\alpha\tilde{X})trY=tr(XY+\alpha\tilde{X}Y)-tr(X)tr(Y)-\alpha tr(\tilde{X})tr(Y)=$

$=tr(XY)+\alpha tr(\tilde{X}Y)-tr(X)tr(Y)-\alpha tr(\tilde{X})tr(Y)=\varphi(X,Y)+\alpha\varphi(\tilde{X},Y)$

3) $\varphi(X,Y+\beta\tilde{Y})\underset{1)}{=}\varphi(Y+\beta\tilde{Y},X)\underset{2)}{=}\varphi(Y,X)+\beta\varphi(\tilde{Y},X)\underset{1)}{=}\varphi(X,Y)+\beta\varphi(X,\tilde{Y})$

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi)=\begin{pmatrix}
\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)\\
\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)\\
\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)\\
\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) & \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

b) φ non è prodotto scalare:

$\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)=1$

$\neq$

$\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right)=-1$

c) φ non è prodotto scalare:

$\varphi(x,1)=0$

$\neq$

$\varphi(1,x)=-1$

d) φ è prodotto scalare:

1) $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d,a'x^3+b'x^2+c'x+d')=aa'-bc'-cb'=a'a-b'c-c'b=\varphi(a'x^3+b'x^2+c'x+d',ax^3+bx^2+cx+d)$

$\varphi(x,1) = 0$

$\neq$

$\varphi(1,x) = -1$

d) φ è prodotto scalare:

1) $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d,\ a'x^3+b'x^2+c'x+d') = aa'-bc'-cb' = a'a-b'c-c'b = \varphi(a'x^3+b'x^2+c'x+d',\ ax^3+bx^2+cx+d)$

2) $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d+k(\tilde a x^3+\tilde b x^2+\tilde c x+\tilde d),\ a'x^3+b'x^2+c'x+d') = \varphi((a+k\tilde a)x^3+(b+k\tilde b)x^2+(c+k\tilde c)x+(d+k\tilde d),\ a'x^3+b'x^2+c'x+d') =$

$= (a+k\tilde a)a' - (b+k\tilde b)c' - (c+k\tilde c)b' = aa'-bc'-cb'+k(\tilde a a'-\tilde b c'-\tilde c b') = \varphi(ax^3+bx^2+cx+d,\ a'x^3+b'x^2+c'x+d')+k\varphi(\tilde a x^3+\tilde b x^2+\tilde c x+\tilde d,\ a'x^3+b'x^2+c'x+d')$

3) $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d,\ a'x^3+b'x^2+c'x+d'+k(\tilde a x^3+\tilde b x^2+\tilde c x+\tilde d)) \underset{1)}{=} \varphi(a'x^3+b'x^2+c'x+d'+k(\tilde a x^3+\tilde b x^2+\tilde c x+\tilde d),\ ax^3+bx^2+cx+d) =$

$\underset{2)}{=} \varphi(a'x^3+b'x^2+c'x+d',\ ax^3+bx^2+cx+d)+k\varphi(\tilde a x^3+\tilde b x^2+\tilde c x+\tilde d,\ ax^3+bx^2+cx+d) \underset{1)}{=} \varphi(ax^3+bx^2+cx+d,\ a'x^3+b'x^2+c'x+d')+k\varphi(ax^3+bx^2+cx+d,\ \tilde a x^3+\tilde b x^2+\tilde c x+\tilde d)$

$$M_C(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(1,1) & \varphi(1,x) & \varphi(1,x^2) & \varphi(1,x^3) \\ \varphi(x,1) & \varphi(x,x) & \varphi(x,x^2) & \varphi(x,x^3) \\ \varphi(x^2,1) & \varphi(x^2,x) & \varphi(x^2,x^2) & \varphi(x^2,x^3) \\ \varphi(x^3,1) & \varphi(x^3,x) & \varphi(x^3,x^2) & \varphi(x^3,x^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) φ è prod scalare:

1) $\varphi(y,x) = 2y_1x_1 - y_2x_3 + y_3x_4 - y_3x_2 + y_4x_3 + 2y_4x_4 = 2x_1y_1 - x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4 = \varphi(x,y)$

2) $\varphi(x+\alpha\tilde x, y) = 2(x_1+\alpha\tilde x_1)y_1 - (x_2+\alpha\tilde x_2)y_3 + (x_3+\alpha\tilde x_3)y_4 - (x_3+\alpha\tilde x_3)y_2 + (x_4+\alpha\tilde x_4)y_3 + 2(x_4+\alpha\tilde x_4)y_4 =$

$= \varphi(x,y) + \alpha\varphi(\tilde x, y)$

3) $\varphi(x, y+\beta\tilde y) \underset{1)}{=} \varphi(y+\beta\tilde y, x) \underset{2)}{=} \varphi(y,x)+\beta\varphi(\tilde y,x) \underset{1)}{=} \varphi(x,y)+\beta\varphi(x,\tilde y)$

$$M_C(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

f) φ non è prodotto scalare:

$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 1$

$\neq$

$\varphi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$