Soluzioni Test 1

venerdì 13 ottobre 2023 17:18

Esercizio 1) Siano $\underline{v}^{(h)} \in \mathbb{K}^n$, $h = 1, \ldots, k$, $k \leq n$, con $\underline{v}_i^{(h)} = 1$ se $i \leq h$ e $\underline{v}_i^{(h)} = 0$ se $i > h$. Allora $\underline{v}^{(1)}, \ldots, \underline{v}^{(k)}$ sono linearmente indipendenti.
Più in generale, siano $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ e $\underline{v}^{(h)} \in \mathbb{K}^n$, $h = 1, \ldots, k$, con $\underline{v}_{j_h}^{(h)} \neq 0$ e $\underline{v}_i^{(h)} = 0$ se $i > j_h$. Allora $\underline{v}^{(1)}, \ldots, \underline{v}^{(k)}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostriamo la prima parte, per induzione su k:

$\boxed{k=1}$ $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ma allora $a\, v^{(1)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$. OK

$\boxed{k-1 \Rightarrow k}$ Supponiamo che $\sum_{h=1}^{k} a_h v^{(h)} = 0$ e guardiamo la k-esima componente

$$0 = \sum_{h=1}^{k} \left(a_h v^{(h)}\right)_k = \sum_{h=1}^{k} a_h v_k^{(h)} = a_1 \underbrace{v_k^{(1)}}_{=0} + \ldots + a_{k-1} \underbrace{v_k^{(k-1)}}_{=0} + a_k \underbrace{v_k^{(k)}}_{=1} = a_k \Rightarrow \boxed{a_k = 0}$$

Ma allora la somma iniziale diventa $\sum_{h=1}^{k-1} a_h v^{(h)} = 0 \overset{\text{Ip Ind}}{\Rightarrow} \boxed{a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0}$, OK

Dimostriamo la seconda parte, per induzione su k:

$\boxed{k=1}$ $1 \leq j_1 \leq n$. Sia $a\, v^{(1)} = 0$, allora $0 = \left(a\, v^{(1)}\right)_{j_1} = a \underbrace{v_{j_1}^{(1)}}_{\neq 0} \Rightarrow a = 0$

$\boxed{k-1 \Rightarrow k}$ Supponiamo che $\sum_{h=1}^{k} a_h v^{(h)} = 0$ e guardiamo la j_k-esima componente

$$0 = \left(\sum_{h=1}^{k} a_h v^{(h)}\right)_{j_k} = \sum_{h=1}^{k} a_h v_{j_k}^{(h)} = a_1 \underbrace{v_{j_k}^{(1)}}_{=0} + \ldots + a_{k-1} \underbrace{v_{j_k}^{(k-1)}}_{=0} + a_k \underbrace{v_{j_k}^{(k)}}_{\neq 0} = a_k \underbrace{v_{j_k}^{(k)}}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{a_k = 0}$$

Ma allora la somma iniziale diventa $\sum_{h=1}^{k-1} a_h v^{(h)} = 0 \overset{\text{Ip Ind}}{\Rightarrow} \boxed{a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0}$, OK

Esercizio 2) Sono equivalenti:
i) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti;
ii) $\forall i$ $\underline{v}_i \notin Span(\underline{v}_1, \ldots, \hat{\underline{v}}_i, \ldots, \underline{v}_n)$
iii) $\underline{v}_1 \neq 0$ e $\underline{v}_i \notin Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1})$ $\forall i \geq 2$;
iv) $\dim(Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)) = n$.

$(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)$ significa $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, cioè togliamo v_i.

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Se per assurdo $\exists i$ tale che $v_i \in Span(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)$
allora $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_j v_j$ quindi $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0$ (con $a_i = -1$) $\overset{(i)}{\Rightarrow} a_1 = \ldots = a_n = 0$, assurdo perché $a_i = -1$, quindi $\forall i$ $v_i \notin Span(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ Se per assurdo $v_1 = 0$ allora $v_1 \in Span(v_2, \ldots, v_n)$ (prendo gli $a_i = 0$), assurdo per ii). Quindi $v_1 \neq 0$
Se per assurdo $\exists i \geq 2$ tale che $v_i \in Span(v_1, \ldots, v_{i-1})$, allora $v_i \in Span(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)$, assurdo per ii). Quindi $\forall i \geq 2$ $v_i \notin Span(v_1, \ldots, v_{i-1})$

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ Per induz su k dico che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sono lin indip.
$\boxed{k=1}$ Da (iii) so che $v_1 \neq 0$, cioè ha una componente non nulla, ad esempio la i-esima. Ma allora $a v_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{(a v_1)_i}_{= a \underbrace{(v_1)_i}_{\neq 0}} = 0 \Rightarrow a = 0$
$\boxed{k-1 \to k}$ $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$ e supponiamo per assurdo che $a_k \neq 0$, ma allora

$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} v_i = -v_k \Rightarrow v_k \in Span(v_1, \ldots, v_{k-1})$, assurdo per (iii). Ma allora $\boxed{a_k = 0}$.

Ma allora la somma iniziale diventa $\sum_{i=1}^{k-1} a_i v_i = 0 \overset{\text{Ip Ind}}{\Rightarrow} \boxed{a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0}$

$\boxed{i) \Rightarrow iv)}$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ generano $Span(v_1, \ldots, v_n)$, se sono lin indip è base. Quindi $\dim Span(v_1, \ldots, v_n) = n$.

$\boxed{iv) \Rightarrow i)}$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ generano $Span(v_1, \ldots, v_n)$, estraiamo una base $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$, ma
$Span(v_1, \ldots, v_n)$ ha dim n per (iv), quindi $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ quindi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono lin indip

Esercizio 3) Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0\}$. Dimostrare che è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e calcolarne la dimensione e una base.

Dimostriamo che W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

- $\boxed{0 \in W}$: $0 - 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$, OK

Dimostriamo che W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

- $\boxed{0 \in W}$: $0 - 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$, ok
- $\boxed{x, y \in W \Rightarrow x+y \in W}$: So che $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 - 2y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1+y_1) - (x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) - 2(x_4-y_4) = 0 \Rightarrow x+y \in W$
- $\boxed{x \in W \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha x \in W}$: So che $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$, ma allora $\alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3 - 2\alpha x_4 = \alpha(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in W$

Calcoliamone una base:

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0\}$. Ma $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 + 2x_4$

Un elemento generico di W è quindi $\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ al variare di x_2, x_3 e x_4. Ma $\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_2 - 2x_3 + 2x_4)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1} + x_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_2} + x_3\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_3} + x_4\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_4} =$

$= x_2(e_1 + e_2) + x_3(e_3 - 2e_1) + x_4(e_4 + 2e_1)$

Ma allora $W = \operatorname{Span}(e_1 + e_2, e_3 - 2e_1, e_4 + 2e_1)$, e $\{e_1 + e_2, e_3 - 2e_1, e_4 + 2e_1\}$ è lin indip per esercizio 1

Quindi W ha dimensione 3 e una sua base è $\{e_1 + e_2, e_3 - 2e_1, e_4 + 2e_1\}$

Esercizio 4) Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{K}_5[x] \mid p(1) = 0\}$. Dimostrare che W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}_5[x]$ e calcolarne dimensione e una base.

$\mathbb{K}_5[x]$ è l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado al più 5

Dimostriamo che W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}_5[x]$

- $\boxed{0 \in W}$: Il polinomio nullo valutato in 1 è 0
- $\boxed{p(x), q(x) \in W \Rightarrow p(x) + q(x) \in W}$: $p(x), q(x) \in W \Rightarrow p(1) = 0 = q(1) \Rightarrow (p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p(x) + q(x) \in W$
- $\boxed{p(x) \in W \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha p(x) \in W}$: $\alpha p(1) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha p(x) \in W$

Calcoliamone una base:

Ricordiamo che $p(1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)$ divide $p(x)$. Ma allora $W = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \exists q(x) \in \mathbb{K}_4[x]\ \ p(x) = (x-1)q(x)\}$,

Un elemento generico di W è quindi $p(x) = (x-1)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ al variare di a, b, c, d, e.

Ma $(x-1)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = a\,x^4(x-1) + b\,x^3(x-1) + c\,x^2(x-1) + d\,x(x-1) + e(x-1)$

quindi $W = \operatorname{Span}(x^4(x-1), x^3(x-1), x^2(x-1), x(x-1), (x-1))$. Osserviamo che $\{x^4(x-1), x^3(x-1), x^2(x-1), x(x-1), (x-1)\}$ sono lin indip perché hanno tutti grado diverso. Quindi W ha dimensione 5 e una sua base è $\{x^4(x-1), x^3(x-1), x^2(x-1), x(x-1), (x-1)\}$

Esercizio 5) Fissato un generico $n \in \mathbb{N}$, rispondere alle seguenti domande giustificando brevemente la risposta:
a) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : \exists a \in \mathbb{R} \text{ con } p(a) = 0\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}_n[x]$? Calcolarne eventualmente la dimensione.
b) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = p(1)\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}_n[x]$? Calcolarne eventualmente la dimensione.
c) Dire se $\{(x-1)^k : k = 1, 2, \dots, n\}$ è base per il sottospazio $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(1) = 0\}$ di $\mathbb{R}_n[x]$?

a) Non è sottospaz vettoriale: $x+1$ ci sta (-1 è radice di $x+1$), $-x$ ci sta (0 è radice di $-x$) ma la loro somma, che è 1, non ci sta (il polinomio costante 1 non ha radici)

b) Sia W tale insieme, dimostriamo che è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_n[x]$:

- $\boxed{0 \in W}$: Il polinomio nullo valutato sia in 0 che in 1 fa 0
- $\boxed{p(x), q(x) \in W \Rightarrow p(x) + q(x) \in W}$: $p(0) = p(1)$ e $q(0) = q(1) \Rightarrow (p+q)(0) = p(0) + q(0) = p(1) + q(1) = (p+q)(1)$
- $\boxed{p(x) \in W \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha p(x) \in W}$: $p(0) = p(1) \Rightarrow \alpha p(0) = \alpha p(1)$

Calcoliamone una base.

Sia $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Osserviamo che $p(0) = a_0$ e $p(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Ma allora $p(x) \in W \Leftrightarrow a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_2 - \dots - a_n \Leftrightarrow p(x) = a_0 - (a_2 + \dots + a_n)x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^2 = a_0 + a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x) + \dots + a_n(x^n - x)$

Quindi $W = \operatorname{Span}(1, x^2 - x, x^3 - x, \dots, x^n - x)$ e $\{1, x^2 - x, x^3 - x, \dots, x^n - x\}$ sono lin indip perché hanno tutti grado diverso.
Quindi W ha dim n e una sua base è $\{1, x^2 - x, x^3 - x, \dots, x^n - x\}$

c) Sia W tale sottospazio. In modo analogo a Esercizio 4 si ha che $W = \operatorname{Span}(x^{n-1}(x-1), x^{n-2}(x-1), \dots, x(x-1), (x-1))$
quindi W ha dimensione n

i) Sia W tale sottospazio. In modo analogo a Esercizio 4 si ha che $W = \text{span}\left(x^{n-1}(x-1), x^{n-2}(x-1), \dots, x(x-1), (x-1)\right)$
quindi W ha dimensione n
Osserviamo ora che $(x-1)^k \in W$, infatti $(1-1)^k = 0^k = 0$, e sono lin indip perché hanno tutti grado diverso
Quindi $\{(x-1)^k \mid k=1,..,n\}$ è un insieme di n vettori di W linearm indip e, dato che $\dim W = n$, ne è base

Esercizio 6) Dati i 4 punti in $\mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane ortogonali

$$A \equiv (1,2,0),\ B \equiv (2,-1,0),\ C \equiv (1,0,2),\ D \equiv (0,2,1)$$

a) Scrivere le equazioni parametriche delle due rette r, s passanti rispettivamente per AB e per CD.

$$r : \begin{cases} \text{x} = \\ \text{y} = \\ \text{z} = \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \text{x} = \\ \text{y} = \\ \text{z} = \end{cases}$$

b) Scrivere l'equazione di un piano Π contenente r e parallelo ad s.

IN GENERALE, la retta passante per due punti A e B è della forma $r = \text{span}(B-A) + A$

$$r = \text{span}(B-A) + A = \text{span}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}t+1\\-3t+2\\0\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow r. \begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s = \text{span}(D-C) + C = \text{span}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}-t+1\\2t\\-t+2\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$$

In generale, un piano Π è della forma $\Pi = \text{span}(v_0, v_1) + w_0$

Se chiediamo che $r \subseteq \Pi$ con $r = \text{span}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, allora possiamo scegliere $v_0 = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ e $w_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \Pi = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, v_1\right) + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Π è parallelo a $s \iff \Pi \cap s = \emptyset$, ma allora, dato $s = \text{span}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, basta scegliere $v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Pi = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \mid t,k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}t-k+1\\-3t+2k+2\\-k\end{pmatrix} \mid t,k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t-k+1 \\ y = -3t+2k+2 \\ z = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -z \\ x = t+z+1 \\ y = -3t-2z+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -z \\ t = x-z-1 \\ y = -3x+3z+3-2z+2 \end{cases} \Rightarrow y = -3x+z+5 \Rightarrow 3x+y-z = 5$$ che è l'equazione cercata

Esercizio 7) Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ le rette

$$r_1 : \begin{cases} -x + ky - z = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : (x,y,z) = (2t, 1-kt, 2kt) \quad (t \in \mathbb{R})$$

sono incidenti, sghembe, parallele.

$$r_1 = \begin{cases} x = ky - z \\ ky - z - y + 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = ky - z \\ ky - y = z - 1 \end{cases} = \begin{cases} x = ky - z \\ z = y(k-1)+1 \end{cases} = \begin{cases} x = \cancel{ky} - \cancel{ky} + y - 1 \\ z = y(k-1)+1 \end{cases}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}y-1\\y\\y(k-1)+1\end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\k-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\begin{pmatrix}1\\1\\k-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$r_2 = \left\{ \begin{pmatrix}2t\\1-kt\\2kt\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix}2\\-k\\2k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\begin{pmatrix}2\\-k\\2k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{PARALLELE}}$ Sono parallele $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\k-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-k\\2k\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -k \\ \alpha(k-1) = 2k \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ k = -2 \\ 2\cdot(-3) = 2(-2) \end{cases}$ ↯ Mai parallele

$\boxed{\text{INCIDENTI}}$ Sono incidenti $\iff \exists t, y \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix}2t\\1-kt\\2kt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y-1\\y\\y(k-1)+1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2t = \cancel{1}-kt\cancel{-1} \\ y = 1-kt \\ 2kt = (1-kt)(k-1)+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t(2+k) = 0 \\ y = 1-kt \\ 2kt = (1-kt)(k-1)+1 \end{cases}$

$t=0$: $\begin{cases} y = 1 \\ 0 = (1-0)(k-1)+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ k = 0 \end{cases}$

$k=-2$: $\begin{cases} y = 1+2t \\ -4t = (1+2t)(-3)+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1+2t \\ -4t = -3-6t+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

Incidenti $\iff k = 0 \lor k = -2$

$\boxed{\text{SGHEMBE}}$ Sono sghembe $\iff$ non sono né incidenti né paralleli, che è verificato $\forall k \in \mathbb{R}$ t.c. $k \neq 0 \land k \neq -2$

Esercizio 8) Sia $\mathcal{A} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\} \subset V$, con V spazio vettoriale di dimensione n. Allora $\mathcal{A}$ è linearmente dipendente se e solo se (segnare le risposte corrette)

A	$\forall i, \underline{v}_i \in \text{Span}(\mathcal{A} \setminus \{\underline{v}_i\})$;
B	$\exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}, \mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$, tale che $\text{Span}(\mathcal{A}') = \text{Span}(\mathcal{A})$
C	$\exists i : \underline{v}_i \in \text{Span}(\mathcal{A} \setminus \{\underline{v}_i\})$
D	$k > n$
E	$\dim(\text{Span}(\mathcal{A})) < \#\mathcal{A}$

$\boxed{C}$ è vero e segue da Esercizio 2, in particolare da i) $\iff$ ii)

$\boxed{B}$ [illegible]

$\boxed{C}$ è vero e segue da Esercizio 2, in particolare da i) $\Leftrightarrow$ ii)

$\boxed{B}$ è vero perché è equivalente a C

$\boxed{A}$ è falso, al posto di "$\forall$" ci andrebbe "$\exists$"

$\boxed{D}$ è falso, infatti $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbb{R}^3$, ma $k = 2 < 3 = n$

$\boxed{E}$ è vero e segue da Esercizio 2, in particolare da i) $\Leftrightarrow$ iv)