Aritmetica, Tutorato 1

Qualche info:

- Tutor: Cristofer Villani
- L'orario è PROVVISORIO, controllate spesso a
  tutorato.phc.dm.unipi.it/info
- Ogni settimana, entro lunedí, lascio qualche esercizio a
  tutorato.phc.dm.unipi.it/aritmetica.

Provate a farli!

Esercizi [DN = Dispense Arit 2023/2024, DV = Dispense Arit 2022/2023]

DN 1.8.32 Fagiolo magico di altezza 1 cm ogni giorno cresce di $\frac{1}{30}$ della sua altezza. Dopo un anno, è alto > 40 m.

dim. Se a_n è l'altezza in centimetri della pianta al giorno n, vale

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{30} a_{n-1} = \frac{31}{30} a_{n-1}, \quad n > 0. \end{cases}$$

Dobbiamo mostrare: $a_{365} > 4000$.

Cerchiamo una formula chiusa per a_n: speriamo che valga

Claim $a_n = \left(\frac{31}{30}\right)^n$.

dim del claim Per induzione su n.

|Passo base| Se $n = 0$, $a_0 = 1 = \left(\frac{31}{30}\right)^0$ ✓

|Passo induttivo| Supponiamo vero il claim per n, cioè $a_n = \left(\frac{31}{30}\right)^n$; dobbiamo vedere $a_{n+1} = \left(\frac{31}{30}\right)^{n+1}$. Ma vale

$$a_{n+1} = \left(\frac{31}{30}\right) \boxed{a_n} \quad \text{per hp. ind.}$$

$$= \left(\frac{31}{30}\right) \cdot \boxed{\left(\frac{31}{30}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{31}{30}\right)^{n+1}. \qquad \square$$

Pertanto, vale

$$a_{365} = \left(\frac{31}{30}\right)^{365}$$

e si tratta di vedere

$$\left(\frac{31}{30}\right)^{365} > 4000.$$

Usate la calcolatrice o provate a usare qualche stima! $\square$

DV 1.33 Trovare una formula per

$$\begin{cases} b_0 = 1, \\ b_n = 1 - b_0 + b_1 - \dots + (-1)^n b_{n-1}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

dim. Guardiamo i primi termini. Vale

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 1 - b_0 = 1 - 1 = 0$$

$$b_2 = 1 - b_0 + b_1 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$b_3 = \dots = 0$$

Congetturiamo che sia $b_n = 0$ per ogni $n > 0$. Lo dimostriamo in tre modi:

① $\boxed{\text{Induzione forte}}$

|Passo base| $b_1 = 0$ già visto ✓.

|Passo induttivo| Supponiamo che valga $b_k = 0$ per $0 < k \leq n$; bisogna mostrare $b_{n+1} = 0$. D'altra parte,

$$b_{n+1} = 1 - b_0 + b_1 - b_2 + \dots + (-1)^{n+1} b_n$$

$$\underbrace{b_1 = \dots = b_n = 0}_{\text{per hp. ind.}} \longrightarrow = 1 - b_0 = 1 - 1 = 0. \quad \ddot\smile$$

② $\boxed{\text{Induzione debole}}$

|Passo base| uguale a ①

|Passo ind.| Supponiamo che valga $b_n = 0$. Dobbiamo mostrare $b_{n+1} = 0$.

Vale

$$b_n = 1 - b_0 + \dots + (-1)^n b_{n-1}$$

$$b_{n+1} = \underbrace{1 - b_0 + \dots + (-1)^n b_{n-1}}_{} + (-1)^{n+1} b_n$$

$$= \qquad b_n \qquad + (-1)^{n+1} b_n$$

$b_n = 0$ per hp. ind $\longrightarrow$ $= 0 + (-1)^{n+1} 0 = 0$ ☺

③ $\boxed{\text{Principio del Minimo}}$ Vogliamo $b_n = 0$ per ogni $n \geq 0$.

Supponiamo per assurdo che non sia vero: allora esiste $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c.

$b_N \neq 0$.

Consideriamo l'insieme

$$T = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq 0 \text{ e } b_n \neq 0 \}.$$

Allora

- $T \subset \mathbb{N}$ per def.
- $T \neq \emptyset$ perché, per ipotesi di assurdo, $b_N \in T$.

$\xRightarrow{\text{PdM}}$ T ammette minimo, cioè esiste $m \in T$ tale che $n \in T \Rightarrow n \geq m$.

Notiamo che $m > 1$: $m > 0$ perché $m \in T$ e $m \neq 1$ perché $b_1 = 0$.

Guardiamo b_{m-1}: per minimalità di m, $m-1 \notin T$, per cui

(i) o $m-1 \leq 0$,

(ii) oppure $b_{m-1} = 0$.

Poiché $m > 1 \Rightarrow m-1 > 0$, deve valere la (ii). Ma allora, come in ②,

$$b_m = b_{m-1} + (-1)^m b_{m-1}$$

(ii) $\longrightarrow$ $= 0$,

il che contraddice $b_m \in T$ ↯. □

Esercizio istruttivo Se non l'avete mai fatto, provate a dim

(i) ind. deb. $\Leftrightarrow$ princ. del min,

(ii) ind. deb $\Leftrightarrow$ ind forte.

DN 1.8.4 Dimostrare che ogni $n \geq 1$ si scrive come somma di potenze non negative distinte di 2.

dim. Una somma di potenze non negative di due ha la forma

$$c_0 2^0 + c_1 2^1 + \dots + c_m 2^m$$

per certi $c_i, m \in \mathbb{N}$, dove c_i è il numero di volte in cui sommiamo 2^i.

Se chiediamo che le potenze debbano essere distinte, ogni c_i può essere solo 0 oppure 1.

Si tratta quindi di mostrare che, per ogni $n \geq 1$, esistono $m \in \mathbb{N}$ e $c_0, \dots, c_m \in \{0, 1\}$ tali che

$$n = c_0 2^0 + \dots + c_m 2^m.$$

Lo facciamo per induzione debole (a voi le versioni ind. forte e minimo!).

Il passo base è chiaro, poiché per $n=1$ vale $1 = 1 \cdot 2^0$.

Per il passo induttivo, supponendo che

$$n = c_0 2^0 + \dots + c_m 2^m$$

come sopra, vogliamo trovare una scrittura analoga per $n+1$.

Supponiamo prima che $c_0 = 0$ [o che è lo stesso, n è pari]. Allora vale

$$n = c_1 2^1 + \dots + c_m 2^m$$

e si ha

$$n+1 = 2^0 + n = 2^0 + c_1 2^1 + \dots + c_m 2^m,$$

che è una scrittura di $n+1$ come potenze distinte di 1 perché $c_i \in \{0, 1\}$.

Se invece $c_0 = 1$ [equiv., n è dispari], la scrittura

$$n+1 = 2^0 + 2^0 + c_1 2^1 + c_2 2^2 + \dots + c_m 2^m$$

non va più bene, perché 2^0 compare due volte. Possiamo però scrivere

$$n+1 = 2^1 + c_1 2^1 + \dots + c_m 2^m.$$

Di nuovo, abbiamo finito se $c_1 = 0$, altrimenti iteriamo, fermandoci quando arriviamo a una potenza di 2 che non compare nello sviluppo di n [alla peggio, è 2^{m+1}].

Sia allora i il minimo indice tale che $c_i = 0$, o eventualmente $m+1$ se $c_i = 1$ per ogni $i \leq m$. Vogliamo mostrare che, se n è come sopra, si ha

$$n+1 = 2^i + c_{i+1} 2^{i+1} + \dots + c_m 2^m$$

[dove si intende $n+1 = 2^{m+1}$ se $i = m+1$]. Premettiamo un

<u>Lemma</u> Per ogni $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$.

<u>dim.</u> Per induzione su m: il passo base è $1 = 2^1 - 1$ ✓ e il passo induttivo [completate i dettagli!] è

$$\sum_{i=0}^{m+1} 2^i = \sum_{i=0}^{m} 2^i + 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n-1}$$

$$= 2^{n+2} - 1 \ ✓$$

$\square$

Allora, per come abbiamo scelto i, dev'essere

$$n = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{i-1} + c_{i+1} 2^{i+1} + \dots + c_m 2^m$$

[convincetevene!], da cui

$$n+1 = 1 + n$$

$$= 1 + \underbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{i-1}} + c_{i+1} 2^{i+1} + \dots + c_m 2^m$$

$$\text{Lemma} \longrightarrow = 1 + \quad 2^i - 1 \quad + \ \text{———}$$

$$= 2^i + c_{i+1} 2^{i+1} + \dots + c_m 2^m,$$

come voluto. Siccome questa è una scrittura di $n+1$ in pot. distinte e non neg. di 2, il passo induttivo è concluso. $\square$

<u>DV 1.30</u> (F_n) i numeri di Fibonacci. Per $n \geq 1$, $m \geq 0$, vale

$$F_n \mid F_{nm}.$$

<u>dim.</u> Ci serve l'esercizio

DV 1.29 Per $N \geq 0, M \geq 1$, vale

$$F_{N+M} = F_{M-1} F_N + F_M F_{N+1}.$$

← Questo dimostratelo voi, è analogo!

Dimostriamo la tesi (dell'es. 1.30) per induzione su m. Preciso che quindi dobbiamo mostrare

$$P(m) = \text{"per ogni } n \geq 1,\ F_n \mid F_{nm}\text{"}$$

← $\forall n$ è compreso nella prop!

dimostrando

|Passo Base| $P(0) = $ "per ogni $n \geq 1$, $F_n \mid F_{n \cdot 0}$".

Ma $F_{n\cdot 0} = F_0 = 0$, e ogni $m \in \mathbb{N}$ divide zero $\Rightarrow$ ok.

Mostriamo anche $P(1) = $ "per ogni $n \geq 1$, $F_n \mid F_{n \cdot 1}$", che però è ovvia perché la divisibilità è riflessiva.

|Passo Induttivo| Supponendo vera

$$P(m) = \text{"per ogni } n \geq 1,\ F_n \mid F_{nm}\text{"},$$

dobbiamo mostrare

$$P(m+1) = \text{"}\forall n \geq 1,\ F_n \mid F_{n(m+1)}\text{"}.$$

Scriviamo

$$F_{n(m+1)} = F_{nm+n}$$

e usiamo DV 1.29 con $N = n$, $M = mn$ [siccome abbiamo già mostrato $P(0)$, $P(1)$, possiamo supporre $m \geq 1$, pertanto anche $N, M \geq 1$ e l'esercizio è applicabile!] - Otteniamo

$$F_{n(m+1)} = F_{nm-1} \cdot F_n + F_{nm} \cdot F_{n+1} \quad (*)$$

Ora,

- $F_n \mid F_n$, quindi $F_n \mid F_{nm-1} \cdot F_n$;
- $F_n \mid F_{nm}$ per hp. induttiva;

quindi F_n divide la loro somma, che però è proprio $F_{n(m+1)}$ per $(*)$, e il passo induttivo è mostrato. $\square$