Def [Continuità] $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (1)

NOTA Per ogni ε esiste una δ che soddisfa la proprietà, dunque δ può essere pensata come funzione di ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$).

Esercizio 1 Dimostrare che la definizione di continuità è eq. a $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$ (2)

Soluzione

(1) $\Rightarrow$ (2) ovvia poiché $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Fisso $\varepsilon > 0$ (1), voglio trovare δ che faccia funzionare la proprietà (1). Chiamo $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ (2). Per la proprietà (2) esiste $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$ tale che $\forall x \in A$ con $|x - x_0| < \delta_1$ vale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon_1$. Noto che $\varepsilon_1 = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Dunque $\forall x \in A$ con $|x - x_0| < \delta_1$ vale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$. Quindi $\delta = \delta_1$ fa funzionare la proprietà (1) $\square$

NOTA 1 Riflettere sul fatto che questo lo dimostra "$\forall \varepsilon$"!

NOTA 2 Qua basta qualunque cosa che renda ε strettamente più piccolo, non occorre necessariamente dividere per 2.

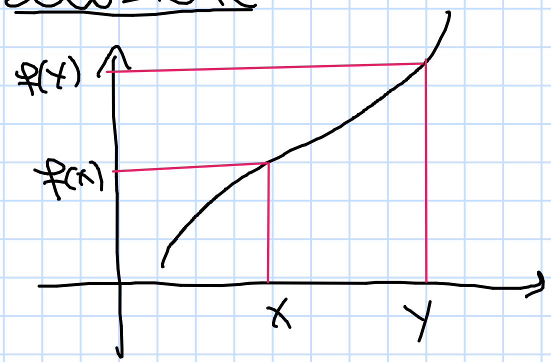
Def [Uniforme continuità] $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è UNIFORMEMENTE CONTINUA su A se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x, y \in A$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

NOTA La definizione di continuità è PUNTUALE (nel senso che una funzione è continua in un punto), mentre la definizione di UNIFORME CONTINUITÀ è su un insieme A.

NOTA Provate a dimostrare che se $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è UNIF. CONTINUA su A allora è continua $\forall x_0 \in A$ (ovvero, è CONTINUA su A)!

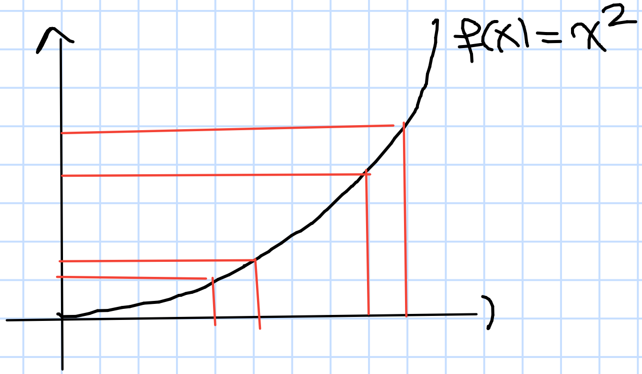
Esercizio 2 Trovare una funzione $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua su A ma non sia uniformemente continua su A.

Soluzione



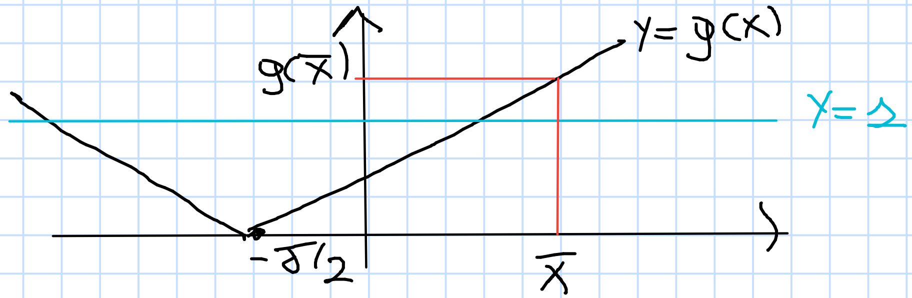
Dire che se $|x-y|$ non è troppo grande allora $|f(x)-f(y)|$ non è troppo grande significa dire che f non si "inclina troppo" (fare un disegno). Dunque l'intuizione ci suggerisce di cercare una funzione che si inclini "sempre di più"!

Proviamo per esempio $f(x) = x^2$



Supponiamo per assurdo ① che la funzione sia uniformemente continua. Visto che la proprietà deve valere $\forall \varepsilon > 0$, deve valere in particolare per $\varepsilon = 1$, ② ovvero deve $\exists\, \delta > 0$ tale che, se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| < 1$.

Consideriamo le coppie di punti x ed $x + \delta/2$, $x \in \mathbb{R}$. Notiamo subito che $|x - (x + \delta/2)| = |\delta/2| < \delta$, dunque dovrebbe valere $|x^2 - (x + \delta/2)^2| < 1$.
Ma $|x^2 - (x + \delta/2)^2| = \left|\delta x + \frac{\delta^2}{2}\right|$ e la funzione $g(x) = |\delta x + \delta^2/2|$ è decisamente non limitata da 1, dunque è possibile scegliere $\bar{x}$ tale che $g(\bar{x}) > 1$. ASSURDO



NOTA 1 Per dimostrare per assurdo si suppone che la tesi sia vera e si cerca una qualche contraddizione.

NOTA 2 e 3 Se sospettiamo che una cosa che deve valere per ogni elemento di un certo insieme sia falsa, possiamo tentare elementi più "comodi" e sperare che (NON) funzionino. Nello specifico, avrebbe funzionato un qualunque $\varepsilon > 0$ (quindi $\varepsilon = 1$ per semplicità) ed un qualunque sottoinsieme di coppie di punti vicini che vanno "all'infinito".