1. Dato b parametro reale, si consideri l'equazione

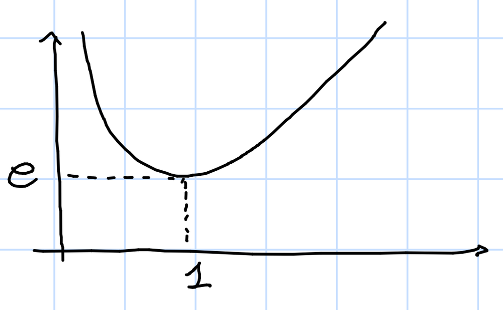
$$\log(bx) = x \ .$$

a) Determinare il numero soluzioni al variare di $b \geq 0$.
b) Determinare il comportamento di queste soluzioni per $b \to +\infty$.
c) Sia x_b la maggiore delle soluzioni: studiarne il comportamento per $b \to +\infty$

a) Porto l'equazione in una forma migliore...

$\log(bx) = x$ SSE $bx = e^x$ SSE $b = \frac{e^x}{x}$ $(x > 0)$

Studio dunque la funzione $f(x) = \frac{e^x}{x}$ e ne disegno il grafico (bastano limiti e derivata)



Dunque il numero di soluzioni e'

- 0 se $0 \leq b < e$
- 1 se $b = e$
- 2 se $b > e$

⚠ Potevo anche studiare gli zeri della funzione $g_b(x) = \log(bx) - x$, ma e' una funzione dipendente da parametro, quindi più noiosa

b) Siano $x_b^1 < x_b^2$ le due soluzioni $(b \to +\infty)$. Dal grafico e' evidente che $x_b^1 \to 0$ e $x_b^2 \to +\infty$ per $b \to +\infty$

⚠ Se avessi studiato $g(x) = \log(bx) - x$ questo punto sarebbe stato decisamente più complicato (provare per credere!)

c) Capiamo per bene cosa significa questa richiesta.
Abbiamo $b = \frac{e^x}{x}$, che possiamo pensare come FUNZIONE di x $(b = b(x))$. Questa funzione (per x grandi) e' invertibile ed indichiamo con $x_b = x(b)$ la sua inversa, ovvero la funzione tale che $b = \frac{e^{x(b)}}{x(b)}$. Questa e' una onesta funzione di b, e mi chiedo come si comporti per $b \to +\infty$ (nel punto b) ho gia' detto che $\lim_{b \to +\infty} x(b) = +\infty$).

<u>Passo 1</u> (EURISTICA)

$$b = \frac{e^{x(b)}}{x(b)} \rightsquigarrow b\,x(b) = e^{x(b)} \rightsquigarrow \log(b) + \log(x(b)) = x(b)$$

$\log(x(b)) = o(x(b))$ per $b \to +\infty$, quindi provo a buttarlo via ed affermo che $x(b) \sim \log(b)$ per $b \to +\infty$.

<u>Passo 2</u> (CONTROLLO)

Verifico (perche' NON sono sicuro al 100% della correttezza dei miei passaggi) che $x(b) \sim \log(b)$ per $b \to +\infty$.

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{x(b)}{\log(b)} \overset{\substack{b = b(x) \\ \lim_{x \to +\infty} b(x) = +\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x(b(x))}{\log(b(x))} \overset{\substack{x(b) \text{ inversa} \\ \text{di } b(x)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log(b(x))} \overset{b(x) = \frac{e^x}{x}}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x - \log(x)} = 1$$

ESERCIZIO DALLE SCHEDE (stessa filosofia)

Sia $f(x) = x^2 \log(x)$ e sia $g(y)$ la sua inversa. Qual è il comportamento di g per $y \to +\infty$?

$$y = f(g(y)) = g^2(y) \log(g(y))$$

<u>Passo 1</u> (EURISTICA)

Scritta così non si capisce molto, quindi passo al logaritmo per trasformare prodotti in somme.

$$\log(y) = \log(g^2(y) \log(g(y))) = 2\log(g(y)) + \log(\log(g(y)))$$

$\log(g(y)) = o(\log(\log(g(y))))$ per $y \to +\infty$, dunque sarà

$$\log(g(y)) \sim \frac{\log(y)}{2} \qquad (1)$$

Prendo questa eq. asintotica e la butto dentro la prima eguaglianza, ottenendo

$$y \sim g^2(y) \frac{\log(y)}{2},$$

ovvero

$$g(y) \sim \sqrt{\frac{2y}{\log(y)}}$$

⚠ Funziona passare all'esponenziale la (1)? NO, perche' $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ (trovare un controesempio!)

<u>Passo 2</u> (CONTROLLO)

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{g(y)}{\sqrt{\frac{2y}{\log(y)}}} \overset{y = f(x)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{g(f(x))}{\sqrt{\frac{2f(x)}{\log(f(x))}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{2x^2\log(x)}{2\log(x) + \log\log x}}} = 1$$

3. Dato $n \geq 0$ intero, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - y \sin x \cos^n x = \sin x \cos^{2-n} x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

a) Determinare la soluzione per $n = 0$.
b) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della soluzione per $n = 0$.
c) Determinare la parte principale per $x \to 0$ della soluzione per n qualunque.

a) $\dot{u} = u \sin x + \sin x \cos^2 x$

Si potrebbe usare la formula generale che avete visto in classe, ma utilizziamo un altro sistema...
Risolviamo l'omogenea associata

$$\dot{u} = u \sin x \rightsquigarrow \frac{du}{dx} = u \sin x \rightsquigarrow \int \frac{1}{u}\, du = \int \sin x\, dx \rightsquigarrow u(x) = ce^{-\cos x}, \ c > 0.$$

Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di partenza del tipo

$$v(x) = c(x) e^{-\cos(x)} \quad \text{(VARIAZIONE DELLE COSTANTI)}$$

Deriviamo ed otteniamo

$$\underbrace{c'(x) e^{-\cos x} + c(x) \sin(x) e^{-\cos x}}_{v'(x)} = \underbrace{c(x) e^{-\cos(x)}}_{v(x)} \sin(x) + \sin(x)\cos^2(x)$$

ovvero

$$c'(x) = e^{\cos x} \sin(x) \cos^2(x).$$

Integrando otteniamo

$$c(x) = \int e^{\cos(x)} \sin(x) \cos^2(x) \overset{\substack{y = \cos(x) \\ dy = -\sin(x)dx}}{=} - \int e^y y^2 dy \overset{\text{parti}}{=} -e^y y^2 + 2 \int e^y y \overset{\text{parti}}{=}$$

$$= -e^y y^2 + 2e^y y - 2\int e^y dy = e^y(-y^2 + 2y - 2) = e^{\cos x}(-\cos^2 x + 2\cos x - 2)$$

Quindi

$$v(x) = (-\cos^2 x + 2\cos x - 2)$$

La soluzione generale e' dunque

$$u(x) = c\, e^{-\cos x} - \cos^2 x + 2\cos x - 2.$$

Ricordando che $u(0) = 0$, otteniamo

$$0 = u(0) = ce^{-1} - 1 + 2 - 2 \Rightarrow c = e,$$

ovvero

$$u(x) = e^{1 - \cos x} - 1 - (1 - \cos x)^2$$

b) Sviluppo (poco) con Taylor

$$u(x) = e^{1 - (1 - x^2/2 + o(x^3))} - 1 - (1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)))^2 =$$

$$= e^{x^2/2 + o(x^3)} - 1 - (\frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1 - \frac{x^4}{4} + o(x^5) = \boxed{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$$

c) Ho speranza di risolvere l'equazione? Forse, ma fa abbastanza schifo. Mi ricordo però che la P.P. e' il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor, e per sviluppare con Taylor (in 0) mi occorrono solo le derivate (in 0)...

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{u^{(m)}(0)}{m!} x^m + o(x^N)$$

Per le condizioni al bordo so già che $u(0) = 0$. Usando l'equazione scopro che

$$u'(0) = \underbrace{u(0)}_{=0} \sin(0) \cos^m(0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0} \cos^{2-m}(0) = 0 + 0 = 0$$

Per la derivata seconda derivo l'equazione

$$u''(0) = \underbrace{u'(0)}_{=0}(\dots) + \underbrace{u(0)}_{=0}(\dots) + \underbrace{\cos^{3-m}(0)}_{=0} - (2-m)\underbrace{\sin(0)}_{=0}\cos^{1-m}(0) = 1$$

Quindi $u(x) = \frac{u^{(2)}(0)}{2} x^2 + o(x^2) = \boxed{\frac{x^2}{2}} + o(x^2)$

<u>REMARK</u> $\boxed{m=2}$ $u' \quad (x)\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)$

$u(0) = 0$, $\quad 0 = 0$, $u''(0) = \cos(0) = 1$, quindi $u(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$\boxed{\text{NOTA}}$ Posso fare la derivata seconda?
In teoria so solo che $u \in C^1$ (me lo dice il teorema che mi garantisce l'esistenza della soluzione). Noto però che se una funzione u soddisfa l'equazione, allora

$$u'(x) = \underbrace{u(x)}_{C^1} \underbrace{\sin(x)\cos^m(x)}_{C^1} + \underbrace{\sin(x)\cos^{2-m}(x)}_{C^1},$$

dunque $u' \in C^1$, ovvero $u \in C^2$ (posso fare la derivata!).
Posso andare avanti...

$$u'(x) = \underbrace{u(x)}_{C^2} \underbrace{\sin(x)\cos^m(x)}_{C^2} + \underbrace{\sin(x)\cos^{2-m}(x)}_{C^2},$$

dunque $u' \in C^2$, ovvero $u \in C^3$...
Poiché $\sin(x)\cos^m(x), \sin(x)\cos^{2-m}(x) \in C^\infty$, allora $u \in C^\infty$!
Questo procedimento "a cascata" e' noto come BOOTSTRAP, ed è spesso molto utile per dimostrare che le soluzioni di certe eq. diff. hanno più regolarità di quella che sembrerebbe