Esercizio 1.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita n, e sia φ un prodotto scalare su V. Siano $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k \in V$ linearmente indipendenti e a due a due ortogonali, e sia $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k)$.

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) Se φ è non degenere, allora $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k$ si estende ad una base ortogonale di $V \iff \phi_{|W}$ è non degenere $\iff W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff$ nessun $\underline{v}_i$ è isotropo.

b) Se nessun $\underline{v}_i$ è isotropo allora $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k$ si estende ad una base ortogonale di V.

c) $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_k$ si estende ad una base ortogonale di $V \iff W \cap W^\perp = W \cap V^\perp$.

a) ● $v_1, ..., v_k$ si estende a base ortogonale di $V \iff \phi_{|W}$ è non deg

dim: $\boxed{\Rightarrow}$

Sia $\{\underbrace{v_1, ..., v_k}_{W}, v_{k+1}, ..., v_n\}$ base ortogonale di V

Se $\exists\, w \in \mathrm{Rad}(\phi_{|W})$ allora $\phi(w, v_i) = 0 \ \forall i = 1, ..., k$ perché $v_i \in W$

e vale anche $\phi(w, v_j) = 0 \quad \forall j = k+1, ..., n$ perché

$\phi(w, v_j) = \phi(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k, v_j) = 0$ perché v_j è ortogonale a v_i per ipotesi

Ma allora $w \in \mathrm{Rad}(\phi) = \{0\} \Rightarrow w = 0$

ϕ è non deg

Quindi $\mathrm{Rad}(\phi_{|W}) = \{0\}$, ovvero $\mathrm{Rad}\,\phi_{|W}$ è non deg

$\boxed{\Leftarrow}$

(Visto nella lezione del 28/03)

$\varphi_{|W}$ non-deg $\Rightarrow V = W \oplus W^\perp$

Sia $\{v_{k+1}, ..., v_n\}$ base ortogonale di $W^\perp$

Allora $\{v_1, ..., v_n\}$ è base ortogonale

● $\phi_{|W}$ non deg $\iff W \cap W^\perp = \{0\}$

dim: $\boxed{\Rightarrow}$ $w \in W \cap W^\perp \Rightarrow \phi(w, w') = 0 \ \forall w' \in W \Rightarrow w \in \mathrm{Rad}\,\phi_{|W} = \{0\} \Rightarrow w = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $w \in \mathrm{Rad}\,\phi_{|W} \Rightarrow \phi(w, w') = 0 \ \forall w' \in W \Rightarrow w \in W \cap W^\perp = \{0\} \Rightarrow w = 0$

● $W \cap W^\perp = \{0\} \iff v_i$ isotropo $\forall_{i=1,...,k}$

dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Se per assurdo $\exists\, v_i$ t.c. $\phi(v_i, v_i) = 0$ allora, dato che $\phi(v_i, v_j) = 0 \ \forall j \neq i$

si ha che $v_i \in W^\perp$. Ma allora $v_i \in W \cap W^\perp$ ↯

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $v \in W \cap W^\perp$ Allora $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ e $\phi(v, v_i) = 0 \ \forall i$

$ \overset{\shortparallel}{\alpha_i \phi(v_i, v_i)}$

Dato che v_i è isotropo si ha che $\phi(v_i, v_i) \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow v = 0$

b) In a) le frecce "$\Leftarrow$" valgono sempre

c) $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\{\underbrace{v_1, ..., v_k}_{W}, v_{k+1}, ..., v_n\}$ base ortogonale di V. Dato che $V^\perp \subseteq W^\perp$

allora $W \cap V^\perp \subseteq W \cap W^\perp$. Viceversa sia $w \in W \cap W^\perp$, devo dim che $w \in V^\perp$

Osserviamo che $\phi(w, v_i) = 0 \ \forall_{i=1,...,k}$ perché $w \in W^\perp$ e $\phi(w, v_j) = 0 \ \forall_{j=k+1,...,n}$

perché $v_j \in W^\perp$ e $w \in W$. Quindi $w \in V^\perp$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{array}{rl} \text{Grassmann} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp - \dim(W \cap W^\perp) \\ \dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^\perp) \\ W \cap W^\perp = W \cap V^\perp \end{array} \right. \\ \text{(Visto nella lezione del 28/03)} \rightarrow & \\ \text{Ipotesi} \rightarrow & \end{array}$$

$$\Rightarrow \dim(W + W^\perp) = \cancel{\dim W} + (\dim V - \cancel{\dim W} + \cancel{\dim(W \cap W^\perp)}) - \cancel{\dim(W \cap W^\perp)} = \dim V$$

Dato che $W + W^\perp \subseteq V$ allora $W + W^\perp = V$

Sia allora $\{w_1, ..., w_t\}$ base ortogonale di $W^\perp$

Allora, dato che $W + W^\perp = V$, si ha che $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_t\}$ genera V

Estraendo una base, dato che $\{v_1, ..., v_k\}$ sono lin indip, si trova $\{v_1, ..., v_k, w_{i_1}, ..., w_{i_s}\}$ base ortogonale di V

Esercizio 2.

Sia ϕ_M il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ dato dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale per ϕ_M che contiene $\underline{e}_2 - \underline{e}_3$.

b) Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale per ϕ_M che contiene $\underline{e}_3$.

c) Calcolare la segnatura di ϕ_M.

d) Calcolare la segnatura della restrizione di ϕ_M a $U = \mathrm{Span}(\underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$ e a $U^\perp$.

e) Esiste $W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio di dimensione 3 tale che la segnatura della restrizione di ϕ_M a W sia $(1, 2, 0)$?

f) Esiste $W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio di dimensione 3 tale che la segnatura della restrizione di ϕ_M a W sia $(1, 0, 2)$?

g) Rispondere alle domande c) e d) per il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ dato dalla matrice $M' = M - E_{44}$.

a) $e_2 - e_3$ è isotropo $\left(\phi(e_2 - e_3, e_2 - e_3) = \phi(e_2, e_2) + \phi(e_3, e_3) - 2\phi(e_2, e_3) = 3 + 1 - 4 = 0 \right)$

Se per assurdo si estendesse a base ortogonale allora $e_2 - e_3 \in \mathrm{Rad}\,\phi$, ma

$\phi(e_2, e_2 - e_3) = 1 \neq 0$ ↯

b) e_3 non è isotropo $(\phi(e_3, e_3) = 1)$

Trovo una base ortogonale con l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Parto da $\{e_3, e_1, e_2, e_4\}$

$\boxed{e_3}$ non è isotropo $\Rightarrow$ $v_2' = e_1 - \dfrac{\phi(e_1, e_3)}{1} e_3 = e_1 - 3e_3$

$v_3' = e_2 - \dfrac{\phi(e_2, e_3)}{1} e_3 = e_2 - 2e_3$

$v_4' = e_4 - \dfrac{\phi(e_4, e_3)}{1} e_3 = e_4$

$\boxed{e_3}$ non è isotropo $\Rightarrow$ $v_2' = e_1 - \dfrac{\phi(e_1,e_3)}{1} e_3 = e_1 - 3e_3$

$v_3' = e_2 - \dfrac{\phi(e_2,e_3)}{1} e_3 = e_2 - 2e_3$

$v_4' = e_4 - \dfrac{\phi(e_4,e_3)}{1} e_3 = e_4$

Reitero considerando $\mathrm{Span}\{e_1-3e_3,\ e_2-2e_3,\ e_4\}$ e $\phi_{|\mathrm{Span}\{e_1-3e_3,\, e_2-2e_3,\, e_4\}}$

$\boxed{e_1-3e_3}$ non è isotropo $\left(\phi(e_1-3e_3, e_1-3e_3) = \phi(e_1,e_1) + 9\phi(e_3,e_3) - 6\phi(e_1,e_3) = 5+9-18 = -4\right)$

$v_3'' = e_2 - 2e_3 - \dfrac{\phi(e_2-2e_3, e_1-3e_3)}{-4}(e_1-3e_3) = e_2 - 2e_3 + \frac{+2}{-4}(e_1-3e_3) = e_2 - 2e_3 - \frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3 = e_2 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3$

$v_4'' = e_4 - \dfrac{\phi(e_4, e_1-3e_3)}{-4}(e_1-3e_3) = e_4 - \frac{2}{-4}(e_1-3e_3) = e_4 + \frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_3$

Reitero:

$e_2 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3$ è isotropo

$\boxed{e_4 + \frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_3}$ non è isotropo $\left(\phi(e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3,\ e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3) = 1\right)$

$$v_4''' = e_2 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{\overbrace{\phi(e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3,\ e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3)}^{=0}}{1}\left(e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3\right) = \boxed{e_2 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_3}$$

La base è quindi $\left\{e_3,\ e_1-3e_3,\ e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3,\ e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3\right\}$. Effettivamente la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-4&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

c) Considerando la base $\left\{e_3,\ e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3,\ \underbrace{e_1-3e_3}_{2},\ e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3\right\}$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1&&&\\ &1&&\\ &&-1&\\ &&&0 \end{pmatrix}$, quindi per il Teo di Sylvester reale ϕ ha segnatura $(2,1,1)$

d) Osserviamo che $V^\perp = \mathrm{Rad}\,\phi_M = \mathrm{Ker}\,M = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{l}\mathrm{Rad}\,\phi_M = \mathrm{Ker}\,M:\ x \in \mathrm{Rad}\,\phi_M \Leftrightarrow \phi(e_i,x)=0\ \forall i=1,\dots,4 \Leftrightarrow e_i^T M x = 0\ \forall i=1,\dots,4 \Leftrightarrow Mx=0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,M \\ \mathrm{Ker}\,M = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}:\ \text{Riduzione a scalini...}\end{array}\right)$

quindi $\dim U^\perp = \dim V - \dim U + \dim(U \cap V^\perp) = 4-3+0 = 1$ $\left(U \cap V^\perp = \mathrm{Span}(e_2,e_3,e_4) \cap \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = 0\right)$

e sicuramente $V^\perp \subseteq U^\perp$. Dato che $\dim V^\perp = 1$ allora $U^\perp = V^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

(Visto nella lezione del 17/04)

Quindi $M(\varphi_{|U}) = \begin{pmatrix} 3&2&1\\ 2&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$, $M(\varphi_{|U^\perp}) = (0)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2 = i_+(\varphi) = i_+(\varphi_{|U}) + \overset{0}{i_+(\varphi_{|U^\perp})} \\ 1 = i_-(\varphi) = i_-(\varphi_{|U}) + \underset{=0}{i_-(\varphi_{|U^\perp})} \\ 0 = i_0(\varphi) = i_0(\varphi_{|U}) + \underset{=1}{i_0(\varphi_{|U^\perp})} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_+(\varphi_{|U}) = 2 \\ i_-(\varphi_{|U}) = 1 \\ i_0(\varphi_{|U}) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} i_+(\varphi_{|U^\perp}) = i_-(\varphi_{|U^\perp}) = 0 \\ i_0(\varphi_{|U^\perp}) = 1 \end{cases}$

e) No, perché si avrebbe che $\exists W' \subseteq W$ t.c. $\begin{cases} \dim W' = 2 \\ \phi_{|W'} < 0 \end{cases}$. Ma allora, dato che $W' \subset V$ si avrebbe che $i_-(\phi) \geq 2$, assurdo perché $i_-(\phi) = 1$

f) Sì. $W = \mathrm{Span}\left(e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3,\ e_4,\ e_3\right)$. Infatti $M(\varphi_{|W}) = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{l} e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3 \text{ sta in } \mathrm{Rad}\,\phi, \text{ quindi è ortogonale a tutti} \\ e_4 \text{ è ortogonale a } e_3 \end{array}\right)$ che ha segnatura $(1,0,2)$

g)

c) Ricordiamo che, data la base $\mathcal{B} = \left\{e_3,\ e_1-3e_3,\ e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3,\ e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3\right\}$, si ha che $M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-4&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Quindi $\begin{cases} \mathrm{Rad}\,\phi = \mathrm{Span}(e_2-\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3) \\ \phi_{|\mathrm{Span}(e_1-3e_3)} \text{ è def neg} \\ \phi_{|\mathrm{Span}(e_3,\, e_4+\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_3)} \text{ è def pos} \end{cases}$. Osserviamo ora che, chiamando ϕ' il prod scalare dato da $M' = M - E_{44}$,

Riduzione a scalini...

La 4^a componente è 0

si ha che $\begin{cases} \mathrm{Rad}\,\phi' = \mathrm{Ker}\,M' = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \\ \phi'_{|\mathrm{Span}(e_1-3e_3)} = \phi_{|\mathrm{Span}(e_1-3e_3)} \text{ è def neg} \\ \phi'_{|\mathrm{Span}(e_3)} = \phi_{|\mathrm{Span}(e_3)} \text{ è def pos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_0(\phi') = 2 \\ i_-(\phi') \geq 1 \\ i_+(\phi') \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \sigma(\phi') = (1,1,2)$

d) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3&2&1\\ 2&1&0\\ 1&0&-1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow i_0(\phi'_{|U}) = 1$ Inoltre $\phi'_{|U}(e_1,e_1) = 3$ e $\phi'_{|U}(e_3,e_3) = -1$

quindi $\sigma(\phi'_{|U}) = (1,1,1)$

Per quanto riguarda $\sigma(\phi'_{|U^\perp})$:

$\dim U^\perp = \dim V - \dim U + \dim(U \cap V^\perp) = 4-3+1 = 2$ $\left(U \cap V^\perp = \mathrm{Span}(e_2,e_3,e_4) \cap \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix}0\\a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha+\beta \\ a = -3\alpha-2\beta \\ b = \beta \\ c = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ a = \alpha \\ b = -2\alpha \\ c = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$

e sicuramente $V^\perp \subseteq U^\perp$. Dato che $\dim V^\perp = 2$ allora $U^\perp = V^\perp = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

quindi $\phi'_{|U^\perp} = \phi'_{|V^\perp} = 0 \Rightarrow \sigma(\phi'_{|U^\perp}) = (0,0,2)$

Esercizio 3.
Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, e siano $b, \varphi \in PS(V)$ i prodotti scalari su V dati da $b(X,Y) = \operatorname{tr}(XY)$ e $\varphi(X,Y) = \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$, per ogni $X, Y \in V$. Sia $W = \operatorname{Span}(I_2)$.

a) Si verifichi che il cono isotropo di φ coincide con l'insieme delle matrici singolari: $CI(\varphi) = \{A \in V \mid \det A = 0\}$.

b) Determinare $W^\perp$ relativamente ad entrambi i prodotti scalari.

c) Mostrare che la restrizione di b a $W^\perp$ è non degenere e dedurne che φ è non degenere.

d) Si calcoli la segnatura di φ

e) Si determini il massimo intero k per cui esiste un sottospazio W di V con $\dim W = k$ e tale che $W \subseteq CI(\varphi)$.

a) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, allora $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ e vale

$A \in CI(\varphi) \iff \varphi(A,A) = 0 \iff \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(A)^2 = 0 \iff (a^2+bc+bc+d^2) - (a+d)^2 = 0 \iff bc - ad = 0 \iff \det A = 0$

b) $\boxed{W^\perp \text{ rispetto a } b}$ $A \in W^\perp \iff b(A, I_2) = 0 \iff \operatorname{tr}(A) = 0$. Quindi $W^\perp = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$

$\boxed{W^\perp \text{ rispetto a } \varphi}$ $A \in W^\perp \iff \varphi(A, I_2) = 0 \iff \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(A)\cdot 2 = 0 \iff \operatorname{tr}(A) = 0$. Quindi $W^\perp = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$

c) $b_{|W^\perp}$ è non degenere: Una base di $W^\perp = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

In questa base, la matrice di $b_{|W^\perp}$ è $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3.

Quindi $b_{|W^\perp}$ è non degenere

φ è non degenere: Sia $A \in \operatorname{Rad}\varphi$, cioè $\varphi(A,B) = 0$ $\forall B \in M_2(\mathbb{R})$. Allora $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$ $\forall B \in M_2(\mathbb{R})$

Osserviamo che, dato che $\operatorname{Rad}\varphi \subseteq W^\perp$, si ha che $A \in W^\perp$

Inoltre vale $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$ $\forall B \in W^\perp$, quindi $\operatorname{tr}(AB) = 0$ $\forall B \in W^\perp$. Ma allora $A \in \operatorname{Rad} b_{|W^\perp} = \{0\}$

$\Downarrow$

$\operatorname{tr}(B) = 0$

d) Trovo una base ortogonale con l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Parto da $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(Vedi Es 4 Test 2)

Sono tutti isotropi, quindi considero il primo elemento non nullo di $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

che è $\varphi(e_1, e_4) = -1$

quindi considero $\{e_1 + e_4, e_2, e_3, e_4\}$:

$\boxed{e_1 + e_4}$ non è isotropo: $\phi(e_1+e_4, e_1+e_4) = 2\phi(e_1, e_4) = -2$

$$v_2' = e_2 - \frac{\phi(e_2, e_1+e_4)}{-2}(e_1+e_4) = e_2 + 0 = e_2$$

$$v_3' = e_3 - \frac{\phi(e_3, e_1+e_4)}{-2}(e_1+e_4) = e_3 + 0 = e_3$$

$$v_4' = e_4 - \frac{\phi(e_4, e_1+e_4)}{-2}(e_1+e_4) = e_4 - \frac{1}{2}(e_1+e_4) = \frac{1}{2}(e_4 - e_1)$$

e_2, e_3 isotropi, ma $\frac{1}{2}(e_4 - e_1)$ non isotropo. Equivalentemente considero $\boxed{e_4 - e_1}$ $\left(\phi(e_4 - e_1, e_4 - e_1) = -2\phi(e_4, e_1) = 2\right)$

$$v_3'' = e_2 - \frac{\phi(e_2, e_4 - e_1)}{2}(e_4 - e_1) = e_2$$

$$v_4'' = e_3 - \frac{\phi(e_3, e_4 - e_1)}{2}(e_4 - e_1) = e_3$$

Sono tutti isotropi, quindi considero il primo elemento non nullo di $M(\varphi_{|\operatorname{Span}(e_2, e_3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

che è $\phi(e_2, e_3) = 1$ Quindi considero $\boxed{e_2 + e_3}$ $\left(\phi(e_2+e_3, e_2+e_3) = 2\right)$

$$v_4''' = e_3 - \frac{\phi(e_3, e_2+e_3)}{2}(e_2+e_3) = e_3 - \frac{1}{2}(e_2+e_3) = \frac{1}{2}(e_3 - e_2)$$, equivalentem $\boxed{e_3 - e_2}$

La base è $\mathcal{B} = \{e_1 + e_4, e_1 - e_4, e_2 + e_3, e_2 - e_3\}$ e $M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$

quindi $\sigma(\phi) = (2, 2, 0)$

e) Dico che $k = 2$, infatti $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ha dim 2 e

ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante $0 \implies W \subseteq CI(\varphi)$

Se per assurdo $\exists\, \widetilde{W} \subseteq CI(\varphi)$ t.c. $\dim \widetilde{W} = 3 \implies \varphi(w,w) = 0$ $\forall w \in \widetilde{W} \implies$

$\implies \forall w, \overline{w} \in W$ $\varphi(w, \overline{w}) = \dfrac{\varphi(w+\overline{w}, w+\overline{w}) - \varphi(w,w) - \varphi(\overline{w}, \overline{w})}{2} = 0$

Sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ base di W, che estendiamo a base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, v\}$ di V

Allora $M_{\mathcal{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \hline * & * & * & * \end{array}\right)$ che ha rango $= 1$ o 2, quindi Ker non banale $\underbrace{\text{Assurdo perché } \varphi \text{ è non degenere}}_{\operatorname{Ker} M = \operatorname{Rad}\varphi}$ ↯