Esercizio 1) Sia $f : V \to W$ applicazione lineare, $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale. Sia

$$f(U) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{u} \in U \ t.c. \ f(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\}.$$

Dimostrare che $f(U)$ è sottospazio vettoriale di W e che vale

$$dim f(U) = dim U - dim(ker f \cap U)$$

ESERCIZIO 1

Dimostriamo che $f(U)$ è sottospazio vettoriale di W

- $\boxed{0 \in f(U)}$: f è lineare, quindi $0 = f(0)$ e $0 \in U$ in quanto U è sottospazio vettoriale, quindi $0 \in f(U)$
- $\boxed{w_1, w_2 \in f(U) \Rightarrow w_1 + w_2 \in f(U)}$: $w_1, w_2 \in f(U) \Rightarrow w_1 = f(u_1)$ e $w_2 = f(u_2)$ con $u_1, u_2 \in U$. Ma allora
  $w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$ e $u_1 + u_2 \in U$ in quanto U è sottospazio vettoriale, quindi $w_1 + w_2 \in f(U)$
  f lineare
- $\boxed{w \in f(U) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \alpha w \in f(U)}$: $w \in f(U) \Rightarrow w = f(u) \Rightarrow \alpha w = \alpha f(u) = f(\alpha u)$ e $\alpha u \in U$ in quanto U è sottospazio vettoriale, quindi $\alpha w \in f(U)$
  f lineare

Dimostriamo che $\dim f(U) = \dim U - \dim(\ker f \cap U)$:

Consideriamo la restrizione di f a U, $f_{|U} : U \to f(U)$, $u \mapsto f(u)$, allora $\operatorname{Im} f_{|U} = f(U)$ e $\ker f_{|U} = \ker f \cap U$

Ma allora applicando la formula delle dimensioni:

$$\dim U = \dim \ker f_{|U} + \dim \operatorname{Im} f_{|U} = \dim(\ker f \cap U) + \dim f(U)$$

$$\Rightarrow \dim f(U) = \dim U - \dim(\ker f \cap U)$$

Esercizio 2) Sia $f : V \to W$ applicazione lineare, sia U supplementare di $ker f$, cioè vale $V = ker f \oplus U$. Dimostrare che $f|_U : U \to f(U)$ è isomorfismo.

ESERCIZIO 2

Dato che $f_{|U} : U \to f(U)$ è surgettiva, per dimostrare che $f_{|U} : U \to f(U)$ è isomorfismo è sufficiente dimostrare che $f_{|U}$ è iniettiva.

Osserviamo che $\ker f_{|U} = (\ker f) \cap U = \{0\}$ in quanto sono in somma diretta, quindi $f_{|U}$ è iniettiva.

Esercizio 3) Siano U, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Sia $U \times W = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{u} \in U, \ \mathbf{w} \in W\}$ il prodotto cartesiano di U e W, con la somma

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{u}', \mathbf{w}') = (\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{w} + \mathbf{w}').$$

Dimostrare che $U \times W$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e che

$$dim(U \times W) = dim U + dim W$$

ESERCIZIO 3

Dimostriamo che $U \times W$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale:

1) (associatività) $\big((u,w) + (u',w')\big) + (u'',w'') = \big((u+u') + u'', (w+w') + w''\big)$
$= \big(u + (u' + u''), w + (w' + w'')\big) = (u,w) + \big((u',w') + (u'',w'')\big)$
U, W spazi vettoriali

2) (elem neutro) $(0,0)$ è elem neutro, infatti
$(u,w) + (0,0) = (u+0, w+0) = (u,w)$
U, W spazi vettoriali

3) (opposto) $(-u,-w)$ è l'opposto di (u,w), infatti
$(u,w) + (-u,-w) = (u + (-u), w + (-w)) = (0,0)$
U, W spazi vettoriali

4) (commutativo) $(u,w) + (u',w') = (u+u', w+w') = (u'+u, w'+w) = (u',w') + (u,w)$
U, W spazi vettoriali

5) (distributivo) $\alpha\big((u,w) + (u',w')\big) = \alpha(u+u', w+w') =$
$= \big(\alpha(u+u'), \alpha(w+w')\big) = (\alpha u + \alpha u', \alpha w + \alpha w') =$
U, W spazi vettoriali
$= (\alpha u, \alpha w) + (\alpha u', \alpha w') = \alpha(u,w) + \alpha(u',w')$

e poi $(\alpha+\beta)(u,w) = \big((\alpha+\beta)u, (\alpha+\beta)w\big) = (\alpha u + \beta u, \alpha w + \beta w) =$
U, W spazi vettoriali
$= (\alpha u, \alpha w) + (\beta u, \beta w) = \alpha(u,w) + \beta(u,w)$

6) (associatività per scalari) $\alpha\big(\beta(u,w)\big) = \alpha(\beta u, \beta w) = \big(\alpha(\beta u), \alpha(\beta w)\big) =$
$= \big((\alpha\beta)u, (\alpha\beta)w\big) = (\alpha\beta)(u,w)$
U, W spazi vettoriali

7) (elem neutro per il prodotto) : $1 \cdot (u,w) = (1 \cdot u, 1 \cdot w) = (u,w)$
U, W spazi vettoriali

Dimostriamo che $\dim U \times W = \dim U + \dim W$:

Sia $A = \{u_1, .., u_k\}$ base di U e $B = \{w_1, \dots, w_l\}$ base di W, allora dico che $\{(u_1, 0), \dots, (u_k, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_l)\}$ è base di $U \times W$, in tal caso

avremmo verificato che $\dim(U \times W)$ …

Sia $A=\{u_1,..,u_k\}$ base di U e $B=\{w_1,...,w_\ell\}$ base di W, allora dico che

$\{(u_1,0),...,(u_k,0),(0,w_1),...,(0,w_\ell)\}$ è base di $U\times W$, in tal caso

avremmo verificato che $\dim U\times W = k+\ell = \dim U + \dim W$

- $\boxed{\text{genera}}$: dato che A e B generano, allora un qualunque $(u,w)\in U\times W$ è della forma $(u,w)=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i u_i, \sum_{j=1}^{\ell}b_j w_j\right)=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i u_i, 0\right)+\left(0,\sum_{j=1}^{\ell}b_j w_j\right)$
$= \sum_{i=1}^{k}a_i(u_i,0)+\sum_{j=1}^{\ell}b_j(0,w_j)$
- $\boxed{\text{lin indip}}$ $\sum_{i=1}^{k}a_i(u_i,0)+\sum_{j=1}^{\ell}b_j(0,w_j)=(0,0) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{k}a_i u_i, \sum_{j=1}^{\ell}b_j w_j\right)=(0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sum_{i=1}^{k}a_i u_i = 0\\ \sum_{j=1}^{\ell}b_j w_j = 0\end{cases} \underset{A,B \text{ lin indip}}{\Longrightarrow} \begin{cases}a_i=0 \ \forall i\\ b_j=0 \ \forall j\end{cases}$$

Esercizio 4) Siano $U,W\subseteq V$ sottospazi vettoriali. Dimostrare le seguenti proposizioni:
(i) $f:U\times W\to V$ tale che $f(\mathbf{u},\mathbf{w})=\mathbf{u}+\mathbf{w}$ è lineare;
(ii) $Imf = U+W$;
(iii) $Kerf=\{(\mathbf{u},-\mathbf{u})|\ \mathbf{u}\in U\cap W\}$
e $\psi: kerf\to U\cap W$ tale che $\psi((\mathbf{u},-\mathbf{u}))=\mathbf{u}$ è isomorfismo;
(iv) Dedurre la formula di Grassmann dimostrando che
$dim(U\times W)=dimU+dimW$
e
$dim(U\times W)=dim(U+W)+dim(U\cap W)$.

ESERCIZIO 4

i) $f((u,w)+(u',w'))=f((u+u',w+w'))=u+u'+w+w'=u+w+u'+w'=f((u,w))+f((u',w'))$

$f(\alpha(u,w))=f((\alpha u,\alpha w))=\alpha u+\alpha w=\alpha(u+w)=\alpha f((u,w))$

ii) $\boxed{\subseteq}$ Sia $v\in Im f$, allora $\exists u\in U\ \exists w\in W$ t.c. $v=f(u,w)=u+w\in U+W$
$\Rightarrow v\in U+W$

$\boxed{\supseteq}$ Sia $v\in U+W$, allora $\exists u\in U\ \exists w\in W$ t.c. $v=u+w=f(u,w)\in Im f$
$\Rightarrow v\in Im f$

iii) $\boxed{\subseteq}$ Sia $(u,w)\in Ker f$, allora $0=f(u,w)=u+w \Rightarrow u=-w \Rightarrow u\in U\cap W$
$\Rightarrow (u,w)=(u,-u)$ con $u\in U\cap W$

$\boxed{\supseteq}$ Sia $(u,-u)\in U\times W$ con $u\in U\cap W$, allora $f(u,-u)=u+(-u)=0$
$\Rightarrow (u,-u)\in Ker f$

Verifichiamo ora che $\psi: Ker f \longrightarrow U\cap W$ è isomorfismo.
$(u,-u)\longmapsto u$

- $\boxed{\text{lineare}}$: $\psi((u,-u)+(z,-z))=\psi((u+z,-u+(-z)))=u+z=\psi(u,-u)+\psi(z,-z)$
- $\boxed{\text{Iniett}}$: $\psi(u,-u)=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow (u,-u)=(0,0)$
- $\boxed{\text{Surg}}$: Sia $u\in U\cap W$, allora $u=\psi(u,-u)$

iV) Per esercizio 3 si ha che $\dim U\times W = \dim U + \dim W$.

Per la formula delle dimensioni $\dim U\times W = \dim Ker f + \dim Im f = \dim U\cap W + \dim(U+W)$

$\Rightarrow \dim(U+W)=\dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$

Esercizio 5) Sia $f:V\to W$ lineare e siano $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k\in V$ linearmente indipendenti. Dimostrare che:
$f(\mathbf{v}_1),...,f(\mathbf{v}_k)$ sono linearmente indipendenti $\iff$ $span\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k\}\cap Kerf=\{\mathbf{0}\}$.
(In particolare, f iniettiva $\Rightarrow$ f manda vettori indipendenti in vettori indipendenti).

Esercizio 5

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $w\in span\{v_1,...,v_k\}\cap Ker f \Rightarrow w=\sum_{i=1}^{k}a_i v_i$ e $0=f(w)=\sum_{i=1}^{k}a_i f(v_i)$

Ma per ipotesi $\{f(v_1),...,f(v_k)\}$ sono lin indip, quindi $a_1=...=a_k=0$,

ma allora $w=\sum_{i=1}^{k}a_i v_i = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\sum_{i=1}^{k}a_i f(v_i)=0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k}a_i v_i\right)=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}a_i v_i\in Ker f$ e $\sum_{i=1}^{k}a_i v_i\in span\{v_1,...,v_k\}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}a_i v_i\in Ker f\cap span\{v_1,...,v_k\}=\{0\}$ per ipotesi $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}a_i v_i = 0$, ma

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_k\} = \{0\} \text{ per ipotesi } \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0, \text{ ma}$$

$\{v_1,\dots,v_k\}$ sono lin indip per ipotesi $\Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$

Esercizio 6) Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usare la riduzione a scala per trovare una base di $U + \mathbb{W}$, dove $U = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $W = span\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

ESERCIZIO 6

Osserviamo che $U + W = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$, sia quindi A la matrice le cui colonne sono $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che le operazioni sulle colonne non cambiano lo span delle colonne, dunque riducendo a scala sulle colonne alla fine otterremo una base di $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\} = U + W$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^3 - 2A^1 \\ A^4 + 2A^1 \\ A^5 - 3A^1 \\ A^6 + A^1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Scambio} \\ A^4 \text{ con } A^2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{A^3 + 2A^2 \\ A^4 - 2A^2 \\ A^5 - A^2 \\ A^6 - 3A^2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^4 + A^3 \\ A^5 + A^3 \\ A^6 + A^3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ è una base di $U + W$

Esercizio 7) Trovare una soluzione particolare e una base di soluzioni per l'omogenea associata del sistema

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 - 3x_6 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 7

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ la matrice del sistema, applico Gauss sulle righe per ottenere un sistema equivalente:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{Scambio} \\ \tilde{A}_4 \text{ con } \tilde{A}_1}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\tilde{A}_2 - 3\tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_3 - \tilde{A}_1}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{Scambio} \\ \tilde{A}_3 \text{ con } \tilde{A}_2}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Scambio} \\ \tilde{A}_3 \text{ con } \tilde{A}_2}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\tilde{A}_3 + 2\tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_4 - 2\tilde{A}_2}]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{A}_4 + 3\tilde{A}_3]{} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

È risolubile perché $rg(\tilde{A}) = rg(A)$

Il sistema equivalente è quindi $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$

È risolubile perché $rg(\tilde{A}) = rg(A)$

Il sistema equivalente è quindi $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 4 \\ x_4 + x_6 = 1 \end{cases}$

x_1, x_3, x_4 sono variabili di pivot

x_2, x_5, x_6 sono variabili libere

Ponendo $x_2 = x_5 = x_6 = 0$ troviamo $\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_1 = -6 \end{cases}$, cioè troviamo la soluzione particolare $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il sistema omogeneo equivalente è $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$,

ponendo $x_2 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$ ottengo $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$, quindi $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema omogeneo

ponendo $x_2 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ ottengo $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, quindi $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema omogeneo

ponendo $x_2 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ ottengo $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, quindi $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema omogeneo

Osserviamo che, per la scelta di x_2, x_5, x_6, si ha che u_1, u_2 e u_3 sono linearmente indipendenti,

inoltre sappiamo che la dimensione dello spazio delle soluzioni dell'omogenea è $n - rg(A) = 6 - 3 = 3$,

quindi $\{u_1, u_2, u_3\}$ è base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea

In conclusione, la soluzione generica del sistema iniziale è $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$